Apports de la théorie anthropologique du didactique
Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico
Contributions of the anthropological theory of the didactic

Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société

Gisèle Cirade

Michèle Artaud

Marianna Bosch

Jean-Pierre Bourgade

Yves Chevallard

Caroline Ladage

Tomás Sierra

Actes du 4e congrès international sur la théorie anthropologique du didactique (TAD)

Titre

- Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société
- Evoluciones contemporáneas de la relación a las matemáticas y otros saberes en la escuela y en la sociedad
- Current Developments of the Relation to Mathematics and other Knowledge at School and in Society

Comité éditorial

- Éditeurs : Gisèle Cirade, Michèle Artaud, Marianna Bosch, Jean-Pierre Bourgade, Yves Chevallard, Caroline Ladage & Tomás Sierra.
- Coéditeurs : Berta Barquero, Alain Bronner, Josep Gascón & Javier García.

Références

Cirade, G., Artaud, M., Bosch, M., Bourgade, J.-P., Chevallard, Y., Ladage, C. & Sierra, T. A. (Éds). (2017). *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société*. https://citad4.sciencesconf.org

Dépôt sur le site citad4.sciencesconf.org

Août 2017

Table des matières

Índice

Contents

Présentation et remerciements

La théorie anthropologique du didactique (TAD) occupe aujourd’hui une place déterminante dans la recherche en didactique. À l’instar des trois premiers congrès internationaux sur la TAD, ce quatrième congrès a permis de réunir les chercheurs qui travaillent ou souhaitent travailler dans le cadre de la TAD, avec pour objectifs a) d’établir un bilan d’ensemble des résultats et des avancées de la TAD, bilan qui concerne la recherche fondamentale comme les travaux sur le développement des systèmes d’enseignement et de formation, b) d’élaborer un programme de recherche autour des problèmes ouverts les plus pertinents, qu’ils soient relatifs aux difficultés affectant les systèmes éducatifs ou qu’ils portent sur le développement de la didactique comme discipline scientifique, c) d’identifier et d’étudier les problèmes spécifiques soulevés par l’extension à d’autres champs des outils conceptuels et méthodologiques de la TAD.

Ce quatrième congrès revêt une importance notable pour des raisons symboliques autant que scientifiques. D’une part, l’attribution à Yves Chevallard de la médaille Hans Freudenthal (qui lui a été remise à Séoul au congrès ICME-12) marque exemplairement le rôle éminent de ce programme de recherche dans le panorama mondial de la recherche en didactique des mathématiques[1]. D’autre part, il permet d’étudier les conditions et les contraintes déterminant la crise historique actuelle qui, en nombre de pays, touche l’enseignement scolaire et universitaire à propos de savoirs « classiques » (dont les mathématiques et les sciences physiques et chimiques) autant que de savoirs de constitution plus récente (comme la muséologie, le développement durable, etc.). Cette crise va de pair avec une minoration apparemment systématique, par les responsables de tous niveaux,

1. Voir http://www.cnrs.fr/insmi/spip.php?article270. La médaille Hans Freudenthal est, avec la médaille Felix Klein, la plus haute distinction accordée par l’ICMI *(International Commission on Mathematical Instruction*), qui est une commission spécialisée de l’IMU *(International Mathematical Union)*.

des apports de la recherche en didactique, qui restent encore largement méconnus.

L'organisation de ce congrès international s'est réalisée sous l'égide de l'IUFM Midi-Pyrénées, devenu depuis l'ESPE Toulouse Midi-Pyrénées, que nous tenons à remercier vivement pour avoir mis à notre disposition des moyens matériels et humains qui ont permis au congrès de se dérouler dans d'excellentes conditions. Plus largement, nous tenons à remercier toutes les institutions éducatives et scientifiques qui, d'une manière ou d'une autre, nous ont apporté leur soutien scientifique, logistique ou financier : l'UMR « Éducation, formation, travail, savoirs » (EFTS) ; la commission recherche de l'IUFM, et notamment le pôle de convergence « Curricula, compétences, langage, évaluation, polyvalence, didactiques des disciplines, interdisciplinarité » (CCLEPoDI) ; le département « Métiers de l'enseignement et de la formation en sciences et technologies » (MEFST) de l'IUFM ; l'université Toulouse Jean Jaurès et notamment son Conseil scientifique ; l'association pour la recherche en didactique des mathématiques (ARDM) ; la Région Midi-Pyrénées, intégrée depuis dans la Région Occitanie.

Le congrès n'aurait bien sûr pas pu se tenir et les actes paraître sans le travail réalisé par le comité d'organisation, le comité scientifique et le comité d'édition, et nous remercions chaleureusement tous les membres de ces différents comités pour leurs apports. Nous terminerons avec une mention particulière pour Jean-Pierre Bourgade, Christian Denux, Sandrine Galéa et Roland Pouget, qui ont œuvré sans compter leur temps pour que les participants puissent se consacrer pleinement à leurs activités scientifiques.

Gisèle Cirade
UMR EFTS
Université Toulouse 2 Jean Jaurès

Michèle Artaud
EA 4671 ADEF
Université d'Aix-Marseille

Le congrès et ses axes

Le titre du congrès − *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* – met l'accent sur les transformations qui bouleversent actuellement le paysage didactique (scolaire, universitaire, professionnel et autres), en modifiant le rapport ordinaire à la connaissance et, corrélativement, le rapport aux savoirs enseignés. Les problèmes inédits ou renouvelés qui en résultent constituent un défi scientifique pour la science didactique dans la mesure où celle-ci, qui s'est constituée historiquement autour de l'ordre scolaire « classique » (dans sa version dite à l'époque « moderne »), doit désormais s'en démarquer afin de continuer à assumer sa mission d'élucidation théorique et à accroître sa capacité de proposition et de régulation en matière d'organisations didactiques.

Par l'analyse des conditions et contraintes gouvernant le didactique et ayant leur siège en des institutions situées à différents niveaux du réel social (matière étudiée, pédagogie, école, société…), la TAD vise à permettre un abord inclusif des phénomènes didactiques, qu'ils aient pour cadre l'école et ses usages, ou les milieux de la formation et des activités professionnelles, les activités de culture et de loisir, voire les cadres sociaux de la vie quotidienne. Les thématiques représentées à ce quatrième congrès sont articulées en quatre axes principaux présentés ci-après.

Axe 1. Perspectives de la TAD, rapports avec d'autres approches

Cet axe traditionnel a pour objectif de permettre de situer les apports et les tendances actuelles de la TAD par rapport au « continent didactique », aux plans national et international. Il appelle un bilan ouvert et dynamique des acquis récents et des perspectives de recherche, et cela en de multiples domaines disciplinaires.

Axe 2. L’analyse praxéologique comme outil de l’analyse et de l’ingénierie didactiques

L’axe 2 fédère un questionnement de type fondamental avec un questionnement de type formatif, au plan individuel comme au plan des collectifs de formation et de recherche : que serait un *modèle praxéologique de référence* (MPR) *pour le chercheur* du savoir dont celui-ci étudie les conditions et contraintes de diffusion ? Comment déterminer, construire, utiliser de tels MPR ?

Par contraste avec l’abord simplement *pédagogique* de la diffusion scolaire des connaissances, la didactique s’est définie depuis toujours comme donnant une place décisive, en matière d’analyse comme d’ingénierie didactiques, aux conditions et contraintes liées spécifiquement à « l’enjeu didactique », c’est-à-dire portées par la question étudiée ainsi que par les œuvres outillant son étude. Cet axe met l’accent sur un double mouvement. Le premier consiste classiquement à articuler l’analyse praxéologique (par exemple l’analyse mathématique) de l’enjeu didactique au travail d’analyse ou d’ingénierie didactiques visés. Dans ce premier mouvement, on s’efforce d’identifier la structure et le fonctionnement de l’œuvre étudiée pour dégager les contraintes qu’elle impose et pour mettre au jour les conditions qu’elle laisse ouvertes et que l’on pourra exploiter. Le second mouvement est, si l’on peut dire, de sens inverse : l’approfondissement de l’analyse *praxéologique* d’une œuvre implique l’analyse *didactique* de sa genèse institutionnelle à travers les transpositions successives qui l’ont affectée : d’où vient-elle ? Pourquoi est-elle là ? Quelles transformations, amputations, adjonctions, dénaturations, régénérations a-t-elle subies, pourquoi et comment ? Ces questions et d’autres ont aujourd’hui un intérêt renouvelé du fait notamment des évolutions qui conduisent à tenter d’adapter le rapport commun à la connaissance et aux œuvres aux exigences des pratiques en fort développement du « questionnement du monde » (voir l’axe 3 ci-après).

Axe 3. Entre visite des œuvres et questionnement du monde

L’axe 3 renvoie à un processus majeur actuellement en cours : le changement encore mal appréhendé qui affecte le *paradigme de l’étude scolaire*. Il concerne ainsi un thème de recherche activement travaillé depuis plusieurs années, celui de la transition historique du paradigme classique de l’étude scolaire, fondé sur l’abord successif de savoirs rencontrés souvent *ex abrupto*, qu’une part essentielle du travail des didacticiens a jusqu’ici consisté à faire apparaître comme outils de réponse à des questions significatives, à un paradigme didactique en émergence, où, de façon idéal-typique, on part d’une question pour lui apporter réponse, sans préjudice des outils de tous ordres dont la fabrication d’une réponse à la question étudiée supposera la rencontre, l’étude, l’usage.

Le paradigme ancien et toujours « officiel » repose sur l’étude formelle des savoirs enseignés comme composés d’œuvres (mathématiques, littéraires, grammaticales, etc.) que l’on visite tour à tour, de façon généralement immotivée au plan praxéologique. L’épuisement actuel de ce *paradigme de la visite des œuvres*, dont le bon fonctionnement suppose une forme de docilité en voie de raréfaction, conduit depuis plusieurs décennies à l’émergence erratique de formes scolaires nouvelles, où les *questions* que l’on étudie se substituent aux œuvres que l’on visite. Dans ce *paradigme du questionnement du monde*, marqué notamment par les notions d’*enquête* (sur une question donnée) et de *parcours d’étude et de recherche* (PER) déterminé par une enquête concrète qu’il détermine en retour, les œuvres de la culture ne disparaissent pourtant nullement : elles se voient assigner un rôle fonctionnel plus authentique du point de vue praxéologique, qui oblige à étudier une œuvre donnée, en synergie avec d’autres œuvres, avec pour *finalité* espérée d’en tirer profit afin d’apporter une réponse appropriée, fût-elle partielle, à une question ou à un ensemble de questions (qui constitue alors un fragment du « programme » de l’étude). Cette évolution historique profonde, qui soulève un grand nombre de questions, est au centre d’un nombre important de travaux actuels en TAD qui trouvent là à être confrontés et mis en débat. Cet axe accueille notamment des présentations de travaux participant de l’étude critique de la notion d’*inquiry-based teaching* et de ses déclinaisons en divers pays (telle, dans le cas français, la notion « officielle » de *démarche d’investigation scientifique*).

Axe 4. Apports de la TAD à l’enseignement et à la diffusion des connaissances

L’axe 4 pousse en avant un ensemble de problèmes considérés en TAD comme cruciaux à la fois pour la société et pour la recherche en didactique : les problèmes qu’une société rencontre dans la conception et la réalisation de ses projets de diffusion des connaissances. Ce programme de recherche concerne dans son principe l’ensemble des institutions et des acteurs de tous niveaux, amateurs ou professionnels, qui prétendent concourir à diffuser la connaissance de complexes praxéologiques quels qu’ils soient.

Un tel programme a aujourd’hui pour noyau dur l’étude des professionnalités enseignantes, dans un cadre scolaire, universitaire ou professionnel, qui prend appui sur deux concepts principaux. Le premier concept clé est celui de *profession*, à condition de subsumer sous cette expression l’ensemble des acteurs de l’enseignement de telle ou telle discipline, c’est-à-dire, pour prendre le cas des enseignements scolaires, non seulement les professeurs eux-mêmes, qui forment le gros de la troupe, mais aussi les militants associatifs ou syndicaux ayant à connaître de cet enseignement, et encore les formateurs de professeurs, les inspecteurs, les responsables ministériels de l’enseignement considéré, à quoi s’ajoutent notamment les chercheurs en matière d’enseignement de la discipline. Le deuxième concept clé est celui de *problème de la profession*, qui renvoie aux difficultés rencontrées dans l’exercice même du métier ou identifiés par l’observation et l’analyse des conditions et des contraintes de ce métier et reconnus par au moins une partie de la profession comme des problèmes, c’est-à-dire comme des difficultés objectives (même si elles sont d’abord éprouvées subjectivement), dignes de la mobilisation collective de certaines ressources de la profession.

L’évolution actuelle du paradigme de l’étude scolaire, qui fait l’objet propre de l’axe 3 ci-dessus, ainsi que les variations parfois brutales de l’engagement des sociétés dans la diffusion organisée des connaissances apportent aujourd’hui à la recherche des problèmes difficiles et fréquemment inédits.

Presentación y agradecimientos

La teoría antropológica de lo didáctico (TAD) ocupa hoy un lugar central en la investigación en didáctica. Al igual que en los tres primeros congresos internacionales sobre la TAD, este cuarto congreso ha permitido reunir a los investigadores que trabajan o desean trabajar en el marco de TAD, con los objetivos siguientes: a) establecer un balance del conjunto de resultados y progresos de la TAD, balance que concierne tanto a la investigación fundamental como a los trabajos sobre el desarrollo de los sistemas de enseñanza y formación, b) elaborar un programa de investigación en torno a los problemas abiertos más relevantes, ya sea en relación con las dificultades que afectan a los sistemas educativos o con las que se refieren al desarrollo de la didáctica como disciplina científica, c) identificar y estudiar los problemas específicos planteados por la extensión a otros campos de las herramientas conceptuales y metodológicas de la TAD.

Este cuarto congreso reviste una importancia notable tanto por razones simbólicas como científicas. Por una parte, la concesión a Yves Chevallard de la medalla Hans Freudenthal (que le ha sido entregada en Seúl en el congreso ICME-12) marca de forma ejemplar el papel eminente de este programa de investigación en el panorama mundial de la investigación en didáctica de las matemáticas[1]. Por otra parte, el congreso va a permitir estudiar las condiciones y las limitaciones que determinan la crisis histórica actual que, en numerosos países, afecta a la enseñanza escolar y universitaria tanto de los saberes «clásicos» (que incluyen las matemáticas y las ciencias físicas y químicas) como de los saberes de constitución más reciente (como la museología, el desarrollo sostenible, etc.). Esta crisis coincide con una subestimación aparentemente sistemática, por parte de los responsables de

1. La medalla Hans Freudenthal es, con la medalla Felix Klein, la más alta distinción concedida por el ICMI (Comisión Internacional de Instrucción Matemática), que es una comisión especializada de la IMU (Unión Matemática Internacional). Ver http://www.cnrs.fr/insmi/spip.php?article270.

todos los niveles, de las aportaciones de la investigación en didáctica, que siguen siendo ampliamente desconocidas.

La organización de este congreso internacional se ha realizado bajo los auspicios de l'IUFM Midi-Pyrénées (Instituto universitario de formación de maestros Midi-Pyrénées), convertido recientemente en l'ESPE Toulouse Midi-Pyrénées (Escuela superior del profesorado y de la educación Toulouse Midi-Pyrenées), al que queremos expresar nuestro profundo agradecimiento por haber puesto a nuestra disposición los medios materiales y humanos que han permitido que el congreso se haya desarrollado en unas excelentes condiciones. También de forma más amplia, queremos dar las gracias a todas las instituciones educativas y científicas que, de una manera u otra, nos han prestado su apoyo científico, logístico o financiero : l'UMR Éducation, formation, travail, savoirs (EFTS) ; la comisión de investigación de l'IUFM, y en particular el polo de convergencia « Curricula, compétences, langage, évaluation, polyvalence, didactiques des disciplines, interdisciplinarité » (CCLEPoDI) ; el departamento « Métiers de l'enseignement et de la formation en sciences et technologies » (MEFST) de l'IUFM ; la universidad Toulouse Jean Jaurès y en especial su Consejo científico ; la asociación para la investigación en didáctica de las matemáticas (ARDM) ; la Región Midi-Pyrénées, integrada posteriormente en la Région Occitanie.

Queremos dar gracias de forma efusiva a los miembros del comité de organización, del comité científico y del comité de edición por sus aportaciones, ya que, sin su trabajo, el congreso no habría podido celebrarse y estas actas no se habrían publicado. Terminaremos con una mención especial a Jean-Pierre Bourgade, Christian Denux, Sandrine Galéa y Roland Pouget, que trabajaron sin descanso para que los participantes pudieran dedicarse plenamente a sus actividades científicas.

Gisèle Cirade
UMR EFTS
Université Toulouse 2 Jean Jaurès

Michèle Artaud
EA 4671 ADEF
Université d'Aix-Marseille

El congreso y sus ejes

El título del congreso –*Evoluciones contemporáneas de la relación a las matemáticas y a los otros saberes en la escuela y en la sociedad*– enfatiza las transformaciones que alteran actualmente el paisaje didáctico (escolar, universitario, profesional y otros), modificando la relación ordinaria al conocimiento y, correlativamente, la relación a los saberes enseñados. Los problemas que resultan de ello constituyen un desafío científico para la ciencia didáctica en la medida en que ésta, que se constituyó históricamente alrededor del orden escolar «clásico» (en su versión llamada en la época «moderna»), debe empezar a desmarcarse de él para poder continuar asumiendo su misión de elucidación teórica y para aumentar su capacidad de propuesta y regulación de las organizaciones didácticas.

Mediante el análisis de las condiciones y las restricciones que rigen lo didáctico y surgen en instituciones situadas en diferentes niveles de la realidad social (materia estudiada, pedagogía, escuela, sociedad), la TAD permite un acceso inclusivo a los fenómenos didácticos que se enmarcan tanto en la escuela, como en la formación y las actividades profesionales, las actividades de cultura y ocio, e incluso los marcos sociales de la vida cotidiana. Las temáticas que se han propuesto en este 4º congreso están articuladas en cuatro ejes principales que se describen a continuación.

Eje 1. Perspectivas de la TAD y relaciones con otros enfoques

Este eje tradicional tiene como objetivo permitir situar las aportaciones y las tendencias actuales de TAD con relación al «continente didáctico», en los planos nacional e internacional. Reclama un balance abierto y dinámico de las experiencias recientes y de las perspectivas de investigación, en múltiples áreas disciplinares.

Eje 2. El análisis praxeológico como herramienta para la ingeniería y el análisis didácticos

El eje 2 federa un cuestionamiento de tipo fundamental con uno de tipo formativo, tanto a nivel individual como en el de los colectivos de formación y de investigación: ¿qué sería, para el investigador, un modelo praxeológico de referencia (MPR) del saber del que se estudian las condiciones y restricciones de difusión? ¿Cómo determinar, construir y utilizar los MPR?

Por contraste con el acceso simplemente pedagógico de la difusión escolar de los conocimientos, la didáctica se ha definido desde siempre asignando un lugar decisivo, tanto en materia de análisis como de ingeniería didácticas, a las condiciones y las restricciones ligadas específicamente al contenido de enseñanza, es decir a las cuestiones estudiadas así como a las obras que abastecen su estudio. Este eje pone el énfasis en un movimiento doble. El primero consiste en articular el análisis praxeológico (por ejemplo, el análisis matemático) de la obra que está en juego con el trabajo de análisis o de ingeniería didácticas aludidos. En este primer movimiento, nos esforzamos por identificar la estructura y el funcionamiento de la obra estudiada para liberar las limitaciones que impone y para poner al día las condiciones que deja abiertas y que se podrán explotar. El segundo movimiento es, en cierta manera, inverso al anterior: la profundización en el análisis praxeológico de una obra implica el análisis didáctico de su génesis institucional a través de las transposiciones sucesivas que lo han afectado: ¿De dónde viene? ¿Por qué está allí? ¿Qué transformaciones, amputaciones, añadiduras, desnaturalizaciones, regeneraciones ha sufrido, por qué y cómo? Este cuestionamiento tiene hoy un interés renovado debido a las evoluciones que conducen a intentar adaptar la relación común al conocimiento a las exigencias del paradigma del «cuestionamiento del mundo» en fuerte desarrollo (ver el eje 3, a continuación).

Eje 3. Entre la visita a las obras y el cuestionamiento del mundo

El eje 3 remite al cambio todavía mal asumido que afecta al *paradigma del estudio escolar*. Se refiere a un tema de investigación trabajado activamente desde hace varios años, el de la transición histórica del paradigma clásico del estudio escolar, basado en el acceso sucesivo a los saberes, abordados a menudo bruscamente, que una parte esencial del trabajo de los didácticos ha consistido hasta aquí en hacer aparecer como herramientas de respuesta a cuestiones significativas, a un paradigma didáctico en emergencia, dónde, de forma ideal, se partiría de una cuestión para aportarle respuesta, sin perjuicio de las herramientas de todo tipo que deberán ser estudiadas y usadas en la fabricación de dicha respuesta.

El viejo paradigma y siempre «oficial» se basa en el estudio formal de los saberes enseñados como compuestos de obras (matemáticas, literarias, gramaticales, etc.) que se visitan por turnos, de modo generalmente inmotivado en el plano praxeológico. El agotamiento actual de este *paradigma de la visita de las obras*, cuyo funcionamiento supone una docilidad en vías de extinción, conduce desde hace varias décadas a la emergencia errática de nuevas formas escolares, donde las cuestiones que se estudian sustituyen a las obras que se visitan. En este *paradigma del cuestionamiento del mundo*, donde destacan las nociones de *investigación* (sobre una cuestión dada) y de *recorrido de estudio y de investigación* (REI), las obras de la cultura no desaparecen de ninguna manera: adquieren un papel funcional más auténtico desde el punto de vista praxeológico, que obliga a estudiar una obra dada, en sinergia con otras obras, con la *finalidad* esperada de sacarle provecho para proporcionar una respuesta adecuada, aunque parcial, a una cuestión o a un conjunto de cuestiones (que constituyen entonces un fragmento del «programa" de estudio). Esta evolución histórica profunda, que plantea un gran número de cuestiones, está en el centro de muchos de los trabajos actuales en la TAD, que encontrarán aquí el lugar para ser confrontados y debatidos. Este eje acoge particularmente presentaciones de trabajos que participen en el estudio crítico de la noción de *inquiry-based teaching* y sus adaptaciones en los distintos países (como, en el caso francés, la noción «oficial» de *démarche d'investigation scientifique*).

Eje 4. Aportaciones de la TAD a la docencia y la difusión de conocimientos

El eje 4 impulsa un conjunto de problemas considerados en la TAD como cruciales a la vez para la sociedad y para la investigación en didáctica: los problemas que una sociedad encuentra en el diseño y la realización de proyectos de difusión de los conocimientos. Este programa de investigación concierne en principio al conjunto de las instituciones y de los actores de todos los niveles, aficionados o profesionales, que pretenden contribuir a difundir el conocimiento de *cualquier tipo de sistemas praxeológicos*.

Este programa tiene hoy como núcleo duro el estudio de las profesiones docentes, en un marco escolar, universitario o profesional, que se apoya sobre dos conceptos principales. El primer concepto clave es el de *profesión*, considerada como el conjunto de los actores de la enseñanza de tal o cual disciplina, es decir, tomando el caso de las enseñanzas escolares, no sólo los profesores mismos, que forman al grueso de la tropa, sino también los militantes asociativos o sindicales que tienen que conocer esta enseñanza, y también los formadores de profesores, inspectores, responsables gubernamentales, etc., a quienes se añaden particularmente los investigadores sobre la enseñanza de la disciplina considerada. El segundo concepto clave es el de *problema de la profesión*, que remite a las dificultades encontradas en el ejercicio del oficio o identificadas mediante la observación y el análisis de las condiciones y de las restricciones de este oficio y reconocidas por al menos una parte de la profesión como problemas, es decir, como dificultades objetivas (incluso si se viven subjetivamente), dignas de la movilización colectiva de ciertos recursos de la profesión.

La evolución actual del paradigma del estudio escolar, que constituye el objeto propio del eje 3 anterior, así como las variaciones a veces brutales de la manera como nuestras sociedades se involucran en la difusión organizada de los conocimientos plantean actualmente problemas de investigación difíciles y frecuentemente inéditos.

Presentation and acknowledgements

Today, the Anthropological Theory of the Didactic (ATD) holds a prominent position in the didactics of mathematics and other disciplines as a research field. In the vein of the first three international congresses on the ATD, this conference has brought together researchers in didactics who work or wish to work within the framework of the ATD with the following objectives: a) to provide an overview of the results and advances of the ATD both as concerns fundamental research in didactics and the development of education systems and teachers' training systems, b) to develop a research programme around the most important issues relating to the development of education systems and the growth of didactics as a scientific discipline, and c) to identify and study the problems raised by the extension of ATD's conceptual and methodological tools to other fields of knowledge.

This fourth conference was of significant importance for symbolic as well as scientific reasons. On the one hand, the awarding of the Hans Freudenthal Medal to Yves Chevallard (awarded at ICME-12 in July of 2012) exemplarily marks the prominent role of this research programme in the world's panorama of the didactics of mathematics [1]. On the other hand, it helps promote didactic research on the conditions and constraints that explain the current historical crisis affecting secondary school and university mathematics as well as other disciplines in many countries. This crisis appears correlated with an apparently systematic underestimation of the contributions of didactic research, which therefore remain largely unknown beyond the restricted circle of specialists.

The organisation of this conference would have been impossible without the full support of the IUFM Midi-Pyrénées, now ESPE Toulouse Midi-

1. The Hans Freudenthal medal is, along with the Felix Klein medal, the highest distinction awarded by the ICMI (*International Commission on Mathematical Instruction*), a specific commission of IMU (*International Mathematical Union*).
See http://www.cnrs.fr/insmi/spip.php?article270.

Pyrénées [2], that we thank warmly for having made available to us facilities, personnel, and services of excellent quality. More broadly, we want to thank a number of academic and scientific institutions for their logistical, financial, and scientific support: the joint research unit (UMR) "Education, training, work, knowledge" [3]; the IUFM's research commission, in particular the convergence pole "Curricula, competences, language, assessment and evaluation, multi-skilling, subject didactics, interdisciplinarity" [4]; the IUFM's department of "Professions of science and technology teaching and training" [5]; the University of Toulouse-Jean Jaurès, particularly its Scientific Council; the Association for research in didactics of mathematics (ARDM, Association pour la recherche en didactique des mathématiques); the former administrative region Midi-Pyrénées, now a part of the region Occitanie (itself a part of the historical region Occitania).

This conference and its proceedings would not have existed were it not for the commitment and support of the organising committee, the scientific committee, and the editorial committee: we warmly thank all the members of these committees for their contributions and hard work. Last but not least, we owe a special mention to Jean-Pierre Bourgade, Christian Denux, Sandrine Galéa, and Roland Pouget, who constantly strived to allow all participants to freely dive into the world of ATD.

Gisèle Cirade
UMR EFTS
Université Toulouse 2 Jean Jaurès

Michèle Artaud
EA 4671 ADEF
Université d'Aix-Marseille

2. IUFM: Institut universitaire de formation des maîtres; ESPE: École supérieure du professorat et de l'éducation.

3. French acronym: EFTS (for "Éducation, formation, travail, savoirs").

4. French acronym: CCLEPoDI (for "Curricula, compétences, langage, évaluation, polyvalence, didactiques des disciplines, interdisciplinarité").

5. French acronym: MEFST (for "Métiers de l'enseignement et de la formation en sciences et technologies").

Conference and axes

The title of the conference – *Current developments of the relation to mathematics and other bodies of knowledge at school and in society* – refers to the transformations that are currently influencing the educational landscape (e.g. school, university, vocational training, and other didactic institutions) by changing the usual relation to knowledge and, accordingly, the relation to taught knowledge. The new or renewed problems resulting from these transformations pose a scientific challenge to didactic science insofar as this science, which came to life around the "classical" school organisation (in its version termed "modern"), must now evolve towards theoretically elucidating an increasing number of educative institutions, in particular with a view to efficiently advising them on didactic matters.

By analysing the conditions and constraints that govern the didactic and that exist in institutions located at different levels of society (discipline, pedagogy, school, society, etc.), ATD enables an inclusive approach to didactic phenomena, whether they occur in the school context, educational environment, or teacher professional development, in cultural or leisure activities, or even in the social context of everyday life. The themes of this 4th conference are articulated according to four main axes we introduce hereafter.

Axis 1. Perspectives in ATD, relations to other approaches

This traditional axis aims at locating the contributions and current trends in ATD within the "continent of the didactic", both nationally and internationally. This axis calls for an open and dynamic assessment of recent results and research perspectives, in several disciplinary domains.

Axis 2. Praxeological analysis as a tool for didactic analysis and engineering

Axis 2 puts together questionings of a fundamental kind with questionings in relation to professional training (at an individual level as well as at the level of training and research teams): given a body of knowledge and a researcher in didactics studying the conditions and constraints of dissemination of this body of knowledge, what would be a praxeological model of reference (PMR) for the researcher? How to determine, build and use such PMR?

In contrast with the simple pedagogical approach to knowledge dissemination at school, didactics has always been defined as giving a decisive importance (in didactic analysis as well as in didactic engineering) to conditions and constraints specifically related to the "didactic stake", that is to those conditions and constraints that are brought along with both the question under consideration and the works that instrument the study of this question. This axis stresses a double movement. The first aspect traditionally consists in relating the praxeological analysis (e.g. mathematical analysis) of the didactic stake to the didactic analysis or engineering in view. In this first movement, one tries to identify the structure and functioning of the work under study in order to find out which constraints it imposes and which conditions are left open and could be taken advantage of. The second movement, one might say, is in the opposite direction: deepening the praxeological analysis of a work makes necessary the didactic analysis of its institutional genesis through the several didactic transpositions it has undergone: where does this work come from? why has it appeared? which transformations, reductions, additions, denaturations, regenerations did it suffer, why and how? The interest of these and other questions is revived, in particular since recent developments lead to try to adapt the common relation to knowledge and works to the requirements of practices that are strongly emerging within the framework of the paradigm of "questioning the world" (see Axis 3).

Axis 3. From visiting works to questioning the world

Axis 3 refers to the major process currently underway: the still poorly understood change that affects the *school study paradigm*. Therefore, this axis is connected to a field of research that has been intensively explored for several years: the study of the historical transition from the classical school study paradigm, in which new bodies of knowledge are studied in quick succession, and often introduced without a genuine motive (so that an important part of didacticists' work up to now was to find out significant questions the study of which would transform such bodies of knowledge into tools, necessary to elaborate an answer to these questions) to an emerging didactic paradigm in which the ideal type situation is to start from a question and aim at building an answer to this question. In this paradigm, no limitation whatever is imposed a priori as regards the manifold tools that might be met, studied, used in order to elaborate an answer. The old and still "official" paradigm is based on the formal study of works (mathematical, literary, grammatical, etc.) that are visited in turn, in a way that is generally unmotivated at the praxeological level. The current exhaustion of this *paradigm of visiting works*, whose functioning requires from the students a form of docility of increasing scarcity, has led in the last decades to the erratic emergence of new school forms where the *questions* to be studied replace the works that used to be visited. In this *paradigm of questioning the world*, highlighted by the notions of *inquiry* (on a given question) and *study and research courses* (SRC) determined by a concrete investigation that it determines in turn, the works of culture do not disappear: they are assigned a more authentic functional role from a praxeological point of view, which requires studying a given work in synergy with other works, with the aim of providing a significant, though often partial, answer to a question or set of questions (which then constitute a fragment of the "programme" of the study). This profound historical development, which raises many questions, is at the centre of much current research within ATD. This axis particularly welcomes presentations of works involved in the critical study of the notion of inquiry-based teaching and of similar notions to be found in several countries (such as the "official" notion of *démarche d'investigation scientifique* [*scientific investigation approach*] in France).

Axis 4. Contributions of ATD to teaching and knowledge dissemination

Axis 4 promotes a set of problems that are considered of paramount importance in ATD, for both societies and didactic researchers: the problems a society is faced with in the course of conceiving and achieving projects of knowledge dissemination. This research programme basically deals with all sorts of institutions and agents of any level, amateur or professional, who mean to contribute to the dissemination of praxeological entities of all kind.

Today, the core of such a program is the study of the teaching professions, at school (general or vocational) or university. This study is based on two main concepts. The first key notion is that of a *profession*, providing one subsumes under this notion the whole set of agents that are involved in the teaching of such and such subject. For instance, in the case of school teaching, the profession is not only made of teachers, which nevertheless constitute the major part of the profession, but also of associative or union activists who have to deal with this teaching, and also teacher trainers, school inspectors, ministerial staffs responsible for this teaching, to which must be added researchers who study the problem of teaching the subject under consideration. The second key notion is that of a *problem of the profession*, which refers to the various difficulties one has to face in the practical work of teaching. These difficulties can be first felt as subjective, but they must be elaborated into objective difficulties whenever at least part of the profession has to face them. Then, observation and analysis of conditions and constraints of the profession should allow to identify these difficulties: only at this cost can they be perceived as worthy of a collective mobilisation of professional resources.

The current development of the school study paradigm, which is at the core of the above mentioned axis 3, as well as the sometimes brutal variations in societies' involvement in the organised dissemination of knowledge, bring to today's research hard and often new problems.

La TAD et son devenir : rappels, reprises, avancées

Yves Chevallard
EA 4671 ADEF, Université d'Aix-Marseille, France

Abstract. This presentation aims to specify and exemplify some new or older praxeological constituents of the anthropological theory of the didactic (ATD).

Resumen. Esta presentación intenta aclarar e ilustrar algunos conceptos, más o menos recientes, de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD).

Résumé. L'objet de cet exposé est de préciser et d'illustrer certains éléments praxéologiques plus ou moins récemment introduits en théorie anthropologique du didactique (TAD).

IV^e congrès international sur la TAD (Toulouse, 21-26 avril 2013)

Chevallard, Y. (2017). La TAD et son devenir : rappels, reprises, avancées. Dans G. Cirade et al. (Éds), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* (pp. 27-65). https://citad4.sciencesconf.org

1. La didactique, le didacticien gyrovague, le didactique

Dans ce qui suit, je voudrais proposer une présentation, nécessairement partielle, de la TAD pour qui s'y intéresserait sans en être encore un fin connaisseur. Depuis le troisième congrès, qui s'est tenu en janvier 2010 à Sant Hilari Sacalm (Catalogne), la TAD a évolué. Je présenterai donc certains des objets nouveaux ou renouvelés qui y sont apparus depuis. Mais je voudrais insister aussi sur ce qui n'a pas changé, sur ce qui est fondateur et reste, me semble-t-il, parfois assez mal compris ou utilisé.

Comme vous le savez, on peut présenter une théorie selon deux ordres au moins : d'une part, selon *l'ordre de découverte*, génétique, historique ; d'autre part, selon *l'ordre d'exposition*, où les matériaux élaborés dans le temps sont mis en ordre selon une logique d'exposition raisonnée, parfois éloignée des aléas de leur genèse – la référence est ici à ce que, pour les mathématiques, Georges Bouligand (1889-1979) appelait le *dualisme des problèmes et de la synthèse* (Bouligand, 1962). Dans ce qui suit, je vais m'efforcer de donner la priorité à un certain ordre d'exposition, sans m'interdire de mentionner divers aspects de leur genèse « historique ». Pour fixer un point de départ à cette histoire, je rappelle que le texte du livre *La transposition didactique*, dont la première édition paraît en 1985, fut écrit au printemps 1980 et présenté à la première école d'été de didactique des mathématiques, tenue en juillet de la même année. Je propose ci-après un récit panaché de plusieurs développements de la TAD, en insistant sur les points qui pourraient échapper à des nouveaux venus en la matière.

Ce que je souhaite mettre en avant, ce sont d'abord les *ruptures* avec certaines conceptions presque automatiques, rarement débattues, qui sont depuis longtemps établies dans le champ de ce que je nommerai *la* didactique, champ où s'affairent les didacticiennes et didacticiens *tout court*, que je désignerai génériquement par la lettre grecque ξ. Parler de *la* didactique, c'est là une première rupture, à la fois fondatrice et fondamentale, qu'institue la TAD. Contre quoi cette rupture se fait-elle ? Vous le savez : elle a pour ambition d'émanciper la recherche en didactique de *l'auto-enfermement disciplinaire*, phénomène dont les didacticiens ne sauraient bien sûr nier l'existence et qu'ils doivent au contraire étudier pour déterminer les *conditions et contraintes* qui le font exister et perdurer.

Il me suffira d'observer que, presque partout dans le monde, les *professeurs* – je ne parle pas des *chercheurs en didactique*, du moins tels que je les voudrais –, les professeurs, donc, semblent passionnément attachés à leur *tribu disciplinaire*. Parlant d'elle, ils disent *Nous* : *Nous, en histoire-géo, Nous, en biologie, Nous, en mathématiques*, etc. On retrouve là une attitude sans doute aussi vieille que l'humanité, mais qui n'est pas, selon moi, une loi éternelle – puisque la nature de l'espèce humaine, c'est la culture, la capacité de se réformer –, qui consiste à considérer que « nous, nous sommes *les* êtres humains », contrairement aux autres, dont la nature est douteuse – ils sont, au mieux, des « barbares », comme disaient les Grecs. Je voudrais adopter cependant une formulation plus douce, en usant de la question que voici : *Qu'est-ce qui* compte *pour vous ?* La réponse d'un professeur sera : « Ce qui compte, c'est *ma* discipline. » « Et les autres disciplines ? » « Cela compte beaucoup moins. Ce n'est pas mon affaire. Et je m'interdis même d'avoir un regard sur elles en tant que telles. D'ailleurs, elles existent à peine pour moi, je l'avoue. »

Pour mettre en évidence cet habitus culturel qui imprègne l'activité d'enseignement, qui semble aujourd'hui encore être une loi d'airain, et pour suggérer que l'on peut s'en dégager, je vais introduire un personnage clé que j'appelle le *didacticien gyrovague* et que je note ξ_γ (l'indice γ est la première lettre du grec *gyros*, cercle). Le mot *gyrovague*, qui peut être adjectif ou substantif, désignait il y a bien longtemps un moine errant, qui ne se rattachait à aucun monastère particulier mais allait d'un monastère à un autre sans se plier à aucune règle prédéterminée. Les moines gyrovagues avaient mauvaise réputation et le gyrovaguisme fut frappé d'interdiction dès 451 par le concile de Chalcédoine. Le didacticien gyrovague ξ_γ est, par définition, un didacticien ξ qui ne déclare se rattacher à aucune discipline *de façon exclusive* : un didacticien disciplinairement vagabond, et non pas disciplinairement « vociférant ». Imaginons donc (il s'agit bien sûr d'une fiction) un didacticien qui, pendant toute une époque de sa vie didacticienne, ferait le matin de la recherche en didactique de la théorie des graphes et l'après-midi de la recherche en didactique de l'épigénétique ; qui, à une autre époque, ferait de la didactique de la musique le matin, de la didactique de la thermodynamique l'après-midi. Et ainsi de suite. (Je vais revenir sur ces formulations, qui relèvent *a priori* du paradigme classique *de la visite des* *œuvres*.) Bien entendu, ξ_γ ne saurait guère reprendre l'antienne des professeurs tels que je les ai dépeints (sans nul doute injustement, pour certains d'entre eux) et dire *Nous, en thermodynamique*, *Nous, en musique*, etc., toutes expressions qui, certes, ne sont pas dénuées de sens mais que je regarde, ici, comme des symptômes d'une tentation communautariste, voire obsidionale. Didacticien vagabond, ξ_γ est peu disert sur lui-même ou sur sa tribu supposée (qui est celle… des didacticiens, tout court), mais non point sur ses travaux, bien sûr, même s'il ne les exhibe pas à la gloire de telle ou telle discipline. À l'instar du moine « passant de monastère en monastère, sans être membre d'aucun » (ainsi que le décrit l'article « Gyrovague » de *Wikipédia*), le didacticien gyrovague passe de discipline en discipline sans être affilié à aucune de façon totale, toujours là où on le voit, mais aussi toujours un peu ailleurs.

Qu'est-ce qui fonde le scénario précédent ? C'est la notion même qui, en TAD, autorise à parler de *la* didactique, de la *science* didactique : à savoir la notion *du didactique*. S'ils l'entendent dans toute sa généralité, comme il se doit, la définition que je donnerai du didactique paraîtra à certains effroyablement étendue ; mais c'est là un point qui me semble n'avoir jamais été discuté sérieusement, comme la plupart des autres points clés que je voudrais aborder ici. On parlera donc du didactique comme on parle du politique, de l'économique, du sexuel, du religieux, etc. *Le* didactique est une dimension essentielle, une condition *sine qua non* de la vie des sociétés humaines, qui se donne à voir – ou, plus souvent, à entrevoir – chaque fois qu'une *instance* – une *personne* ou une *institution* – fait quelque chose (ou *envisage* de faire quelque chose, ce qui est déjà faire quelque chose) pour que quelque instance « apprenne » quelque chose. Bien entendu, la première instance mentionnée peut être la même que la seconde : *l'autodidactique* est une composante ubiquitaire du didactique. Le didactique est constitué par des ensembles de *gestes didactiques*, expression dans laquelle « geste » doit être pris en un sens très large : est geste didactique tout ce que l'on fait pour aider quelque instance à apprendre une certaine « chose ». L'étude de quelque chose (je remplacerai bientôt cette expression par d'autres mots) est tissée de tout un ensemble de gestes didactiques. Un geste didactique est un geste d'étude qu'une instance peut accomplir au profit d'une autre instance ou d'elle-même. Ainsi parlera-t-on d'un geste *d'aide à l'étude*, d'un geste *de* *direction d'étude*, d'un geste *pour* l'étude, etc. Tout cela noté, le « camp de base » du didacticien travaillant dans le cadre de la TAD comporte notamment ce dont je partirai moi-même maintenant – la notion clé de *système didactique*.

2. La notion de système didactique

La notion de *système didactique* est présente depuis toujours en TAD. Je l'écris depuis longtemps ainsi : $S(X ; Y ; ♥)$. Le symbole ♥ désigne ce qui doit être étudié pour être « appris » : c'est l'*enjeu didactique* au sein du système didactique considéré. La lettre X désigne par définition l'ensemble des *étudiants*, x, qui peuvent être des petits humains de trois ans ou des anciens d'au-delà de quatre-vingts. La lettre Y, elle, désigne l'ensemble des *aides à l'étude*, qui peuvent être des professeurs (« de ♥ ») ou autres types d'assistants de toutes sortes.

Il existe une asymétrie entre X et Y. L'ensemble Y peut être vide : $Y = \varnothing$. Le système didactique devient alors un système *autodidactique*, $S(X ; \varnothing ; ♥)$, qu'il vaut mieux noter comme on vient de le faire – explicitement – pour marquer que l'intervention d'un aide à l'étude y reste toujours possible. Le cas de X est différent : un système didactique suppose au moins *un* x et *un* enjeu didactique ♥, situation qu'on peut écrire ainsi : $S(x ; \varnothing ; ♥)$.

Je noterai ici que, en TAD, on appelle génériquement *exposé* tout discours oral ou écrit. Un exposé peut être une simple phrase de quelques mots ou un long traité de cinq cents pages. On aura remarqué que je ne précise pas ce qu'un tel discours « expose », ce dont il « s'occupe ». Bien entendu, on pourra parler d'un exposé *sur* ♥, mais celui-ci sera presque toujours, *volens nolens*, un exposé sur d'autres entités aussi. Cela précisé, imaginons un y_0 qui, seul, écrit un exposé E sur ♥ (y_0 peut être un professeur, un auteur de manuel ou d'une feuille de travail à mettre en ligne, etc.) ; il a en tête un certain « public » d'étudiants $\mathscr{X}$, c'est-à-dire qu'il vise des systèmes didactiques de la forme $S(X ; Y ; ♥)$ où $X \subset \mathscr{X}$ (avec, peut-être, $Y = \{y_0\}$). Mais son exposé écrit E sera simplement un élément éventuel du *milieu pour l'étude* M constitué par un éventuel système didactique $S(X ; Y ; ♥)$, qui, peut-être, n'existera jamais. Le processus de production du milieu M s'écrit classiquement $S(X ; Y ; ♥) \hookrightarrow M$, avec $M = \{E, \ldots\}$. Cela s'éclairera quand j'en viendrai à la notion de *schéma herbartien*. Mais d'autres points clés doivent maintenant être soulignés.

Un premier point sur lequel il convient d'insister fortement est que, *a priori*, la notion de système didactique couvre *tous les cas imaginables* où des *x* doivent agir pour (mieux) connaître un « quelque chose », ♥, et peuvent éventuellement disposer pour cela de l'aide d'un ou plusieurs *y*. Si, dans une ville inconnue, une personne *x* se trouvant à tel endroit sollicite un passant *y* pour qu'il lui indique où se trouve la pharmacie la plus proche (♥), il se forme ainsi, pendant quelques secondes seulement, un système didactique $S(x\ ;\ y\ ;\ ♥)$ que j'appelle *éphémère*, système didactique dont le fonctionnement n'aboutit parfois à aucun apprentissage visible (parce que *y* ne connaît pas suffisamment ♥ par exemple). Si, dans une entreprise, un nouvel employé interroge un ancien sur le fonctionnement de la machine café, il y a, de même, formation puis dissolution d'un système didactique éphémère. Le domaine de pertinence de la notion de système didactique est en fait *l'espace social et institutionnel tout entier* – sans quoi nous ne serions pas dans une théorie *anthropologique* du didactique.

Il ne faut donc pas penser que la notion de système didactique est seulement une manière plus ampoulée de désigner une « classe scolaire ». Ce serait là une double erreur théorico-technologique. Une classe scolaire, en effet, *n'est pas* en elle-même un système didactique. Imaginons le cas suivant : une certaine classe est faite d'un groupe *X* d'élèves, d'une équipe *Y* de professeurs et d'un programme d'études *P*. Je désigne cette classe par $C(X\ ;\ Y\ ;\ P)$. Cette classe est une *matrice* qui engendre des systèmes didactiques $S(X\ ;\ Y\ ;\ ♥)$, où $♥ \in P$, en sorte qu'une classe héberge ainsi, en règle générale, au sein même d'une « discipline » déterminée (mathématiques, biologie, etc.), *plusieurs* systèmes didactiques actifs au cours d'une certaine période de temps. Mais il convient maintenant de préciser une autre notion centrale de l'anthropologie cognitive et didactique.

3. La notion de praxéologie

Le caractère *anthropologique* de la TAD trouve l'une de ses expressions dans un principe sur lequel il est indispensable d'insister. Alors que, sur la foi de ce qu'en disent les institutions d'enseignement, la didactique « classique » prend la supposée « spécificité » des enjeux didactiques comme un *donné*, en TAD cette *différence spécifique* doit être dégagée d’un *genre prochain* et même – pour emprunter ici à l’analyse « aristotélicienne » – d’un genre *lointain*[1]. Il convient donc de se donner les moyens d’analyser *de façon générique* les enjeux didactiques possibles. À cette exigence répond la notion cardinale de *praxéologie*, que je rappelle rapidement.

Un postulat fondateur de la TAD est que toute activité humaine peut se décomposer en une succession de *tâches* t_1, t_2, …, t_n de certains *types* T_1, T_2, …, T_n. Si vous pensez détenir un contre-exemple à ce principe, c’est certainement que vous ne comprenez pas la notion de type de tâches ou, plus largement, de *genre* de tâches. Un genre de tâches est quasi toujours repérable, dans une langue donnée, par un *verbe d’action*, tels que *marcher*, *chanter, hurler, pleurer, calculer, dessiner*, *mentir*, etc. (Bien entendu une langue donnée n’a pas nécessairement de verbe pour nommer *tout* genre de tâches que le chercheur ξ pourra y observer et qu’il souhaiterait nommer.) Par rapport à un tel *genre* de tâches, un *type* de tâches suppose en outre un type d’*objet* qui complète la description de l’action : « dessiner *un triangle équilatéral* » est un type de tâches *T*, « marcher jusqu’à *la pharmacie la plus proche* » en est un autre, *T’*, etc. En revanche, « dessiner tel triangle équilatéral » ou « marcher jusqu’à telle pharmacie » sont des *tâches t* et *t’* particulières, respectivement des types *T* et *T’* : on dit que ce sont des *spécimens* des types de tâches *T* et *T’*. La confusion est, hélas ! fréquente et dommageable entre *tâche* et *type de tâches* : il convient de s’en garder soigneusement.

On a ainsi la première composante d’*une* praxéologie : un *type de tâches T*. Un deuxième postulat de la TAD est que l’accomplissement de tâches *t* d’un type donné *T* suppose la mise en œuvre d’une certaine *technique*, notée généralement par la lettre grecque τ (tau ; en grec ancien, τέχνη désigne un art, un savoir-faire, un métier), c’est-à-dire la mise en jeu d’une certaine « manière de faire ». Toute technique doit être *construite*, aucune n’est entièrement « donnée » par la nature, même si aucune n’est construite *ex nihilo*. Ce postulat va contre la *naturalisation* de l’activité humaine, soit le fait de regarder au moins certaines actions comme « naturelles », ayant un caractère de « naturalité », ne devant rien à la culture. Avec d’autres

1. Exemple traditionnel : l’homme est un *vivant* – genre lointain –, c’est un *animal* – genre prochain – et c’est un être *raisonnable* – différence spécifique.

anthropologies, la TAD pose que « la nature de l'homme, c'est la culture » et que l'essence de la condition humaine, c'est *l'inachèvement*. Ce qu'on nommera *l'équipement praxéologique* d'une personne ou d'une institution, soit le complexe des praxéologies mobilisables par cette personne ou cette institution, est entièrement à construire, à déconstruire, à reconstruire. La construction est, si je puis dire, un problème ordinaire et vital ; déconstruction et reconstruction sont parfois forcées, mais trop souvent négligées : c'est là un des aspects de ce que j'ai appelé autrefois *adultisme* – le fait de se croire « achevé », « parachevé », sinon parfait, et donc en pratique incapable… d'apprendre davantage. (On peut, hélas ! être adultiste sans être adulte, à un âge encore tendre.)

En ce point, nous disposons déjà de la partie d'une praxéologie qu'on appelle la *praxis*, ou bloc *praxique*, noté $\Pi = [T \,/\, \tau]$. Un bloc praxique correspond à peu près à ce que, dans la langue courante, on nomme un « savoir-faire ». Mais voici un autre postulat anthropologique encore : un bloc praxique ne saurait vivre longtemps à l'état isolé. À la *praxis* vient s'ajouter un *logos*, un bloc *gnosique* (j'emploie cet adjectif car l'adjectif *logique* est déjà « pris »), disons « un bloc de *logos* », de parole raisonnée. De quoi ce bloc est-il fait ? Tout d'abord, d'un discours dit *technologique*, soit d'une *technologie*, c'est-à-dire d'un discours (-*logie*) sur la technique (*techno*-). On note la technologie de la technique τ par la lettre grecque θ (thêta), en sorte que le bloc du *logos* s'écrira ainsi : $\Lambda = [\theta \,/\, \ldots]$. La question de la technologie comporte un aspect paradoxal (on verra qu'il en va de même pour la quatrième composante, la *théorie*, notée, elle, Θ) : d'une part, la composante technologique est souvent quasi inexistante, évanescente ; d'autre part, lorsqu'elle apparaît ainsi manquante ou inaudible, il y a le plus souvent *génération « spontanée »* d'un succédané personnel ou institutionnel de technologie, « bricolé » sous l'influence d'une théorie également « spontanée » et « bricolée », qui permet aux instances humaines de « donner du sens » à ce qu'elles font, c'est-à-dire à la mise en œuvre de la technique τ. La technologie θ a en effet pour fonction de *justifier* la technique τ, de la rendre *intelligible* et, dans certains cas même, de permettre de *produire* cette technique – qui naît alors de ce qui deviendra bientôt sa technologie.

Pour illustrer certains aspects de ce qui précède, je prends un exemple simple. Dans un ouvrage intitulé *Tout le programme de 6^e^* (2002), qui résume sous formes de fiches, à l'intention des élèves de 6^e, les connaissances que ceux-ci devront acquérir, une fiche est consacrée au type de tâches « Comparer deux nombres décimaux ». En voici l'intégralité du contenu :

> **Comparer des nombres décimaux**
>
> ■ De deux nombres décimaux, le plus grand est celui qui a la **plus grande partie entière**.
>
> ■ Si les parties entières sont égales, on compare les parties décimales, **décimale par décimale**.
>
> On compare les chiffres des dixièmes puis, s'ils sont égaux, les chiffres des centièmes, etc.
>
> Comparaison de 8,1**6**9 et 8,1**4**0 23 :
>
> 6 > 4 donc 8,169 > 8,140 23.
>
> ■ On peut aussi comparer les **parties décimales globalement**.
>
> On commence alors par réécrire les nombres avec le même nombre de décimales
>
> Comparaison de 2,01 et 2,013 : 2,01 = 2,010
>
> Comparer 2,**010** et 2,**013** revient à comparer 10 et 13.
>
> 10 < 13 donc 2,01 < 2,013. (p. 58)

Il y a là *deux* techniques, τ_1 et τ_2. L'une et l'autre semblent viser notamment à faire que les élèves puissent comparer deux décimaux sans commettre le type d'erreur qui consiste à affirmer que, par exemple, 7,102 > 7,98, cette erreur résultant d'une technique erronée qui consiste à comparer les parties fractionnaires comme s'il s'agissait de nombres entiers : 102 > 98, donc…

La technique τ_1 est présentée à travers un énoncé *technologique* θ_{11}, à savoir le « théorème » (non démontré ici) : « De deux nombres décimaux, le plus grand est celui qui a la *plus grande partie entière*. » De cet énoncé on déduit un premier geste *technique* : si l'on considère par exemple les deux nombres 7,102 et 9,01, on examine et on compare les parties entières, 7 et 9, et l'on conclut (en vertu du principe énoncé) que l'on a 7,102 < 9,01. Notons au passage que ce geste technique suppose la réalisation d'une tâche du type « Comparer deux nombres *entiers* » et donc la disponibilité d'une technique pour ce faire. C'est là un exemple d'un phénomène très général, la *dialectique entre types de tâches et techniques*.

La technique τ_1 déduite de l'énoncé ne permet pas, cependant, de comparer deux nombres tels que 7,102 et 7,98. La suite du texte précise donc les gestes techniques à accomplir lorsque les parties entières des deux nombres sont identiques ; rappelons-la :

■ Si les parties entières sont égales, on compare les parties décimales, **décimale par décimale**.

On compare les chiffres des dixièmes puis, s'ils sont égaux, les chiffres des centièmes, etc.

Comparaison de 8,1**6**9 et 8,1**4**0 23 :

6 > 4 donc 8,169 > 8,140 23.

Ici, pourtant, point de technologie θ_{12} ! En d'autres termes, la praxéologie *mathématique* attendue se réduit à un bloc praxique augmenté d'un « morceau » de technologie (à savoir θ_{11}). À nouveau, on a là un phénomène très général : l'*incomplétude* des praxéologies – en mathématiques et ailleurs – qui circulent dans une société donnée, dans une institution donnée, à un moment donné.

Ajoutons qu'une technique peut n'avoir qu'une *portée* limitée – elle peut ne réussir que sur *quelques* tâches du type considéré –, et qu'elle peut être en outre fortement génératrice d'*erreurs* chez certains publics d'utilisateurs, notamment (mais pas seulement, certes) parce qu'elle n'est pas suffisamment *intelligible* pour ces utilisateurs. Bref, une praxéologie est une réalité qui a, en moyenne, de faibles chances d'être de « bonne qualité », de se montrer « à la hauteur » de ce qui est attendu : anthropologiquement, ce type de faits, encore, est *massif*.

Que serait, ici, une technologie *mathématique* point trop lacunaire ? Voici une proposition :

1) les écritures décimales a = 3,46… et b = 3,45… (par exemple) désignent respectivement les nombres sommes

$$a = 3 + \frac{4}{10} + \frac{6}{100} + \ldots \text{ et } b = 3 + \frac{4}{10} + \frac{5}{100} + \ldots\ ;$$

2) le nombre somme $a^* = 3 + \frac{4}{10} + \frac{6}{100}$ est (à l'évidence) strictement supérieur au nombre somme $b^* = 3 + \frac{4}{10} + \frac{5}{100}$;

3) les sommes « restes » (notées ci-dessus + … dans l'écriture de a et de b) sont toujours *strictement inférieures* à $\frac{1}{100}$ et ne peuvent donc pas modifier le résultat obtenu par la comparaison de a^* et b^* : a et b sont donc rangés dans le même ordre que a^* et b^*.

Notons que, en n'explicitant pas cette technologie (ce qui est le cas de l'ouvrage cité), on *rate* un phénomène mathématique essentiel : celui invoqué par l'énoncé 3) ci-dessus. Même si on suppose que le nombre décimal $b = 3{,}45\ldots$ s'écrit en fait $b^\# = 3{,}459999\ldots 9$, aussi longue que soit la suite *finie* des 9, on n'arrivera pas à « rattraper » $a = 3{,}46$ c'est-à-dire à ajouter 0,01. On voit au passage que la technologie que je viens de proposer est elle-même *lacunaire* ; dans le cadre mathématique classique, il faudrait la compléter par le calcul que voici, où n est la longueur de la suite de décimales 9 envisagée :

$$\frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} + \ldots \frac{9}{1000\ldots 0} = \frac{9}{1000}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots + \frac{1}{10^{n-3}}\right)$$

$$= \frac{9}{1000}\,\frac{1 - \frac{1}{10^{n-2}}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{9}{1000}\,\frac{10 - \frac{1}{10^{n-1}}}{9} = \frac{1}{1000}\left(10 - \frac{1}{10^{n-1}}\right) < \frac{10}{1000} = 0{,}01.$$

On reviendra sur l'autre technique – la technique τ_2 – proposée aux élèves (et à leurs parents). La quatrième composante d'une praxéologie, je l'ai dit, est la composante *théorique* Θ (thêta), de sorte que le bloc du *logos* s'écrit $\Lambda = [\theta / \Theta]$ et qu'une praxéologie s'écrit maintenant :

$$\wp = \Pi \oplus \Lambda = [T / \tau] \oplus [\theta / \Theta] = [T / \tau / \theta / \Theta].$$

Il est bon de considérer que, quelque incomplète qu'elle paraisse, toute praxéologie engagée dans une action humaine comporte bien ces quatre composantes, et que celles-ci sont actives ou peuvent, dans certaines circonstances, le devenir. De même qu'il faut souvent rechercher la technologie « spontanée », la transformer, la rectifier – par exemple pour la rendre conforme à certains canons disciplinaires –, il en va de même avec « la théorie ». Je dois surtout souligner que, comme la technologie, la théorie ne répond pas à des canons uniques, ceux « des sciences » par exemple : chaque institution, chaque personne peut, de fait, avoir ses propres canons. Un enfant de trois ans a, lui aussi, sa « théorie » de ce qu'il fait… On va voir que les énoncés « théoriques » portent bien leur nom, en cela que, en règle générale, ils sont d'allure plus abstraite, plus générale, bref, d'allure « théorique ».

Je reprends ici l'exemple de la comparaison des nombres décimaux. Que sont les « théories » cachées dans le texte si bref offert à ses lecteurs par l'ouvrage cité plus haut ? Je rappelle d'abord la partie du texte qui se rapporte à la deuxième technique, τ_2 :

> ■ On peut aussi comparer les **parties décimales globalement**.
>
> On commence alors par réécrire les nombres avec le même nombre de décimales
>
> Comparaison de 2,01 et 2,013 : 2,01 = 2,010
>
> Comparer 2,**010** et 2,**013** revient à comparer 10 et 13.
>
> 10 < 13 donc 2,01 < 2,013.

Voici d'abord ce que serait ici un discours technologique proche des canons classiques de la discipline mathématique :

> 1) les écritures décimales a = 3,407 et b = 3,41 (par exemple) désignent respectivement les fractions successives suivantes :
>
> $$a = \frac{3407}{1000} = \frac{34070}{10000} = \frac{340700}{100000} = \ldots \text{ et } b = \frac{341}{100} = \frac{3410}{1000} = \frac{34100}{10000} = \ldots\ ;$$
>
> 2) de deux fractions ayant le même dénominateur, la plus grande est celle qui a le plus grand numérateur ; il en résulte que, en l'espèce, on a
>
> $$a = 3{,}407 = \frac{3407}{1000} < \frac{3410}{1000} = 3{,}41 = b.$$

On sent bien que les deux techniques τ_1 et τ_2 découlent, *in fine*, de deux *théories* distinctes des nombres décimaux. Mais, bien entendu, celles-ci ne sont pas, ici, explicites : elles ne se donnent à voir que dans les « symptômes » que sont les techniques et les rares éléments technologiques qu'il nous est permis d'apercevoir. Voyons rapidement ce que disent les deux théories Θ_1 et Θ_2 auxquelles renvoient les deux systèmes technico-technologiques que l'on a vus. Pour cela, commençons par la seconde, soit Θ_2. Pour comprendre ce qui se passe, considérons l'extrait suivant d'un manuel ancien, le *Cours abrégé d'arithmétique* de Carlo Bourlet (1922) :

> **Règle pour lire un nombre décimal écrit**. – *Pour lire un nombre décimal, on énonce d'abord la partie entière qu'on fait suivre du mot* **entiers** *ou* **unités***, puis la partie décimale, comme s'il s'agissait d'un nombre entier, en la faisant suivre du nom des unités que représente le dernier chiffre décimal*.

> Par exemple :
>
> 4,075 se lit : *quatre unités soixante-quinze millièmes* ;
>
> 25,00317 se lit : *vingt-cinq unités trois cent dix-sept cent-millièmes*.
>
> Remarque. – Dans la pratique, on emploie quelquefois un langage *très incorrect*, mais plus expéditif, en énonçant d'abord la partie entière suivie du mot *virgule*, puis les zéros et la partie décimale.
>
> Ainsi : 2,15 se lira : 2, *virgule*, 15 ; 4,075 se lira : 4, *virgule*, *zéro*, 75 ; 25,00317 se lira : 25, *virgule*, *zéro*, *zéro*, 317. (pp. 177-178)

Tout d'abord, on voit que, si on lit les écritures 7,102 « sept unités cent-deux *millièmes* » et 7,98 « sept unités quatre-vingt dix-huit *centièmes* », on ne saurait conclure immédiatement que le premier est supérieur au second ! Pour pouvoir conclure, il faut *relire* ces nombres respectivement « sept unités cent-deux *millièmes* » et « sept unités neuf cents quatre-vingts *millièmes* » : cela fait apparaître aussitôt que le second est supérieur au premier, parce que 980 est supérieur à 102. On retrouve ainsi la technique τ_2 ! Cela noté, venons-en aux deux théories Θ_1 et Θ_2 qui, subrepticement, s'activent derrière le théâtre d'ombres des techniques. Entre dire « deux unités quinze centièmes » et dire « deux virgule quinze », il y a une déchéance conceptuelle à la fois essentielle et banale : on passe d'un nombre entendu comme *mesure* (par exemple « deux mètres quinze centimètres », « deux litres quinze centilitres », etc.) à un nombre *formel*, c'est-à-dire ramené à n'être qu'une suite de symboles. On passe d'un abord « sémantique » du nombre décimal à une approche « syntaxique », et cela sous l'effet d'une « paresse » collective en matière d'oralisation, que souligne Carlo Bourlet lui-même. C'est de la même façon que, en français, l'écriture 2^3 se lit « deux à la puissance trois » (sémantique) ou, par déchéance formelle, « deux exposant trois », etc. Semblablement, dans un livre intitulé *L'anglais des sciences*, dû à Marc Défourneaux (1994), on lit ceci à propos de la notation $10{,}000 = 10^4$:

> Ten thousand is ten raised to the power four *(or)* ten raised to the fourth power.
>
> But the words "raised" and "power" are usually omitted, so the expression becomes "ten to the four" *(or)* "ten to the fourth". (p. 201)

À propos de l'égalité $p = a^n$, on lit de même :

> More generally, *p* equals *a* to the *n (or) a* to the *n*th, provided *n* is a whole exponent. (p. 201)

Enfin, s’agissant de l’égalité exp $u = e^u$, l’auteur note :

> If *u* is not an integer, then exponential *u* equals e to the *u* (*but not* to the “*u*th”). (p. 201)

Pour compléter ce qui précède, je voudrais répondre ici, partiellement au moins, à une question qui a été posée par une participante et que je retranscrirai ainsi : pourquoi parler de *technique* et pas, comme le font les manuels de mathématiques et d’autres textes, de *méthodes* ? Il y a à cela plusieurs raisons. La première – mais ce n’est pas la seule – est à vrai dire la nécessité de se démarquer du langage ordinaire des classes, afin d’éviter autant que faire se peut des identifications trompeuses qui gênent le travail de conceptualisation que doit réaliser le chercheur. Cela suffirait déjà, à mes yeux, pour ne pas employer le mot *méthode*. Mais il est d’autres raisons pour éviter ce mot, devenu dominant dans le corpus mathématique enseigné : en fait, il désigne moins une technique (au sens de la TAD) qu’une *technologie*. Dans le *Trésor de la langue française informatisé* (ATILF, 2001), à l’entrée « Méthode », on lit ainsi :

> *Méthode infinitésimale*. Démarche rationnelle explorant le domaine du calcul différentiel et du calcul intégral. *L’algorithme de Leibnitz, qui prête à la méthode infinitésimale le secours d’une notation régulière, (...) a changé la face des mathématiques pures et appliquées* (COURNOT, *Fond. connaiss.*, 1851, p. 308)

La même notice du *TLFi* mentionne de même, pour la philosophie, la *méthode bergsonienne d’intuition* ou la *méthode phénoménologique*. Pour les sciences, elle cite semblablement la *méthode expérimentale* ou la *méthode statistique* – qui sont, encore une fois, des technologies engendrant de nombreuses techniques. Il est bon en outre de connaître quelque peu l’origine du mot *méthode*. J’emprunte ici au *Dictionary of word origins* de John Ayto (1990) :

> **method** [16] *Method* comes via French *méthode* and Latin *methodus* from Greek *méthodos*, which meant ‘pursuit’. It was a compound noun formed from the prefix *metá*- ‘after’ and *hodós* ‘way, journey’ (found also in English *episode*, *exodus,* and *period*). ‘Pursuit’ of a particular objective gradually

> developed into a 'procedure for attaining it,' the meaning which the word had when it reached English.

On saisit peut-être mieux ainsi l'ambition dénotative du mot, qui, sans doute, s'est réduite – car il est vrai que bien des méthodes prétendues sont, en mathématiques du moins, des techniques – mais qui reste porteur d'une ambiguïté : désigne-t-il une technique ou une technologie ? Nous avons vu que la confusion est dommageable (au détriment d'abord de la technologie, ensuite de la praxéologie tout entière). J'ajoute que le choix de *technique*, mieux fondé dans son sens premier, plus modeste, a du même coup cet avantage paradoxal de pâtir dans la langue courante d'un discrédit, sinon d'un mépris, qui perdure : « méthode » fait plus chic que « technique » et parler de technique ainsi qu'on le fait en TAD suppose donc qu'on emploie ce mot de façon « militante », je veux dire pour de fortes raisons conceptuelles, en dépit de connotations culturelles dépréciatives ou du moins peu flatteuses.

Une autre participante s'inquiète de la relation entre *technique* et *procédé*. Dans la langue courante, sans doute, il n'y a guère de différence. Mais « procédé » porte en lui la même image que *mét-hode*, celle de s'avancer (*pro-cedere*), de progresser, avant d'acquérir le sens d'*opérer*, d'*agir de telle manière*. *Procédé* est bien sûr apparenté à *processus* et à *procédure*. Je n'ai jamais envisagé de choisir ce mot à cause des liens qu'entretient *procédure* avec un psychologisme dénaturant (les « procédures des élèves » sont souvent des techniques *in statu nascendi*, des ébauches ou des embryons de techniques). Un tel choix, au reste, aurait conduit à parler de *procédologie*. Bien entendu, *procédé* a l'avantage sur *méthode* d'être, à l'instar de *technique*, moins prétentieux, comme le note Arthur S. Reber dans son *Dictionary of psychology* (1985) à l'entrée *Procedure* :

> **Procedure** Generally, any technique for controlling the relevant factors for the purpose of examining some phenomenon.
>
> The term is similar in use to ⇨ *method* but with the connotation that a procedure is a more concrete manipulation of specific conditions whereas a method generally suggests a broader orientation. For example, the phrase *experimental procedure* refers to the specific techniques used in a specific experiment while *experimental method* refers to a general class of techniques used in doing experimental work. (p. 577)

Il fallait, de toute façon, choisir un terme unique pour construire une théorie : la construction d'un concept suppose le « marquage » d'un terme sur lequel le travail de conceptualisation va porter et non le jeu des substitutions permis (et encouragé) par la culture ambiante.

4. Analyse didactique et analyse praxéologique : cadre général

Dans l'échelle des niveaux de codétermination didactique, le bas de l'échelle se présentait jusqu'ici à peu près comme suit :

…
↓↑
École
↓↑
Pédagogie
↓↑
Discipline

La discipline était elle-même scindée en *sujets*, *thèmes*, *secteurs* et *domaines* – je vais revenir là-dessus. Cette présentation de l'échelle avait été bâtie à l'origine pour la formation des professeurs, à qui elle s'adressait. Elle avait de ce point de vue l'avantage d'apparaître comme un outil auquel ils étaient extérieurs et où ils pouvaient repérer ce qui leur importait le plus – « leur » discipline. Des développements plus récents m'ont conduit à plusieurs remaniements. Désormais, le bas de l'échelle s'écrit ainsi :

…
↓↑
École
↓↑
Pédagogie
↓↑
Systèmes didactiques

Un système didactique ne vit pas – et, déjà, ne vient pas au monde – *in vacuo*. En France comme en d'autres pays, la plupart des systèmes didactiques de l'enseignement officiel initial – à l'école primaire, au collège et au lycée – se forment dans des « classes ». Le fait qu'il y ait des « classes » au sens scolaire (européen) est un fait *pédagogique*. Dans d'autres types d'organisations *scolaires*, la pédagogie adoptée conduit à des regroupements d'élèves en *cours* distincts au plan disciplinaire. Souvent on observera un mélange de classes et de cours : un groupe d'élèves aura les mêmes cours en certaines disciplines, mais éclatera de manière variée pour d'autres cours. Ces choses-là s'analysent, dans l'échelle de codétermination didactique, aux niveaux immédiatement supérieurs à celui des systèmes didactiques proprement dit – aux niveaux pédagogique et scolaire.

Ce qui reste vrai dans *tous* les cas, dans un cadre scolaire au sens courant du terme ou en n'importe quelle institution sociale, c'est que, derrière tout système didactique qui se forme et fonctionne (avant de cesser d'exister, à plus ou moins long terme), il y a une forme ou une autre d'*école*, ce mot étant pris en un sens très étendu, certes, mais qui n'en dilue pas pour autant le sémantisme essentiel : une école est une institution – éventuellement éphémère, mais généralement permanente, éventuellement clandestine, mais généralement connue et reconnue – qui, vis-à-vis de la société où elle vient à l'existence, a la puissance de légitimer et d'ordonner la formation, la vie, la cessation de certains types de systèmes didactiques. Dans les exemples que j'ai cités (trouver la pharmacie, utiliser la machine à café), ce qui permet à des systèmes didactiques furtifs de se former tient à qu'il existe, dans nos sociétés, un système d'écoles permettant à des renseignements d'être demandés. En France, on trouve des « écoles » de ce type dans de nombreux lieux publics (gares, bureaux de poste, etc.), où le client *x* se mue en « étudiant » face à un préposé *y* mandaté pour faire le « professeur » (même s'il n'est pas toujours un professeur très compétent). Les deux cas évoqués plus haut sont, certes, un peu différents : chaque fois, c'est un *x* potentiel qui sollicite un *y* possible, lequel s'auto-mandate (ou refuse de le faire). D'une manière générale, pour qu'un tel système didactique se forme à la demande de *x*, certaines conditions doivent être satisfaites, qui sont spécifiques de l'école en question, chaque école ne prenant en charge, dans le *genre* de tâches « Demander un renseignement », que certains *types* de tâches. Abordant un passant dans la rue, c'est-à-dire au sein de l'école « Demande de renseignements dans la rue », je peux légitimement lui demander le chemin de la poste, ou de la pharmacie, etc., mais je ne peux pas lui demander de façon aussi légitime quel est son numéro de sécurité sociale ou quel est le 192^{e} nombre premier. Je note en passant que Littré donne ceci pour première explicitation de *renseigner* (c'est moi qui souligne) : « Enseigner *de nouveau*. Il avait oublié le chemin, il fallut le lui renseigner. » Ainsi, « renseigner », c'est « ré-enseigner », ce qui diminue un peu la responsabilité didactique de *y* (car un « ré-enseignement » profite ou pâtit de l'enseignement qu'il ne fait que reprendre). Je n'épiloguerai pas là-dessus : la formation d'un système didactique $S(X ; Y ; ♥)$ avec un certain groupe d'étudiants X, une certaine équipe d'aides à l'étude Y, un certain enjeu didactique ♥ est conditionné de multiples façons qui tendent à faire de chaque système didactique, contrairement à l'idée qu'on peut en avoir, un bibelot singulier, étrange, improbable.

La TAD donne une place essentielle, dans le travail du didacticien ξ, à *l'analyse didactique* des systèmes didactiques $S(X ; Y ; ♥)$. Il est d'usage en didactique de distinguer analyse *a priori* et analyse *a posteriori*. Ces notions peuvent être généralisées : si un système didactique se met en place au temps w_d et cesse de fonctionner au temps w_f, on peut définir l'analyse *in vivo* au temps $w \in [w_d ; w_f]$ comme, d'une part, l'analyse des gestes didactiques et des praxéologies didactiques sous-jacentes qui auront été mises en œuvre par X, Y et leurs membres dans l'intervalle $[w_d ; w]$ (ce qui est une analyse *a posteriori*) et, d'autre part, l'analyse des gestes didactiques et des praxéologies didactiques sous-jacentes qui *pourraient* être mises en œuvre par X, Y et leurs membres dans l'intervalle $[w ; w_f]$ (ce qui est une analyse *a priori*). Une analyse didactique au temps w suppose une analyse des conditions et des contraintes – exprimées en termes d'équipements praxéologiques – dont sont porteurs X, Y et leurs membres, ainsi bien sûr que des conditions et contraintes portées par l'enjeu didactique ♥. C'est alors l'analyse de ♥ que l'on nomme restrictivement *« analyse praxéologique »*, alors même que, en vérité, *toutes* les analyses à réaliser en termes de conditions et de contraintes s'expriment en termes de praxéologies et sont donc des analyses praxéologiques. On notera encore que, pour accomplir l'analyse *a priori* à l'instant w, il convient de tenir compte des équipements praxéologiques de X, Y et de leurs membres à l'instant w et donc en particulier de ce qu'ils auront *appris* entre les instants w_d et w : le didacticien ξ, qui s'intéresse en premier lieu aux *conditions* de l'apprentissage, s'intéresse pour cela, coextensivement, aux *effets* d'apprentissage.

Que sont les conditions et contraintes qui déterminent les gestes didactiques de *X*, de *Y* et de leurs membres ? On a cité celles qu'impose l'enjeu didactique ♥ et celles qu'impose aux étudiants et aux aides à l'étude leur propre équipement praxéologique (évolutif). La didactique classique semble avoir oublié que tout cela n'existe pas dans un vide social et qu'il existe des myriades de conditions et contraintes « incorporées », non dans *X*, *Y* ou ♥, mais dans l'*école* où le système didactique analysé s'est formé et dans la *pédagogie* qui prévaut en cette école. Cela appelle deux précisions sur les mots employés. L'école considérée, tout comme la pédagogie qui y règne, sont le fruit d'une foule de décisions « didactiques » – au sens donné à ce qualificatif plus haut – qui se sont étalées peut-être dans un temps très long, décisions économiques qui rendent aujourd'hui la formation du système didactique $S(X\,;\; Y\,;\; ♥)$ écologiquement possible (et économiquement effective). Les conditions ainsi créées – aux niveaux de la pédagogie, de l'école, de la société, etc. – sont des conditions didactiques *au sens large* (par contraste avec les conditions portées par ♥, dites *didactiques au sens strict*), que le didacticien ξ doit prendre en compte parce qu'elles conditionnent non seulement la formation des équipements praxéologiques de *X* et *Y*, mais aussi *la mise en œuvre* de ces équipements praxéologiques. Pour ne prendre que des exemples très simples, ce qui peut être fait par *X* et *Y* s'agissant de l'étude de ♥ dépend sans doute de la durée de l'étude consacrée à ♥ mais aussi de la façon dont cette durée est « consommée », selon que l'école considérée offre des séances d'étude de trois heures, ou de deux heures, ou d'une heure, ou de vingt minutes seulement ! Que doit-on alors entendre par « pédagogie » ? Le mot est pris de façon métaphorique à partir de son étymologie, que le *Online Etymology Dictionary* (Harper, 2001-2015) rappelle en ces termes :

> **pedagogue (n.)**
> late 14c., "schoolmaster, teacher," from Old French *pedagoge* "teacher of children" (14c.), from Latin *paedagogus*, from Greek *paidagogos* "slave who escorts boys to school and generally supervises them," later "a teacher," from *pais* (genitive *paidos*) "child" (see ***pedo-***) + *agogos* "leader, from *agein* "to lead" (see ***act*** (n.)). Hostile implications in the word are at least from the time of Pepys (1650s). Related: *Pedagogal*.

La pédagogie d'une école est ainsi constituée de l'ensemble des conditions qui font qu'une personne *x*, sujet de l'école en position d'élève, est, dans des formes qui peuvent fortement varier, amenée à entrer en contact – matériel et immatériel – avec les enjeux didactiques ♥ à étudier. Il devrait aller de soi que ces conditions sont susceptibles de modifier les gestes d'étude d'un enjeu ♥ que pourra accomplir la « classe » concernée : on mettra dans ces conditions, par exemple, la disponibilité (pour *X*, pour *Y*, pour les deux) de certains matériels et de certains matériaux, condition qui peut changer fondamentalement l'étude de tel ou tel enjeu didactique ♥, mais aussi, plus généralement, les « conditions de travail » de *X* et *Y*, l'atmosphère générale autant que les parcelles d'autonomie accordées aux uns et aux autres et, plus généralement, le contenu de la synnomie gouvernant le « groupe-classe ».

Pour aller plus loin, il convient maintenant d'examiner ce que recouvre plus précisément le symbole ♥. D'une manière générale, ce que l'on étudie est une *œuvre*, c'est-à-dire le fruit d'une activité humaine *finalisée* (ayant une finalité : une fonction, etc.). Distinguons deux types d'œuvres – qui ont entre eux, on va le voir, des relations essentielles. Le premier type d'œuvres est celui des *questions* : une question *Q* est une œuvre très précieuse, fruit de l'activité humaine. Dans le cas où l'enjeu didactique est une question *Q*, le système didactique *S*(*X* ; *Y* ; ♥) s'écrit *S*(*X* ; *Y* ; *Q*). Nous allons longuement revenir sur ce cas. Le second type d'œuvres est constitué d'entités praxéologiques souvent incomplètes, que je note génériquement $\wp$ (en élargissant donc l'usage de ce symbole) et qui constituent soit des réponses *R* à des questions *Q*, soit des outils de toute nature possible pour *produire* des réponses à des questions ; un tel système didactique s'écrit alors *S*(*X* ; *Y* ; $\wp$). Étudier l'œuvre $\wp$, c'est étudier des questions soulevées au sujet de cette œuvre. Ces questions sont, pour certaines, génériques : quelle est la structure de l'œuvre, quel est son fonctionnement, quelles sont ou quelles ont été ses raisons d'être ? D'autres sont plus spécifiques au contexte dans lequel *X* est conduit à étudier ♥ = $\wp$. L'œuvre peut-elle par exemple aider à répondre à une certaine question *Q* qui a déclenché le processus didactique ? On en arrive ainsi au schéma herbartien, sur lequel je m'arrêterai maintenant.

5. Le schéma herbartien

Le *schéma herbartien* concerne formellement les systèmes didactiques où l'enjeu de l'étude est une question Q. Dans sa forme non développée, il s'écrit simplement : $S(X\,;\,Y\,;\,Q) \hookrightarrow R$. L'habitude a été prise de noter $R^{\heartsuit}$ la réponse R produite par $S(X\,;\,Y\,;\,Q)$, pour signifier que cette réponse est chère au *cœur* de la classe $C(X\,;\,Y\,;\,P)$, non pas tant parce qu'elle l'aurait produite elle-même (ce qui n'est d'ailleurs pas toujours le cas) que parce que cette réponse satisfait certaines contraintes propres à l'usage que la classe veut faire d'elle. Ce schéma non développé s'explicite ensuite en un schéma *semi-développé* qui s'écrit ainsi : $[S(X\,;\,Y\,;\,Q) \curvearrowright M] \hookrightarrow R^{\heartsuit}$. Dans le schéma herbartien *développé*, le milieu pour l'étude M qui apparaît ici s'écrivait $M = \{R^{\Diamond}_1, R^{\Diamond}_2, \ldots, R^{\Diamond}_n, O_{n+1}, \ldots, O_m\}$. Je l'ai récemment explicité un peu plus sous la forme suivante :

$$M = \{R^{\Diamond}_1, R^{\Diamond}_2, \ldots, R^{\Diamond}_n, Q_{n+1}, \ldots, Q_m, O_{m+1}, \ldots, O_p\}.$$

Les symboles $R^{\Diamond}_i$ sont toujours des réponses « toutes faites », présentes dans la culture (et par exemple sur Internet), dont la valeur (et, en particulier, la validité) n'est bien sûr pas garantie. Les symboles Q_j désignent les questions engendrées par l'étude de Q, tandis que les symboles O_k sont d'autres œuvres (dont l'emploi soulèvera d'autres questions).

Ce schéma appelle plusieurs remarques. Première remarque : il semble que, trop souvent, on rechigne à l'utiliser et, en tout cas, à le faire de manière explicite. La première raison de cette omission se trouve sans doute dans une propension culturelle à *ne pas* utiliser d'ostensifs de style « mathématique » lorsqu'ils ne sont pas *fortement imposés par une institution suffisamment puissante* – ce que n'est pas, aujourd'hui encore, la TAD. Plus généralement, il reste à accomplir, dans les sciences humaines et sociales, une *révolution ostensive* qui a du mal à prendre son essor. Un second ensemble de raisons semble moins intraitable : si le schéma herbartien est peu utilisé explicitement, c'est sans doute qu'il est encore mal compris ou plutôt incomplètement compris. Je vais donc apporter quelques commentaires complémentaires.

Le schéma herbartien est un *modèle*, pour analyser et pour agir. C'est dire qu'il faut bien comprendre les *paramètres* qui le commandent. Considérons ainsi les réponses $R^{\Diamond}_i$ $(1 \leq i \leq n)$. Dans la tradition scolaire la plus commune, *X*, fût-il supervisé par *Y*, ne va pas rechercher dans la culture des réponses « toutes faites ». On a donc $n = 0$. Ou plutôt, on a $n = 1$ avec $R_1^\lozenge = R_y^\lozenge$ où $y \in Y$ est le « professeur » de la classe. En ce cas, le schéma herbartien $[S(X\ ;\ Y\ ;\ Q) \curvearrowright M] \hookrightarrow R^\heartsuit$ s'écrit avec $M = \{R_y^\lozenge\}$ et $R^\heartsuit = R_y^\lozenge$; c'est-à-dire qu'il prend la forme suivante : $[S(X\ ;\ Y\ ;\ Q) \curvearrowright \{R_y^\lozenge\}] \hookrightarrow R_y^\lozenge$. La classe apprend « la réponse du maître », $R_y^\lozenge$. J'hésite à appeler cela le schéma herbartien *dégénéré*.

J'ai écrit plus haut l'égalité $M = \{E, \ldots\}$ où, en l'espèce, *E* était un *exposé* sur l'enjeu didactique ♥. C'est que, en vérité, on n'accède pas *directement* à des réponses $R_i^\lozenge$: celles-ci sont « enchâssées » dans des exposés E_i dont il faut les extraire (les « excrire »). Cela est vrai en vérité pour *tous* les éléments promis à entrer dans le milieu *M* : même quand ils ne sont pas immatériels, on accède à ces composants du milieu par le truchement d'*exposés*, ainsi qu'on l'a vu avec l'exemple de la comparaison des décimaux.

Dans la tradition scolaire comme, me semble-t-il, dans la TSD, la constitution du milieu *M* est une prérogative du « maître », c'est-à-dire de *Y*. Dans le cas général du schéma herbartien, une telle exclusivité n'existe pas mais constitue une simple possibilité : ce sont les règles de la *pédagogie* de l'école prévalant dans la classe qui diront quelle part peut prendre *X* et quelle part peut prendre *Y* dans la constitution de *M*. Concrètement, cela veut dire par exemple qu'un $x \in X$ peut proposer une réponse $R^\lozenge$ qu'il aura découverte (ou fabriquée) *motu proprio*, et que $y \in Y$ pourra faire de même, et cela *sans que* sa contribution soit considérée comme *la* réponse $R^\heartsuit$ de la classe, mais soit tenue pour *une* contribution parmi d'autres. L'étude de la constitution des milieux *M* (avec leurs richesses et leurs manques), de leur exploitation didactique et, finalement, de leur degré d'adéquation aux besoins de l'étude de la question *Q* dans $C(X\ ;\ Y\ ;\ P)$, engendre pour le didacticien ξ une foule de problèmes dont beaucoup, je pense, restent à identifier.

L'exploitation didactique du milieu *M* suppose, itérativement, l'étude de réponses $R_i^\lozenge$, de questions engendrées Q_j et d'autres œuvres O_k. Je donnerai de cela un exemple. Considérons la question *Q* suivante : « On entend dire quelquefois que la matière est “pleine de vide”. Qu'est-ce que cela veut dire exactement ? » Cette question peut être reformulée ainsi : « Comment faire pour montrer que, en un sens à préciser, la matière est “pleine de vide” ? » C'est là une question $Q^\#$ engendrée par *Q*, à laquelle on recherche une réponse $R^{\#}$. Dans l’enquête sur $Q^{\#}$, la classe $C(X ; Y ; P)$ peut rencontrer l’exposé suivant, extrait d’un ouvrage intitulé *Des idées toutes faites et pas forcément toutes fausses en sciences physiques* (2012), dû à une professeure honoraire du Lycée Henri-IV à Paris, Florence Messinao :

> **Les gaz**
> Étudions par exemple l’argon, gaz de l’air constitué de molécules monoatomiques (= d’atomes) d’argon de rayon voisin de 1 Å. À la pression atmosphérique normale et à la température ordinaire, par exemple la pression atmosphérique de 10^5 Pascal et à 25 ºC, la loi d’Avogadro-Ampère stipule qu’une mole de gaz contient $6 \cdot 10^{23}$ particules (le nombre d’Avogadro N) et occupe un volume V de 24 litres. Dans ces conditions, le volume v des molécules contenues dans ces 24 litres est égal à $v = \mathrm{N} \cdot v_0$ où v_0 est le volume d’une molécule.
> $V = \mathrm{N} \cdot 4\pi \cdot r^3/3 = 2{,}5 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}^3 = 2{,}5 \cdot 10^3\ \mathrm{L}$.
> On a alors $V/v = 24/2{,}5 \cdot 10^3 = 9{,}6 \cdot 10^3 \approx 10^4$.
> Le volume occupé par les molécules est dix mille fois moindre que le volume offert au gaz. Là encore on voit que la matière est faite surtout de vide. (p. 11)

La lecture « contrôlée » et productive de ce passage suppose des connaissances multiples, généralement éclatées entre diverses disciplines : physique et chimie, métrologie, calcul sur les grandeurs (c’est-à-dire calcul « incluant les unités »), calcul avec les puissances, notamment. Si l’institution « mandante » – ici, la classe $C(X ; Y ; P)$, ou quelque « sur-institution » – estime que le résultat établi dans l’exposé examiné est *important*, alors cela – cette attitude, cette valeur – engendrera des efforts adéquats, mais *extrinsèques*, pour intégrer la substance de la réponse inscrite dans ce texte dans la réponse qu’il s’agit de construire. On voit que l’enquête engendrée par l’étude de Q, puis de $Q^{\#}$, est ce que j’ai nommé, il y a maintenant longtemps, une enquête *codisciplinaire*, le préfixe *co-* indiquant que « l’on fait travailler ensemble » des connaissances provenant de différents champs disciplinaires. Les exigences dans la manipulation de ces connaissances de diverses « natures » peuvent varier en fonction *notamment* des injonctions de l’institution mandante du système didactique, pour qui tel ou tel « aspect » (disciplinaire ou non) compte plus ou compte moins. (On retrouve, là encore, le rôle générateur *éventuel* des attitudes et des valeurs.)

La réponse $R^\#$ peut alors être jugée « suffisante » et « solide » par telle institution – par exemple la classe $C(X ; Y ; P)$ – , tandis qu'elle sera jugée « insuffisante » et « fragile » par telle autre – ou encore par la classe $C(X ; Y ; P)$ elle-même mais dans un temps *ultérieur* de son histoire. La réponse est ce que j'appellerai un *amalgame* de connaissances empruntées à des champs praxéologiques divers, $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_p$, amalgame que je note $\nabla(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_p)$, où le symbole ∇ se lit *nabla*. Pour un système didactique donné $S(X ; Y ; Q)$, le *coût* des éléments amalgamés dans la réponse produite $R^\#$ peut être variable : il peut être élevé en physique et faible en mathématiques par exemple, etc.

Tout ce qui précède vaut pour l'étude d'une question Q de *recherche* en didactique. En ce cas, le système didactique devient plus précisément un *système de recherche* (l'école qui le légitime est une institution de recherche), système que l'on peut écrire $S(\xi ; \mathrm{Z} ; Q)$, où Z est la lettre grecque zêta majuscule. Le schéma herbartien développé s'écrit alors :

$$[S(\xi ; \mathrm{Z} ; Q) \curvearrowright \{R_1^\lozenge, R_2^\lozenge, \ldots, R_n^\lozenge, Q_{n+1}, \ldots, Q_m, O_{m+1}, \ldots, O_p\}] \hookrightarrow R^\heartsuit.$$

Tous les phénomènes évoqués précédemment restent valables. Notons par exemple que la réponse $R^\heartsuit$ à laquelle pourra parvenir ξ avec l'aide de Z apparaîtra souvent comme un amalgame $\nabla(\mathbb{S}, \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_p)$, où $\mathbb{S}$ est le champ des praxéologies *statistiques*, amalgame qui aura d'une façon générale des composants de *qualité fort variable* – il semble aujourd'hui par exemple que le composant statistique soit fréquemment fragile, quand il n'est pas franchement erroné.

6. La dialectique du didactique et du praxéologique

Le travail d'étude et de recherche modélisé par le schéma herbartien suppose, on l'a dit, la recherche, l'identification, l'examen d'une foule de conditions ayant leur siège à tous les niveaux de l'échelle de codétermination didactique, que je rappelle :

Humanité

↓↑

Civilisation

↓↑

Société

$\downarrow\uparrow$

École

$\downarrow\uparrow$

Pédagogie

$\downarrow\uparrow$

Systèmes didactiques

Ici, nous considérerons des systèmes didactiques de la forme $S(X\,;\,Y\,;\,\wp)$ où $\wp$ est une certaine entité praxéologique. Ce qui va déterminer les gestes d'étude de X et de Y à l'endroit de $\wp$, ce sont les conditions et contraintes portées par X et Y ainsi que celles façonnant $\wp$, plus des conditions et contraintes de tous niveaux (pédagogie, école, société, etc.).

C'est en ce point que je réintroduirai le personnage que j'ai noté ξ_γ, le *didacticien gyrovague*. Vous ne connaissez pas la « spécialité » de ξ_γ : nul ne sait s'il est didacticien *des mathématiques*, ou *de la biologie*, ou de *l'histoire*, bien qu'il ait publié des travaux reconnus dans ces trois sous-champs de *la didactique* – et dans quelques autres. (Imaginons-le, du moins.) Or il se trouve que, dans la même semaine, il doit réaliser des analyses didactiques, à divers instants $w_1 = w_d$, w_2, …, $w_\ell = w_f \in [w_d, w_f]$, de trois systèmes didactiques, notés $S(X_1\,;\,y_1\,;\,\wp_1)$, $S(X_2\,;\,y_2\,;\,\wp_2)$, $S(X_3\,;\,y_3\,;\,\wp_3)$. Le premier enjeu didactique $\wp_1$ lui a été annoncé par cette étiquette : *Accord du participe passé en français*. Le deuxième est présenté comme la notion d'*élasticité en économie*. Le troisième s'intitule simplement *Couleurs primaires*. Un grand problème à étudier est alors le suivant : que doit savoir ξ_γ, non seulement des équipements praxéologiques des X_i et y_i ($1 \leq i \leq 3$), mais aussi des enjeux didactiques $\wp_1$, $\wp_2$, $\wp_3$? La réponse tient, pour cette dernière question, dans une expression : ce qu'il doit savoir doit pouvoir lui servir de *modèle praxéologique de référence* (MPR) dans les analyses didactiques à conduire. Mais que doit contenir ce MPR ? La question *n'a jamais de réponse sûre, définitive*. Ce qui est certain, c'est que, quelle que soit son histoire passée, ξ_γ doit enquêter à nouveaux frais sur $\wp_1$, $\wp_2$, $\wp_3$ et sur les conditions de tous niveaux qui les (sur)déterminent. C'est là que j'introduirai une notion encore.

On peut parler en TAD de l'*équipement praxéologique* de ξ_γ relatif à $\wp_1$, $\wp_2$, $\wp_3$. On peut parler aussi de ses *rapports personnels* $R(\xi_\gamma\,;\,\wp_1)$, $R(\xi_\gamma\,;\,\wp_2)$, $R(\xi_\gamma\,;\,\wp_3)$. Mais j'utiliserai maintenant une autre notion : pour toute personne x et pour tout champ praxéologique $\mathcal{C}$, je considère (métaphoriquement) le *livre* $L(x\,;\mathcal{C})$ où se trouve exposée la partie de l'équipement praxéologique de x relevant de $\mathcal{C}$. Bien entendu, pour la plupart des personnes x et des champs $\mathcal{C}$, on a $L(x\,;\mathcal{C}) = \varnothing$ ou, du moins, $L(x\,;\mathcal{C}) \approx \varnothing$. L'ensemble des livres de x constitue l'*encyclopédie* de x, $E(x)$. (Bien entendu, ces notions s'étendent au cas d'une institution I et d'une position p au sein de I : on notera respectivement $L_I(p\,;\mathcal{C})$ et $E_I(p)$ le livre de $\mathcal{C}$ et l'encyclopédie pour la position p de I.) Dans le cas de notre didacticien gyrovague ξ_γ, le travail d'analyse didactique à réaliser va l'obliger à revoir ses livres $L(\xi_\gamma\,;\text{français})$, $L(\xi_\gamma\,;\text{économie})$ et $L(\xi_\gamma\,;\text{arts plastiques})$. Que devra-t-il y rajouter ? Cela dépend en partie de ce que contiennent déjà ses livres de français, d'économie et d'arts plastiques, certes. Mais je voudrais insister sur deux points. En premier lieu, ce que doivent contenir les livres d'un didacticien n'a pas de raison *a priori* d'être idéalement superposable à ce que contiennent les livres de y, pour cette raison que y et ξ_γ n'affrontent pas les mêmes problèmes. En second lieu, la question du contenu adéquat des livres de ξ_γ reste *en principe* indéfiniment ouverte : chaque recherche, chaque analyse relancera le processus de complétion et, en fait, de *réécriture* des livres de ξ_γ.

Arrêtons-nous un instant sur l'enjeu $\wp_1$: *Accord du participe passé en français*. Le didacticien ξ_γ peut reprendre l'enquête, s'il l'a jamais commencée, *par exemple* en recherchant sur Internet des débats sur cette question délicate, pour voir ce qui arrête les scripteurs du français. Voici un exemple de ce genre d'échanges (Études littéraires, 2005-2006) dont la lecture, comme celle des « exposés » reproduits ci-après, rappellera au lecteur qu'un travail d'enquête exige toujours patience et persévérance :

Aurélie

Bonjour,

Je souhaiterais savoir s'il y a accord du participe passé dans les cas suivants :

Il l'a rendu(e) folle.

La vie qu'elle a vécu(e).

Les trente années qu'elle a vécu(es).

Merci

Laetitia

Il l'a rendue folle.

La vie qu’elle a vécue.

Les trentes années qu’elle a vécues.

Edy

Bonsoir !

Les trentes années qu’elle a vécues.

Je suis obligé de rectifier : → qu’elle a vécu.

(Modestement et avec courtoisie !)

MOTIF

Lorsque le verbe exprime la durée (vivre), la distance (courir), la valeur (coûter) ou la mesure (peser), le participe reste invariable.

Le complément n’est d’ailleurs pas un COD mais un CC. Bizarre ?

* Les dix minutes que j’ai attendu.

→ Les dix minutes pendant lesquelles...

Exemples :

* Les cinquante ans que j’ai vécu.

* Les nombreuses années qu’il a vécu.

* Les cent euros que cela m’a coûté.

* Les cent mètres que j’ai couru.

* Les années qu’il a régné / souffert.

* Les cent kilos qu’il a pesé.

Mais on fait l’accord avec le COD antéposé lorsque le verbe est employé transitivement :

* Les factures que j’ai attendues.

* Les soucis que j’ai vécus (= soufferts).

* La vie heureuse qu’il a vécue.

* Les efforts que cela m’a coûtés.

* Les marchandises qu’il a pesées.

On est parfois sur le fil du rasoir :

* Les cent euros que j’ai dépensés / pariés / perdus / gagnés.

* Les cinq années que j’ai passées en Amérique.

* La nuit que j’ai couché à la belle étoile.

* Les dix années de misère qu’il a vécues.

Mais :

* Les dix années qu’il a vécu.

J’espère que je ne me suis pas fourvoyé ; je vous écris à livre ouvert.

Que de subtilités, dira-t-on !

Enfin, jusqu'à l'adoption aléatoire d'une réforme, il faut bien s'en accommoder...

Otis

Bonjour !

Je voulais savoir si l'orthographe était bonne :

« Les échos que l'on m'en a donné »

Je ne mets pas de « s » parce que le « en » (peut-on me donner la fonction de ce « en » ? C.O.S ?) est toujours invariable ?

Merci d'avance !

Edy

Bonjour aussi !

« Les échos que l'on m'en a donné. »

Extrait de la grammaire Le Robert et Nathan :

« Selon la plupart des grammairiens, le participe passé précédé de EN (ayant valeur de COD antéposé) reste invariable. Néanmoins, dans l'usage, l'accord a souvent lieu.

* J'ai ramassé des crevettes. J'en ai ramassé(es). »

Grevisse exprime la même opinion et donne quelque 34 citations : 14 avec l'invariabilité et 20 avec l'accord.

Les instruction officielles Haby de 1976 disent aussi : « L'usage admet l'un et l'autre accord. » Comprenez : invariabilité ou accord.

MAIS le EN de votre énoncé n'est pas un COD ; c'est un complément indirect, et plus précisément un CC (certains y verront un COI) :

→ Les échos qu'on m'a donnés de cela / au sujet de cela.

Il doit donc rester sans effet quant à l'accord.

Par conséquent, vous ferez l'accord avec le pronom relatif QUE antéposé, et, à travers lui, avec son antécédent LES ECHOS.

Grevisse donne un exemple dans le même sens :

* Il retournait contre sa mère les armes qu'il EN avait reçuES. (Romain Rolland. *Jean-Christophe*)

(= les armes qu'il avait reçues D'ELLE.)

Otis

Merci beaucoup pour la clarté et la rapidité de votre réponse. Mais alors,

« des pâtes, j'en ai pris » ?

Edy

Bonsoir !

EN est, dans votre énoncé, un vrai COD antéposé, qui représente le nom pâtes (mis en emphase).

Comme je l’ai dit, vous avez donc le choix : pris ou prises.

Mais, comme il s’agit de pâtes, c’est-à-dire d’un substantif non comptable, je donnerais la préférence au singulier : pris.

* Des nouilles, j’en ai souvent mangé, à cause de mes fins de mois qui commencent le quinze.

Les meilleurs auteurs se font parfois piéger.

Grevisse cite Barrès :

* En ai-je VU jetéS à terre par les politiciens de ces courageux officiers !

Effectivement, le voisinage de *vu* et de *jetés* a l’air d’une fausse note.

Sauf respect, j’aurais écrit *vus* et *jetés* pour ne pas avoir une discordance.

Otis

Un énorme merci ! Les plus grands font donc des fautes : quel espoir !

Les choses sont donc compliquées. L’œuvre qui devrait constituer la réponse à la question « Dans quels cas y a-t-il accord ? » est pour le moins floue… On voit, bien sûr, que pour en saisir la complexité, ξ_γ aura intérêt à rouvrir son livre de grammaire du français. Mais bien d’autres questions se posent à lui *a priori*. Faut-il par exemple qu’il étudie ce qui est *à l’origine* de cette complexité ? Le fait d’examiner d’autres langues *romanes* que le français pourrait-il l’aider ? ξ_γ croit savoir que les règles qui gouvernent en français l’accord du participe passé seraient venues d’Italie au XVI^e^ siècle, un fait auquel le nom du poète Clément Marot (1496-1554) serait attaché. (Comme on le voit, ξ_γ n’est peut-être pas complètement inculte en la matière.) Tel peut être le point de départ d’une enquête qui pourra conduire ξ_γ à examiner les règles actuelles en italien, en espagnol, en catalan, etc. Il pourra par exemple inscrire dans son livre d’*italien* ce passage d’un ouvrage intitulé *L’italiano facile. Guido allo scrivere e al parlare* (Fochi, 1969) :

Quando, però, il participio passato si unisce al verbo ausiliare per la formazione dei tempi composti, in qualche caso si ha la concordanza, in qualche altro no. Se l’ausiliare è *essere,* il p.p. si concorda sempre : “Io sono *andata*”, “Tu sei *stato* attento”, “Non *siete* stati puniti”, “Le comari non s’erano *potute* dare convegno”. Se l’ausiliare è *avere,* il p.p. di solito non si

> concorda : “Ho *mangiato* due pere”, “Avevamo *raggiunto* la vetta”, “Le comari non avevano *potuto* darsi convegno” ; ma si concorda, quando si riferisce a un pronome personale atono (*lo, la, li, le*) o alla particella *ne* : “Ma la vetta non l’hai *raggiunta*”, “Come? *Ne* ho *raggiunte* due nella stessa giornata”, “Chi *li* ha *visti*?” ; infine può o no concordarsi, quando si riferisce al pronome relativo *che* : “Le due vette *che* hai *scalate* (o *scalato*)”, “La prima *che hai raggiunta* (o *raggiunto*)”, “I corridori, *che* abbiamo *visti* (o *visto*) alle tre sul Turchino, a quest’ora saranno già arrivati”.
>
> In quest’ultimo caso, i piú preferiscono non concordare. Ma è un difetto, che rientra nella tendenza, propria della lingua d’oggi, a cristallizzare le forme d’espressione, riducendone al minimo possibile la varietà. La facilità che si ottiene su questa via, non ci piace e non ci persuade, perché ottenuta a danno della ricchezza, della mobilità e quindi delle possibilità stesse della lingua. Si tengano, quindi, a ugual portata tutt’e due i modi, per scegliere di volta in volta quale torni piú opportuno. (p. 276)

Nous laisserons ici ξ_γ poursuivre son enquête… Ainsi ébauche-t-il un MPR pour l’accord du participe passé en français, MPR qui demandera à ξ_γ bien des efforts, dont l’objet précis est à ce stade encore *inconnu* de lui. Pensant par exemple qu’un éclairage *diachronique* pourrait éclairer un problème praxéologique du français dont la confusion semble extrême, ξ_γ pourra se pencher sur le *Précis de grammaire historique de la langue française* de Ferdinand Brunot et Charles Bruneau (4e édition 1956), où il lira d’abord ceci :

> En général, les grands écrivains du XVIIe siècle se souciaient […] assez peu de la règle des participes, qui était encore discutée par les théoriciens. Elle ne s’est véritablement imposée qu’au XVIIIe siècle. Jean-Jacques en témoigne. Dans une lettre à un de ses jeunes compatriotes, il le met en garde contre les fautes de participes ; elles commencent, dans la bonne société parisienne, à déconsidérer un homme. (p. 403)

Il découvrira ensuite que ces auteurs concluent dans les termes suivants :

> La règle des participes est une règle artificielle, à laquelle les grammairiens logiciens ont attaché, depuis la fin du XVIIIe siècle, une importance excessive. Il est regrettable que l’Université, au XIXe siècle, ait repris cette tradition. Il serait sage de laisser toute 1iberté à l’usage, qui tend évidemment à

> considérer le participe construit avec *être* comme un adjectif variable, et le participe construit avec *avoir* comme une forme verbale invariable. (p. 403)

Le MPR concernant $\wp_1$ que ξ_γ s'efforce de produire ne devra pas seulement lui permettre de « suivre » ce qui se fait dans le système didactique $S(X ; Y ; \wp_1)$; il devra aussi l'aider à identifier ce qui *ne s'y fait pas*, ce qui *pourrait* s'y faire, ce qui ne *peut pas* s'y faire dans les conditions et sous les contraintes régnantes.

On peut imaginer, à partir de là, ce que pourrait être un MPR pour $\wp_2$ ou pour $\wp_3$. Pour ce qui est de $\wp_3$ (les « couleurs primaires »), le livre d'*arts plastiques* de ξ_γ pourrait *par exemple* s'enrichir de cette réponse que, dans son ouvrage *Le petit livre des couleurs* (2005), un historien français, spécialiste reconnu de la question, Michel Pastoureau, fait à son interlocutrice – Dominique Simonnet –, en rappelant qu'une couleur « qui résultait d'un mélange n'avait pas la même valeur que les autres » :

> Les chimistes du XVIIIe siècle l'ont prétendu : ils ont avancé une théorie pseudo-scientifique définissant des couleurs « primaires » (jaune, bleu, rouge) et des couleurs « complémentaires » (vert, violet, orange). Cette thèse a influencé les artistes du XIXe et du XXe siècle, au point que de nombreuses écoles picturales ont décidé de ne plus pratiquer que les couleurs dites « primaires », et éventuellement le blanc et le noir. Le mouvement du design, notamment celui du Bauhaus, qui souhaitait mettre en harmonie la couleur et la fonction des objets, a cru naïvement à cette « vérité » scientifique et a parlé de couleurs pures et de couleurs impures, de chaudes et de froides, de statiques et de dynamiques... Et c'est notre vert, ravalé au second rang, qui en a le plus souffert ! Des peintres tel Mondrian l'ont presque banni de leurs productions. Sous prétexte de se conformer à la science, l'art a exclu le vert du monde des couleurs. (pp. 69-70)

Pour ce qui est de $\wp_2$, ξ_γ aura peut-être ajouté à son livre de *mathématiques* quelque chose comme ce qui suit (« Elasticity of a function », s.d.), qu'il lui restera sans doute à « déchiffrer » :

> In mathematics, the **elasticity** or **point elasticity** of a positive differentiable function *f* of a positive variable (positive input, positive output) at point *x* is defined as

$$Ef(a) = \frac{a}{f(a)} f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\,\frac{a}{f(a)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{f(a)}\,\frac{a}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{1-\frac{f(x)}{f(a)}}{1-\frac{x}{a}} \approx \frac{\%\Delta \mathrm{f(a)}}{\%\Delta \mathrm{a}}$$

or equivalently

$$Ef(x) = \frac{d\log f(x)}{d\log x}.$$

It is thus the ratio of the relative (percentage) change in the function's output $f(x)$ with respect to the relative change in its input x, for infinitesimal changes from a point $(a, f(a))$. Equivalently, it is the ratio of the infinitesimal change of the logarithm of a function with respect to the infinitesimal change of the logarithm of the argument.

The elasticity of a function is a constant α if and only if the function has the form $f(x) = Cx^{\alpha}$ for a constant $C > 0$.

D'une façon générale, et comme l'illustrent implicitement certains fragments de MPR choisis comme exemples ici, ξ_γ doit accueillir de façon à la fois *ouverte* et *critique* le dogmatisme exhibitionniste des institutions, en particulier des institutions d'enseignement, et cela *en questionnant sans relâche* les œuvres que ces institutions estampillent.

7. La récursivité des questions et des œuvres

Le paradigme de la *visite des œuvres* aboutit aisément au *fétichisme* des œuvres, à leur sacralisation, à leur sanctification : ce qui, à l'origine, est produit comme un *moyen* pour répondre à des questions devient alors une fin en soi – de là les dérives *monumentalistes* dont l'enseignement est prodigue. L'accent mis sur le *questionnement du monde* vise à rétablir la *dialectique récursive des questions et des œuvres*, historiquement bloquée sur les œuvres. Une œuvre qui n'est pas une question est une réponse ou un outil de création de réponses. La dégénérescence scolaire de la dialectique des questions et des œuvres conduit à l'oubli des questions : on a ainsi des « réponses » *qui n'en sont plus* puisque les questions auxquelles elles répondaient *ont disparu*. Le schéma herbartien non développé peut s'écrire alors : $S(X\,;\,Y\,;\,?) \hookrightarrow R$. Le modèle constitué par le schéma herbartien permet ainsi de *questionner* l'activité des systèmes didactiques.

L'étude d'une question Q entraîne l'étude d'autres questions Q_j, mais aussi d'œuvres qui ne sont pas des questions, à savoir des réponses $R_i^\lozenge$ et d'autres œuvres O_k. Par ailleurs, dans chaque cas, étudier une œuvre revient d'une façon générale à étudier des questions soulevées à propos de cette œuvre *dans la perspective de son utilisation pour créer une réponse* $R^\heartsuit$, c'est-à-dire dans une perspective *finalisée par l'étude* de la question génératrice Q. Bien entendu, dans la dynamique du travail d'enquête, la question génératrice Q elle-même est en général *engendrée* par l'étude d'une question préalable. On a ainsi une dialectique – dont l'un des aboutissements est la production de la réponse $R^\heartsuit$ – entre *étude de questions* et *étude d'œuvres* autres que des questions. Mais ce mouvement peut être déséquilibré par un processus dégénératif où l'on peut distinguer deux étapes. Dans une première étape, pour des raisons culturelles, les œuvres-moyens prennent le dessus sur les questions-fins. Dans une deuxième étape, même les questions en lesquelles se décline l'étude d'une œuvre disparaissent : on « donne » les propriétés de l'œuvre « en soi et pour soi », sans plus se soucier des raisons pour lesquelles ces propriétés *pourraient* être intéressantes pour une étude qui a, de toutes façons, été oubliée ou qui n'a même jamais commencé à exister !

Je voudrais montrer maintenant comment le schéma herbartien permet de repérer et de modéliser d'autres formes de processus d'étude. Lorsqu'une question Q a été fixée, l'une des tâches d'étude est de se procurer des *outils* qui seront amenés dans le milieu M. *A priori*, X et Y ne sont pas sûrs que telle œuvre O sera un outil adéquat ou du moins utile pour étudier Q (ou une question Q_j engendrée par cette étude). En d'autres termes, le problème d'identifier des œuvres adéquates est essentiellement *ouvert*. À ce propos je voudrais d'abord mentionner – puisque la question a été posée – la notion, due à Guy Brousseau, de *situation fondamentale*. Dans son *Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques (1998)*, Brousseau (2010) en propose l'explicitation suivante :

Situation fondamentale (correspondant à un savoir)

C'est un schéma de situation capable d'engendrer par le jeu des variables didactiques qui la déterminent, l'ensemble des situations correspondant à un savoir déterminé. Une telle situation, lorsqu'on peut l'identifier, offre des possibilités d'enseignement mais surtout une représentation du savoir par les problèmes où il intervient permettant de restituer le sens du savoir à enseigner.

Comme on le voit, l'expression fait référence à des œuvres désignées ici, classiquement, comme des *savoirs*. Le fait que l'on connaisse une situation fondamentale relative à une œuvre-savoir est évidemment une excellente chose pour juger de l'utilité *potentielle* de ce savoir pour étudier la question que l'on considère : ce savoir a-t-il quelque relation avec « les problèmes où [le savoir représenté] intervient » ? Mais on rencontre là des difficultés. Tout d'abord, au cours d'une enquête donnée, on ne dispose pas de situation fondamentale pour chaque œuvre que l'on rencontre comme *a priori* « intéressante ». Ensuite, si l'on connaît une situation fondamentale, elle peut être muette relativement au problème que l'étude en cours conduit à affronter. Il s'agit donc d'une notion précieuse, mais qui est pensée pour être véritablement opératoire lorsqu'on part d'une œuvre – d'un savoir – plutôt que lorsqu'on part d'une question.

Alors que, dans le paradigme scolaire de la visite des œuvres, le choix des œuvres est *a priori* imposé, dans le paradigme du questionnement du monde ce choix est déterminé – et, en général, sous-déterminé – par l'enquête sur la question génératrice *Q*. Je voudrais donner ici un exemple de cette *variation possible des œuvres* utiles et utilisées. Dans un livre intitulé *La course de la gazelle. Biologie et écologie à l'épreuve du hasard* (2011), l'auteur, Alain Pavé, écrit :

> … dans tout le vivant, pourquoi deux sexes, pas trois, pas quatre, etc. ? En effet, plus de sexes correspondrait à une augmentation du potentiel de diversification avec le brassage génétique qu'autoriserait une telle situation. Mais la reproduction nécessite la rencontre des sexes. Or la probabilité d'une telle rencontre diminue rapidement avec le nombre de sexes et par là même limite la démographie. Le risque d'extinction spontanée augmenterait d'autant. En effet, la probabilité de rencontre est maximale pour une équirépartition des sexes, donc de 50 % de mâles et de 50 % de femelles dans les populations bisexuées. Dans le cas de rencontres au hasard, cette probabilité tend rapidement vers 0 quand le nombre de sexes augmente, c'est-à-dire vers une démographie nulle. (p. 44)

L'auteur donne un peu plus loin une preuve de ce qu'il avance. Il montre que, lorsqu'il y a deux sexes, mâle (M) et femelle (F), et que la proportion de M est p, la probabilité que deux individus de sexes différents se rencontrent (en supposant des rencontres « au hasard ») est donnée par $f(p) = 2p(1 - p)$.

Pour quelles valeurs de $p \in [0, 1]$ cette probabilité est-elle maximale ? Pour répondre, il recourt à une première œuvre mathématique étudiée classiquement dans l'enseignement secondaire :

> … cette probabilité est maximale pour $p = q = 1/2$. C'est-à-dire pour une population où le sex-ratio est de 1/2, c'est-à-dire qui comprend autant de mâles que de femelles. En effet, $f(p) = 2p(1 - p)$ est une parabole à concavité négative coupant l'axe des abscisses aux points de valeurs $p = 0$ et $p = 1$. Cette courbe est symétrique, son maximum correspond à l'abscisse $p = 1/2$ et la valeur de ce maximum $f(1/2)$ est aussi égale à 1/2. (p. 45)

Il utilise ensuite une deuxième œuvre mathématique, dont le coût trophique est sans doute plus élevé, mais qui est, elle aussi, visitée dans le secondaire :

> Une autre manière de trouver le résultat est de calcu1er la dérivée $f'(p)$ et de trouver p tel que $f'(p) = 0$. On a $f'(p) = 1 - 2p$. Elle s'annule bien pour $p = 1/2$. Le changement de signe de sa dérivée (positif avant et négatif après) montre qu'il s'agit bien d'un maximum. Pour cette fonction, le passage par le calcul de la dérivée ne se justifie pas car on connaît ses propriétés. En revanche, pour des fonctions un peu plus compliquées, ce type de calcul est nécessaire (bien sûr pour des fonctions dérivables) ou du moins très commode dans le cadre de l'étude de ces fonctions. (p. 45)

Que se passe-t-il dans le cas de *trois* sexes distincts ? Si p est la proportion de mâles et q celle des femelles, la probabilité de rencontre de trois individus de sexes différents est $f(p, q) = 6pq(1 - p - q)$. Comment trouver le maximum de la fonction f ? Voici ce qu'en dit l'auteur, en faisant allusion à une troisième œuvre mathématique (ici, $r = 1 - p - q$) :

> … il suffit de savoir que la notion de dérivée se généralise à ce type fonction. On trouve le maximum quand la dérivée par rapport à p et celle par rapport a q s'annulent simultanément, c'est-à-dire pour $p = q = 1/3$, donc pour $r = 1/3$. Alors $p = 6(1/3^3) = 2/9 = 0{,}222...$ inférieur à la valeur 1/2 obtenue pour deux sexes. (p. 46)

Sans le justifier, l'auteur indique ensuite que, dans le cas de n sexes, la probabilité maximale d'une rencontre de n individus de sexes différents est $P = \frac{n!}{n^n}$. Il ajoute : « Comme n^n croît plus vite que $n!$, cette probabilité tend donc vers 0. » Bien entendu, il utilise en tout cela des œuvres mathématiques qui figurent au programme de la visite scolaire classique des œuvres. L'un des problèmes que soulève le choix des œuvres au cours d'une enquête est celui du *niveau trophique* des connaissances utilisées, qu'il convient de chercher à abaisser pour diminuer le « coût » de l'étude. C'est peut-être là un art que nous avons à reconsidérer et que j'illustrerai sur deux exemples dont l'un est ancien et l'autre récent. On enseignait autrefois – au XIX^e^ siècle – un outil mathématique qui se substituait dans bon nombre d'utilisations élémentaires au calcul différentiel (alors absent du programme du secondaire) et que l'on peut énoncer rigoureusement ainsi :

Étant donné un réel $a \in \mathbb{R}_+^*$, quels que soient les réels $x_i \in \mathbb{R}_+^*$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) tels que $\sum_{i=1}^{n} x_i = a$, on a $\prod_{i=1}^{n} x_i \leq \left(\frac{a}{n}\right)^n$, l'égalité étant réalisée si et seulement si $x_i = \frac{a}{n}$ pour $i = 1, 2, ..., n$.

Dans le cas de trois sexes différents en proportion p, q, r, on voit que la probabilité de rencontre de trois individus de sexes différents, qui vaut $6pqr$, est maximale en même temps que le produit pqr, dont la somme des termes est bien constante, égale à 1 ; cette probabilité est donc maximale lorsque $p = q = r = 1/3$. Il en va de même dans le cas de n sexes : avec des notations évidentes, la probabilité $n!p_1p_2\ldots p_n$ est maximale quand $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 1/n$, le maximum étant donc $n!/n^n$. Un calcul numérique effectif peut nous dispenser de maîtriser la théorie des limites de suites pour conjecturer la limite de $n!/n^n$, comme le suggère la figure 1 ci-après.

papiers | Police | Alignement

B20 | =FACT(A20)/PUISSANCE(A20;A20)

A	B	C	D	E	F
1	1				
2	0,5				
3	0,22222222				
4	0,09375				
5	0,0384				
6	0,0154321				
7	0,0061199				

Figure 1. Calcul de valeurs successives de $n!/n^n$.

Le choix des œuvres et leur étude *finalisée* sont donc des problèmes que le paradigme de questionnement du monde conduit à réouvrir : le répertoire des œuvres à étudier reste chaque fois à établir, et leur étude elle-même reste à préciser et à réaliser, en fonction de l'enquête qui la motive.

Je voudrais m'arrêter enfin sur la question des conditions de viabilité de la dialectique des questions et des œuvres telle que l'exprime le schéma herbartien, que je rappelle donc encore une fois :

$$[S(X\,;Y\,;Q) \rightarrow \{R_1^{\lozenge}, R_2^{\lozenge}, \ldots, R_n^{\lozenge}, Q_{n+1}, \ldots, Q_m, O_{m+1}, \ldots, O_p\}] \hookrightarrow R^{\heartsuit}.$$

Ici, les membres de X sont *a priori* quelconques : le schéma se veut universel. Il peut s'agir par exemple de chercheurs en didactique ξ et l'on aura alors un système de recherche $S(\Xi\,;\mathrm{Z}\,;Q)$. Le travail accompli au cours de ces dernières années a conduit à dégager plusieurs « propriétés » optimisant l'activité des $x \in X$ (et, bien sûr, des $y \in Y$) ou encore des $\xi \in \Xi$ (et des $\zeta \in \mathrm{Z}$) dans le paradigme du questionnement du monde, lequel, en retour, en favorise l'émergence et le développement. Je les présenterai succinctement ici comme des *attitudes*.

La première propriété est l'attitude *herbartienne*. Cela signifie pour l'essentiel que x ne fuit pas les *questions* Q rencontrées, c'est-à-dire les questions objectivement *ouvertes* pour lui. (Une propension contraire consisterait à être attiré par les réponses *sans passer par les questions*.)

La deuxième propriété est l'attitude *procognitive*, qui consiste à rechercher « vers l'avant » (*pro-*) la connaissance adéquate, et donc à aller vers ce qui n'est pas (encore) connu dès lors que cela semble potentiellement utile. (La propension inverse, dite *rétrocognitive*, consiste à rechercher les outils de l'étude dans ce qui est *déjà* connu, sans s'aventurer dans des domaines jusque-là inexplorés.)

La troisième propriété est l'attitude *exotérique*, qui consiste à refuser de se situer comme ayant une maîtrise adéquate d'un quelconque des domaines qu'une enquête donnée sollicite. (La propension inverse consiste à se regarder comme un *ésotérique*, maître de tel domaine particulier, et donc voué à ne rien apprendre de nouveau en cette matière.) L'exotérique, qui peut se situer à différents *degrés d'exotéricité*, fait sien le principe selon lequel, en vérité, *il n'existe pas d'ésotérique*.

La quatrième propriété complète la précédente : elle s'exprime dans l'attitude dite d'*encyclopédiste ordinaire*, c'est-à-dire de gestionnaire d'une encyclopédie (personnelle ou institutionnelle) rassemblant les connaissances ordinaires effectivement rencontrées et utilisées au fil des enquêtes successives dans une foule de domaines. Il est clair que l'adjectif « ordinaire » a ici une acception *relative*, qui dépend des enquêtes réalisées jusque-là ; mais cette attitude s'oppose à la propension à rechercher des connaissances « extraordinaires », grandioses, héroïques, que tendent à mettre en avant les discours apologétiques spécifiques à chaque champ disciplinaire.

Contre un long passé de soumission à la pieuse visite d'œuvres hiératisées, on peut s'interroger sur les conditions qui seraient de nature à populariser le *questionnement* du monde et l'étude des questions qui en résulte, conditions qui tendraient à rendre les questions populaires et les œuvres utiles désirables – ce qui réaliserait, peut-on penser, un véritable changement dans la civilisation. Peut-on penser une organisation scolaire qui permettrait d'atteindre de tels objectifs ? Peut-on envisager une transition historique vers une telle organisation à partir de l'état actuel de l'école ? Je n'irai pas plus loin sur ces questions ici. Mais je vous invite à lire, faute de mieux, les pages 6 à 8 de la séance 1 du Séminaire TAD/IDD 2012-2013.

Références

ATILF. (2001). *Trésor de la langue française informatisé*. http://atilf.atilf.fr/tlf.htm

Ayto, J. (1990). *Dictionary of word origins*. Columbia Marketing.

Bouligand, G. (1962), Regards sur la formation mathématique. Dans F. Le Lionnais (Éd.), *Les grands courants de la pensée mathématique* (pp. 532-542). Paris : Albert Blanchard.

Bourlet, C. (1922). *Cours abrégé d'arithmétique*. Paris : Hachette.

Brousseau, G. (2010). *Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques (1998)*. http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf

Brunot, F & Bruneau, C. (1956). *Précis de grammaire historique de la langue française*. Paris : Masson.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble : La pensée sauvage.

Chevallard, Y. (2013). *Journal du séminaire TAD/IDD 2012-2013.* http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=212

Défourneaux, M. (1994). *L’anglais des sciences*. Chenevières-sur-Marne : Assimil.

Elasticity of a function. (s.d.). Dans *Wikipedia*. https://en.wikipedia.org/wiki/Elasticity_of_a_function

Études littéraires. (2005-2006). Accord du participe passé [Forum de discussion en ligne]. Récupéré le 25 avril 2013, de http://www.etudes-litteraires.com/forum/topic88-accord-du-participe-passe.html

Fochi, F. (1969). *L’italiano facile. Guido allo scrivere e al parlare*. Milan : Feltrinelli.

Gyrovague. (s.d.). Dans *Wikipédia*. https://fr.wikipedia.org/wiki/Gyrovague

Harper, D. (2001-2015). *Online etymology dictionary*. http://www.etymonline.com/

Le collège en poche. Tout le programme de 6e en fiches. (2002). Maxi-Livres.

Messinao, F. (2012). *Des idées toutes faites et pas forcément toutes fausses en sciences physiques*. Paris : Ellipses.

Pastoureau, M. (avec Simonnet, D.). (2005). *Le petit livre des couleurs*. Paris : Éditions du Panama.

Pavé, A. (2011). *La course de la gazelle. Biologie et écologie à l’épreuve du hasard*. Paris : EDP Sciences.

Reber, A. H. (1985). *Dictionary of psychology*. New York, NY : Viking Penguin.

Axe 1
Perspectives de la TAD, rapports avec d'autres approches

Eje 1
Perspectivas de la TAD y relaciones con otros enfoques

Axis 1
Perspectives in ATD, relations to other approaches

The ATD and other approaches to a classical problem posed by F. Klein

Carl Winsløw
IND, Faculty of Science, University of Copenhagen, Denmark

Resumen. En un intento de situar la teoría antropológica de lo didáctico en el «continente didáctico», mostramos cómo su problemática de origen, la transposición didáctica, está relacionada con un problema mucho más antiguo formulado vívidamente por Felix Klein en 1872. En primer lugar, examinamos el tratamiento que propone el propio Klein (y, tras él, varias generaciones de didactas alemanes). A continuación, mostramos cómo modelizarlo con la TAD. Finalmente, intentamos situar la TAD en relación con alternativas más recientes, no en términos de los aparatos teóricos sino de las distintas maneras que proponen para abordar el problema de Klein.

Résumé. En vue de situer la TAD dans le « continent didactique » nous montrons comment sa problématique d'origine, la transposition didactique, est reliée (et s'applique) à une problématique beaucoup plus ancienne formulée de façon éclatante par Felix Klein dès 1872. Nous examinons d'abord comment cette problématique fut traitée par Klein lui-même (et, après lui, par des générations de didacticiens allemands). Ensuite, nous montrons comment la modéliser avec la TAD. Enfin, nous essayons de situer la TAD par rapport à des alternatives plus récentes, non en termes d'appareillage théorique mais en examinant les principales façons dont ces alternatives abordent le problème de Klein.

Abstract. In an attempt to situate the ATD in the "didactic continent", we argue that the basic problem of didactic transposition is related (and applies) to a much older problem, formulated forcefully by Felix Klein as early as 1872. We first consider how this problem was addressed by Klein himself (followed by generations of German didacticians). Then we explain how the ATD can help modelling the problem in modern terms. We also try to situate the ATD along with more recent alternatives, not in terms of theoretical machinery but in terms of the principal ways in which these alternatives have approached Klein's problem.

IV[e] congrès international sur la TAD (Toulouse, 21-26 avril 2013)
Axe 1. *Perspectives de la TAD, rapports avec d'autres approches*

Winsløw, C. (2017). The ATD and other approaches to a classical problem posed by F. Klein. Dans G. Cirade et al. (Éds), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* (pp. 69-91). https://citad4.sciencesconf.org

1. Klein's double discontinuity and German didactics

When did the didactics of mathematics begin? In the absence of any clarification of terms, this question is as naïve as the answer which appears to be quite common among people who recognize themselves as "didacticians of mathematics": namely, that it began in the early 1970s (or, stretching things a bit, the late 1960s) with the establishment of institutions like the IREMs (France, from 1968), the IDM (Germany, 1969), the FI (Netherlands, 1971), etc. The answer is naïve because it corresponds to personal memory, hear-say and the creation of familiar institutions and terms. But according to the ATD,

> didactics is the science studying the conditions that govern such "didactic situations", i.e. social situations which hinge on some "didactic triplet" comprising some *x*, some *y*, and some didactic stake *O*. The didactics of mathematics is concerned with those cases in which the didactic stake *O* is regarded as pertaining to mathematics (Chevallard, 2015, p. 174).

Didactic situations with a stake "regarded as pertaining to mathematics" have, of course, existed as long as the science of mathematics itself, that is, no less than 2500 years. There is no reason to believe that these situations were experienced in a completely different way at the time of Plato – for instance, as less challenging. But when did they get to be studied by a "science"? The clue of the above quote is the word *conditions* – the conditions of such situations have indeed changed dramatically, with the establishment of mass instruction in mathematics, organized in national school systems. This change happened in most of the Western world in the 19th century. Such a change in conditions could well (in fact, does) explain the rise of a science to study them. But then, why in 1970 and not 1870?

In this section, we wish to demonstrate that the didactics of mathematics, defined as above, indeed has solid roots in the late 19th century. Also, we present a central problematic for the didactics of mathematics, formulated in 1908 and of unaltered (if not larger) importance today.

1.1. Felix Klein: a pioneer of didactics

Felix Christian Klein (1849-1925) is well known to everyone with a mathematics background, if not for other reasons then because of the elementary objects of algebra and topology that bear his name. Didacticians of mathematics will also know of the "Klein medal", attributed by the ICMI since 2004. In a short notice motivating the introduction of this prize, Hodgson (2002) writes:

> Slightly before the turn of the century Klein became interested in the teaching of mathematics at school level. He gave summer courses for teachers in which he intended to make accessible to secondary school teachers some of the most recent mathematical developments of his time. This eventually led him to promote the idea of presenting "elementary mathematics from an advanced standpoint", to use his own expression, with the aim in particular of providing teachers with a comprehensive view of basic mathematics. In 1908 Klein was appointed, at the Fourth International Congress of Mathematicians, as President of a committee with the mandate to constitute an International Commission to organise a comparative Study on the methods and plans of mathematics teaching in secondary schools. This International Commission eventually developed a much wider scope of interest and became the ICMI as we know it today, with Klein acting as its President until 1920.

From this instructive exposition, we learn in particular that Klein was involved, in the early 20th century, in a "comparative study" of conditions which fit the previous definition of didactics of mathematics. In fact, Klein's interest in conditions governing the teaching of mathematics began well before the "turn of the century". In his inaugural lecture as a professor in Erlangen, held on December 7, 1872, he exposed a number of principles for the education of future (high) school teachers, and for mathematics instruction at university in general. His motivation seems to be informally gathered symptoms of defects in school mathematics which are far from unknown today (while the didactician of today would use another term than "opinion" while reporting from interviews and classroom observations):

> An all too widespread opinion that one often hears in school circles is that mathematics is just not important. The worst of it is that this opinion is very often justified as the mathematics that is often presented possesses little that is of real educational value. Instead of developing a proper feeling for mathematical operations, or promoting a lively, intuitive grasp of geometry, the class time is spent learning mindless formalities or practicing trivial tricks that exhibit no underlying principle. (Rowe, 1985, p. 139)

Despite the distance in time (140 years), the paradigm of “visiting works” (Chevallard, 2015) is certainly not far from Klein’s description of a teaching focused on “mindless formalities”. As many present-day didacticians (to whom we return in Section 2), Klein locates the main cause for this sad state of affairs in the formal education of teachers, then identifies the university teaching of mathematics as the pivotal point:

> It is here that we, as university teachers of mathematics, have a wide and hopefully rewarding field for our activity. (…) If we educate better teachers, then mathematics instruction will improve by itself (…) We, as university teachers, require not only that our students, on completion of their studies, know what must be taught in the schools. We want the future teacher to stand <u>above</u> his subject, that he have a conception of the present state of knowledge in his field, and that he generally be capable of following its further development. (…) But this higher task also requires improved instruction at the universities. (Rowe, 1985, p. 139).

This idea of “standing above” the subject to be taught was developed by Klein in the following years, and a detailed account of his methods to improve university mathematics instruction along these lines was given in the remarkable treatise *Elementary mathematics from a higher viewpoint* (Klein, 1908/1932). It is in the preface that book that he formulates, in a much more precise way, what he considers the fundamental problem for mathematics teacher education – and which, as this paper will argue, is indeed at the roots of didactics of mathematics as a science. We expose and analyse “Klein’s problem” in Section 1.2.

Klein certainly did not engage in those “empirical” activities – interviews, tests, video recording, transcription of classroom dialogue etc.) – which many didacticians today consider a hallmark of research in didactics of mathematics. But in any science the formulation of fundamental problems is certainly as much “part” of it as the work of generations of researchers inspired by the formulation; and as we shall see in Section 1.3, the didactics of mathematics – not least in Germany – considers Klein a key reference even today. He is without any doubt a pioneer in our field.

1.2. Klein’s problem and an ATD interpretation

The organisation of mathematics teacher education and university mathematics education, as well as their interplay, depends on institutions, educational systems and so on. Klein’s problem is relevant wherever the following conditions hold:

- “university mathematics education” means the teaching of modern, pure subjects like linear algebra, functional analysis, etc.
- “mathematics teacher education” includes university mathematics education as a substantial if not unique component.

In fact, this is a very common situation for the education of secondary level mathematics teachers – just as in the days of Klein. In this situation, Klein considers the history of the teacher, from being a pupil in school, going to university to study mathematics, and finally coming back as a teacher in school:

> At the beginning of his studies, the young student is faced with problems that in no way remind him of the [mathematical] things he worked with in school; naturally he then forgets these matters quickly and thoroughly. If he becomes a teacher after having finished his studies, he must suddenly teach this time-honoured elementary mathematics in a school like fashion; and as he cannot by himself see the connection between this task and university mathematics (...) his university studies become just a more or less pleasant memory which has no influence on his teaching (Klein, 1908/1932, p. 1).

This problem is referred to, by German didacticians, as « the double discontinuity », for obvious reasons (illustrated in figure 1) – in fact, this is also the term employed by Klein himself. It represents two related and in a way “inverse” transition problems. First, for the beginning university student who feels alienated by the material he is presented with; this is a frequent theme in didactical research on university mathematics teaching (cf. Gueudet, 2008). And secondly, the transition from teacher education to teacher practice is equally like entering (and in this case, returning) to another “world” – this transition problem is a fundamental problem in research on teacher education (see, for instance, Winsløw, 2009).

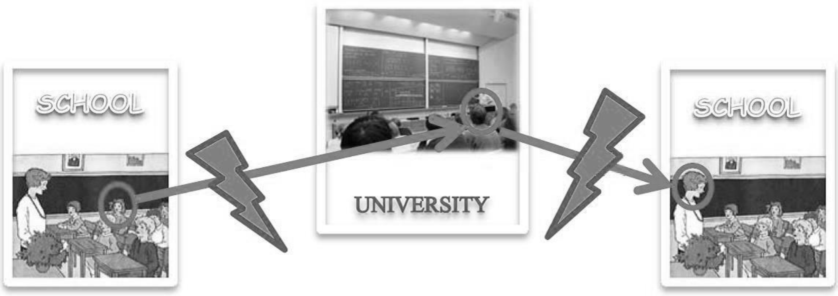


Figure 1. A simple illustration of Klein's double discontinuity.

In his book, Klein focuses on the discontinuity between mathematical contents taught in school and in university. Within the ATD, we could symbolize this model of the double transition as

$$O \rightarrow \Omega \rightarrow O$$

where O indicates praxeological organisations taught in school, and Ω the ones taught at university. According to Klein, neither the beginning student nor the novice teacher is able to see any connection between O and Ω. It is implicitly understood that such connections can be seen "from a higher standpoint". Most of Klein's book is about exposing connections of this type; the audience to which Klein addresses himself is university students at the end of their studies, and so his main aim is to ease the second transition (from Ω to O). A specific case of O and Ω , as well as Kleins treatment of the relation, will be considered in Section 3.

To model Klein's problem more precisely – and in a fuller version than just one of bridging between praxeologies – we make explicit that *three* different roles or positions, related to the mathematical praxeologies, are involved in Klein's problem: that of school student s, university student σ, and school teacher t. Also as the naming indicates, we have two institutions involved, the school S and the university U. With the classical notation of Chevallard (1991), designating by $R_I(x, O)$ the relation (in French, *rapport*) of a position x within an institution I to a praxeology O living in that institution, we can then model Klein's problem as the double transition

$$R_S(s, O) \rightarrow R_U(\sigma, \Omega) \rightarrow R_S(t, O)$$

with the claim that the last two relations are not really or easily based on the former ones.

We notice the individual and synchronic perspective of considering the transition between various *relations* to praxeologies, as opposed to the study of didactic transpositions

$$\Omega_U \rightarrow O_S$$

which is the main perspective introduced by Chevallard (1991) and exemplified through the case of praxeologies related to distance: in this case, Ω_U is the sector related to metric spaces as developed and taught in universities, and O_S is a sector on distance in school geometry, the latter also considered in different states corresponding to reforms of the school curriculum. To study the transposition $\Omega_U \rightarrow O_S$ necessarily involves a diachronic and institutional perspective, which is a consistent trait of most research done in the setting of didactic transposition theory.

Meanwhile, the second part of Klein's problem, as described above, can be considered as it occurs at a particular moment in time, and even without much attention paid to the differing institutional conditions and positions in *U* and *S* – indeed, that is to a large extent the approach taken by Klein and many other scholars after him (cf. Sections 1.3 and 2 here). The model of Klein's problem in terms of the ATD is therefore not a simple "reformulation" but adds significantly to its explicit contents. At the same time it is not just a variation of didactic transposition, given the individual perspective of "positions" within two institutions which, in fact, makes it a double transition.

Finally, we note that the aim of Klein's book is to prepare and smoothen the transition $R_U(\sigma, \Omega) \rightarrow R_S(t, O)$ by having students *in university* (that is, in position σ) study elementary praxeologies O' (for Klein, almost *identical* to praxeologies O living in school) while drawing on their relation to relevant (related, but more "advanced" praxeologies Ω. This means that his main aim is to support the first part of the transition

$$R_U(\sigma, \Omega) \rightarrow R_U(\sigma, O') \rightarrow R_S(t, O)$$

while implicitly saying that the second part will then somehow be easier ("If we educate better teachers, then mathematics instruction will improve by itself"). The fact that he considers mainly the transition $R_U(\sigma, \Omega) \rightarrow R_U(\sigma, O')$ can be seen as a reason why his book is focused on content matter, leaving the differences between being a university student and a school teacher somewhat in the background.

1.3. German didactics after Klein

Klein's contributions to the didactics of mathematics are not limited to formulating the problem outlined above, along with some personal ideas for solving it in the case of specific mathematical contents. Besides publishing more than thirty books and articles dealing with educational matters (Rowe, 1983), he supported the initiation of research projects on mathematics education both in Germany and internationally; he also supervised the first German doctorate (*habilitation*) in didactics of mathematics in 1911 (Kilpatrick, 1992). For several decades, Germany has had several full professorships in didactics of mathematics, usually located in mathematics departments and with a special responsibility for mathematics teacher education, which to a large extent has followed up on the ideas proposed by Klein.

In section 2.1, we shall outline the continued efforts in Germany related to Klein's problem. For more general details on the fascinating history of early German *Mathedidaktik* and its institutions, we refer to Lenné (1969) and Kilpatrick (1992).

2. Theoretical approaches to the problem

We now outline, in rapid succession, how a variety of research programmes in the "didactic continent" – in particular the ATD – have approached the problématique presented in the preceding section.

2.1. German *Stoffdidaktik*

It is only natural to begin with a research programme directly rooted in Klein's work, namely the German *Stoffdidaktik.* According to Sträßer (2013), it is "difficult to distinguish Stoffdidaktik from mathematics" since its main objective is content analysis which itself applies essentially mathematical methods. While this analysis is done in view of rendering the content accessible or "understandable" to students, its consistency and clarity are evaluated much like proofs in mathematics, that is, by peers – even if experiments with students can also occur. In this sense, as Sträßer observes, it is not unlike the *a priori* analysis in the French tradition of didactical engineering.

The proposal of the *Stoffdidaktik* tradition in view of Klein's problem is, therefore, to involve teachers in "deep" studies of elementary contents, based on their previous advanced studies. Text books and lectures for teachers, produced in this tradition, follow the principle and example of Klein (1908) while over the years, broader and differentiated visions of more extended sections of school mathematics have naturally developed. In German universities, after the bachelor level studies in pure mathematics, students will take courses such as "didactics of geometry", "didactics of arithmetic" etc., to prepare to become teachers; while these courses are no longer limited to *Stoffdidaktik*, a rapid survey of on-line course descriptions suggest that the *Stoffdidaktik* approach is very far from having disappeared in this context.

At the same time, the criticisms of *Stoffdidaktik* – both as a research paradigm and as a main basis for teacher education – are also very visible, especially since the 1970s. As in the rest of the world, new ideas from the psychology and social sciences were imported and coupled with a stronger interest in individual and social aspects of children's learning, with much less emphasis on the clarity and economy of content exposition (by the teacher). For instance, Steinbring (1997, p. 44) suggests that

> 'Stoffdidaktik' is dominated by too simple a model to solve didactical questions and research problems. (…) Though 'Stoffdidaktik' in the meantime notices the problems of understanding that students have in learning (…) the principle remains unchallenged that mathematical knowledge represents a finished product, and that the teaching-learning-process can be organised linearly, emanating from the content, over the teacher, into the students' heads, and can ultimately be controlled and influenced at every step by mathematics educators...

In outline, while the *Stoffdidaktik* approach to Klein's problem is restricted to working with $R_U(\sigma, O)$, there has been a growing scepticism of the relevance and especially the sufficiency of this work, in order to prepare the future teachers for their profession with its needs to relate not only to school mathematics but also to children and other "non-mathematical" conditions of the profession.

2.2. Typologies of teacher knowledge

In Germany as well as internationally, it has become increasingly contested that a wide, deep and broad knowledge of mathematics is sufficient to prepare future teachers. Since the 1960s, this tendency is supported by a wide variety of qualitative and quantitative studies of how teachers' characteristics (such as subject matter knowledge) relate to the way they teach and to their students' learning. We are talking about a variety of studies because not only the results and methods vary, but the very question of "good teacher preparation" depends, clearly, on the theoretical meaning given to "teachers' characteristics", "way to teach" and "students' learning". For an overview of this type of research, we refer to Hill et al. (2005). The main point here is that such research efforts have produced a number of intricate models of mathematics teacher knowledge which clearly can be brought to bear on Klein's problem.

Indeed, a main challenge for research along these lines is to define categories of mathematics teachers' knowledge which are disjoint, operational for empirical research (i.e. can be measured or at least somehow "observed"), and which together "cover" all the knowledge relevant for teaching (or at least, enough to be significantly correlated with measures of teaching quality or of student performance).

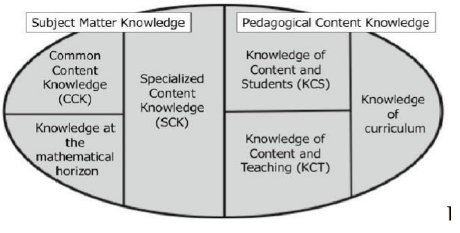


Figure 2. A topology of mathematics teacher knowledge (from Ball & Bass, 2009).

One of the most influential categorizations of this type in recent years has been offered by Ball, Thames and Phelps (2008), identifying six forms of *mathematical knowledge for teaching* as shown in figure 2. Three of them concern what is called subject matter knowledge; and one of these categories, *mathematical knowledge at the horizon*, is a kind of "complement" to Klein's idea of mathematical:

> it as a kind of elementary perspective on advanced knowledge that equips teachers with a broader and also more particular vision and orientation for their work (Ball and Bass, 2009, p. 10).

In should be noted that by "advanced knowledge", researchers in this programme do *not* usually mean academic mathematics (as taught and developed in universities). The authors in fact refer to teachers' knowledge of school mathematics at more advanced levels than the one they teach (e.g. while thinking of what students will need to know in the next grade).

The left part of the model in figure 2 thus specifies three different forms of $R_S(t, O)$ where the subscript (S) is actually not very essential as the testing and development of the relation, within this research programme, seems to be almost independent of institutional context. The absence of an institutional perspective and, consequently, of any explicit distinction between university and school mathematics, makes it very difficult for this model to approach Klein's problem or, indeed, the question of the genesis (not just measurement) of $R_S(t, O)$, at least in the (common) context where teachers' education takes place outside of the school.

On the other hand, the right part of the model in figure 2 reflects (and implicitly justifies) the compartmentalization of teacher education which is characteristic of the development in many countries since the 1960s, with courses in method, child psychology, curriculum theory and didactics being added to a more or less solid basis in mathematics courses. This, however, is likely to result in new (additional) versions of Klein's problem: will the new teacher see any links between these more or less academic courses, and the tasks she faces in school? Will "bridging" measures also be needed for these (with treatises e.g. on "school children from the higher standpoint of academic psychology")?

2.3. The theory of situations

A radically different model of mathematics teacher knowledge is found in the research programme founded by Brousseau:

> The teacher (…) must produce a recontextualization and a repersonalization of the knowledge [which the student is about to learn, CW]. It must become the student's knowledge, that is to say, a fairly natural response to relatively particular conditions, conditions that are essential if she is to make sense of

> this knowledge. Each item of knowledge must originate from adaptation [of the student, CW] to a specific situation… (Brousseau, 1997, p. 23)

The relation to knowledge most often developed in universities can be described as deductive, i.e. students learn (or at least, see) how to deduce from axioms to theorems, and from theorems to particular cases ("exercises"). In schools, students need to work in more concrete settings. Therefore school teachers must know, choose and stage "*cases*" that allow students to "make sense" of the more general knowledge. In other words, to teach a mathematical knowledge O, a teacher must know of such "cases" – mathematical situations for O – and also of the conditions for realizing them in a classroom (as didactic situations), with students' outcome being the target knowledge. We can say that $R_S(t, O)$ is always associated with one or more situations which, under suitable conditions, will allow $R_S(s, O)$ to be established.

The theory itself is not explicitly concerned with Klein's problem. However, as we have already mentioned, didactic engineering – the construction and study of experimental didactic situations – does contain elements which are close to his idea of studying the elementary from an advanced standpoint. And indeed, these analyses may be brought to bear on Klein's problem when coupled with basic notions of the theory. A famous example is the puzzle situation as a fundamental situation for Thales's theorem (cf. Winsløw, 2007, appendix). I would like to add the private hypothesis that the relative ease with which university students of mathematics engage with tools of the theory of didactic situations could be ascribed to the primacy, in its approach to teaching, of analysing mathematical contents (of type O' and Ω), with a potential and mutual enrichment of relations of both $R_U(\sigma, O')$ and $R_U(\sigma, \Omega)$. But to proceed to build, from this, a strong relation $R_S(t, O)$ for the teacher in the institutional setting of the school would most likely require an integrated form of this kind of university experience with teaching practice in a school. One can interpret at least some of the widespread dissatisfaction with recent teacher education reforms in France as concerned with the loss of an institutional framework which enabled this last step.

2.4. The ATD and the profession of teaching mathematics

As we have already seen, the ATD provides natural and precise machinery to model Klein's problem, taking into account also the institutional discontinuities which are, at least to some extent, ignored or implicit in other approaches.

The constant and deliberate focus on the professional practice of the teacher – inseparable from the institutional conditions of schools – is indeed an evident trait of ATD research from the beginnings related to didactic transposition (Chevallard, 1991). The nature of the teachers' struggle to develop an institutionally viable relation to the praxeologies to be taught at school, and the lack of support he may find in his recollections of similar university praxeologies, has been forcefully demonstrated in a number of striking case studies (e.g. Barbé et al., 2005).

While early research was almost exclusively focused on one school system (that of France and, at the limit, very similar ones), later developments – not least the introduction of the scale of didactic co-determination (Chevallard, 2002) – has enabled a fuller *anthropological perspective*, in which also higher levels of determination of didactic and mathematical practices in the school become objects of research. In this way, not only are these practices seen as relative to the institutional contexts of the school and university institutions, but these are themselves understood as relative to wider conditions and constraints which vary according to pedagogies, societies and even cultural systems, and which could then be studied in a comparative perspective (Artigue & Winsløw, 2010).

This also leads us to consider Klein's problem as more than a natural phenomenon, despite its endurance in time within specific societal frames (such as Western European ones). With such a perspective, it becomes possible to study the professional development systems for mathematics teachers in even remote societies as more than exotic curiosities or at least slightly irrelevant to our own versions of the problem (cf. e.g. Elipane, 2012; Miyakawa & Winsløw, 2013).

In the same vein, the wider potentials in regard to Klein's problem afforded by long-time experiences with drawing directly on the ATD as a paradigm for French teacher education (e.g. Chevallard, 2006) could become much better understood, and also explored in other contexts. But this is largely work for the future.

3. The problem considered in a contemporary context

In the preceding section, we have taken a theoretical approach to the task of situating the ATD within the wider "continent" of work in didactics of mathematics, based on a variety of approaches to Klein's problem as introduced in Section 1. We now take a more concrete approach to this task, as we will demonstrate the use of the ATD to analyse a specific form of the problem, namely the study of the (real) exponential function – certainly an inevitable object of most secondary level mathematics curricula – as it occurs in the context of a "capstone course" at the University of Copenhagen. But we first digress to explain what a capstone is and how it relates to Klein's problem.

3.1. Capstone courses

Klein's *Elementarmathematik* (1908) is in fact based on notes from his lectures to students intending to become mathematics teachers (these notes were carefully polished by one of his assistants). Addressing himself to such students, Klein emphasizes that his main aim is to

> show you the mutual connection between problems in the various fields, a thing which is not brought out sufficiently in the usual lecture course, and more especially to emphasize the relation of these problems to those of school mathematics. In this way I hope to make it easier for you to acquire that ability which I look upon as the real goal of your academic study: the ability to draw (in ample measure) from the great body of knowledge, put before you there, a living stimulus for your teaching (Klein, 1908, p. 2).

Notice here that Klein distinguishes the kind of lecture exemplified by the book from *usual lecture courses* which are, much as today, focused on one "field" (in the terminology of the ATD, a *domain* or even a *sector* of mathematics), reaching far into this part of mathematics with little or no connection to other academic "fields", let alone school mathematics. One can summarize the goals for Klein's course, as set out above, in the following general terms:

- Show students of discipline, who already acquired specialized knowledge within a number of its domains, the *connections* between those domains and make coordinated use of them;
- Show students relation between the academic knowledge achieved in specialised courses, and "problems" which are directly relevant to the future profession of the students;
- Help students acquire the "ability" (that is, autonomous capacity) to draw on the large body of knowledge encountered in universities as a resource for their professional life.

We note here that Klein emphasizes the last part as the "real goal" of his course, while the first two points are, of course, closer to what a lecture course could more concretely do, as an attempt to reach the "real goal".

We have chosen to rephrase this passage of Klein in order to situate his problem within a more general quandary in modern university education: the distance between any profession and the diet of specialized but disconnected "course modules" which make up most or all of most contemporary university programmes. But after "passing" all of these modules – usually one by one – what is the "end result"? And what difference does it make to the professional (former student) *besides* possibly serving as an entrance ticket to the profession?

Naturally, any meaningful answer depends both on the *study programme* and the *profession* in question. But courses with Klein's three aims (in their generalized form cited above) exist in many university programmes, in view a more or less specific set of professions. In American universities, they are often named "capstone courses":

> The capstone course typically is defined as a crowning course or experience coming at the end of a sequence of courses with the specific objective of integrating a body of relatively fragmented knowledge into a unified whole. (…) this course provides an experience through which undergraduate students both look back over their undergraduate curriculum in an effort to make sense of that experience and look forward to a life by building on that experience (Durel, 1993, p. 223).

We clearly recognize Klein's three aims (formulated in a generalized form above) of *showing relations among* different parts of the previous study programme, and *between* the programme and professional knowledge, in view of *preparing* for drawing on the academic knowledge in professional life.

Some readers may, at this point, ask why one course (among many others) should assume the responsibility for the internal and external connectedness of an entire study programme, as well as for the autonomy of the future professional in terms drawing on the academic knowledge "put before them" in the programme? Why not create study programmes which are internally coherent from the beginning and always focus on professionally relevant aims? One large study and research course based on questions of the profession (perhaps along the lines of Chevallard, 2006) without any need to study academic disciplines first?

This is not the place to answer the general question. It suffices to note here that the present state of affairs in virtually any university programme leaves as much reason now as in 1908 to pursue the three aims of Klein discussed above, in capstone courses as well as by other means. We now return to a very concrete case from the setting of a capstone course for future high school teachers, given towards the end of a university programme in pure mathematics.

3.2. "Mathematics for teaching" in Copenhagen

At the University of Copenhagen, almost all mathematics courses focus on some specific sector or domain of pure mathematics. Only a minority (about 40%) of the students who major in mathematics become teachers. Many of them remain undecided about career plans during most of their studies – they basically share a more or less inflammatory enthusiasm for abstract mathematics.

It should be noted here that to become a high school teacher in Denmark, one needs to study two disciplines, normally a major (for 3-4 years) and a minor (1½-2 years). Students who do a minor in mathematics study only the first parts of the major programme in mathematics, including abstract algebra, analysis and differential geometry. For some of these students, that material appears both relatively advanced and disconnected from what they perceive as relevant to teach mathematics in high school. Then, a few years ago, a course on "Mathematics in a teaching context" (UVmat) was introduced as an option at the bachelor level, primarily in view of students who take mathematics as a minor (but open to others interested in teaching). In recent years it was co-taught by the author and a colleague; the course has gradually adopted the idea of serving as a capstone course and much along with the aims of Klein, as presented above. However, since our course is much more relating on student activity than on lectures, we also have to relate to frequent cases where students relation $R_U(\sigma, \Omega)$ to the “advanced” knowledge is insufficient as a base for any “higher viewpoint”; so the course also has a remedial or at least diagnostic function for the education of these students.

As a consequence, the course has a relatively limited scope in terms of the sectors from high school mathematics that we work with, namely *equations and polynomials*, *number systems* (including a thorough discussion of the real numbers), *functions and modelling*, and *infinitesimal calculus*. Compared to the course of Klein (1908), UvMat is modest in terms of the range and sophistication of the university praxeologies Ω drawn on. On the other hand, our interpretation of what $R_U(\sigma, O')$ should be, for these “high school relevant” organizations O' taught in university, can also be said to be broader, and include interpreting or criticizing “answers” to tasks from O', critical use of instrumented techniques, etc.

We shall now consider how Klein’s problem appears and is worked on in for one theme, the introduction of real exponents (in the sector of number systems).

3.3. Real exponents: problematic in school – and in university

There is a certain variation in the approaches to exponentiation found in text books and, conceivably, therefore in the relation students and teachers in Danish high school (*HS*) will develop to the mathematical organisation O corresponding to the following tasks:

T_1: explain the meaning of a^x for $a > 0$ and x any real number

T_p: explain basic properties p of a^x, such as $a^{x+y} = a^x a^y$, continuity, etc.

Most textbooks define a^x for rational x, using more or less elaborate justifications of the formula $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ based on the definitions of $a^{1/n}$ and a^n. Given that real numbers and limits are not rigorously treated in *HS*, the variation lies in how the books explain the passage to real exponents. Here are some typical examples:

> The power is calculated by approximating the exponent by a finite decimal number. How many decimals you include depends on the required accuracy (Timm & Svendsen, 2005, 26; translated from Danish by the author)
>
> In Chapter 3 we saw how to calculate powers where the exponent is an integer and positive, 0, integer and negative, and rational (fraction). Strictly speaking we have not explained the meaning of a symbol like $7^{\sqrt{3}}$ but we assume CAS will take care of this. (Carstensen, Frandsen & Studsgaard, 2006, p. 82; translated from Danish by the author.)

After this, all books operate with exponential functions as functions defined on $\mathbb{R}$. Similar shortcuts are found in other *HS* text books.

Judging from informal questioning over the past few years, few UvMat students recall the definition of powers with rational exponents, and even fewer ever wondered how to define a^x properly and in general. The fact that the relation to *O* does not develop in university courses is not surprising, given that all texts used in *U* simply *assume* the existence of exponential functions, and their basic properties, as part of the prerequisites from *HS*. Of course, exponential functions appear frequently in the first courses on calculus and analysis – for instance, in examples of calculating Taylor series, as solutions to differential equations, as building blocks in functions of several variables and complex functions, as a tool to study complex numbers (polar form) or functions, etc. Briefly speaking, in $R_U(\sigma, \Omega)$ the basic properties of a^x (for real a, x) are certainly available and have a wider context, but as in *HS*, they are never properly explained at *U*.

There are several classical ways to approach the construction of a^x for $a > 0$ and x real, such as:

(1) "Direct" construction, starting with the case $x \in \mathbb{N}$ and extending first to $\mathbb{Q}$, then to $\mathbb{R}$;

(2) Construction via the inverse function to $\log_e$, itself constructed via the integral $\int_1^x dt/t$;

(3) The initial value problem $dy/dx = ky$, $y(0) = 1$;

(4) The functional equation or "property" $f(x + y) = f(x)f(y)$;

(5) The power series $\sum_{n=0}^{\infty} x^n / n!$

We notice that (1) is similar to the brief explanations found in *O*, but it still relies on deeper properties of $\mathbb{R}$ that are may be identified in Ω but not in *O*.

In UvMat, students get to know the full details which could help them both realize the non-triviality of the construction, and to select appropriate details and tasks for their future students to work with.

The approach (4) only gives uniqueness, but must be combined with one of the others to show existence of a function with this property. It is highly relevant to *HS* mathematics because the functional property is found in many important applications (exponential growth or decay).

In a recent version of the course (2012), we chose to present (1), (2) and (5) in lectures, while leaving the approaches (3) and (4), and the links between them, to an exercise.

We now take a closer look at the tasks left to students and the outcomes. The 25 students worked on the following exercise (part of a weekly assignment for group work; translated from Danish and slightly rephrased to be self-contained):

a) Show that if a function f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfies $f(x + y) = f(x)f(y)$ for all x, $y \in \mathbb{R}$ then $f(0) = 1$ or f is the zero function. Give a (non-zero) example of such a function.
b) Show that if a function as in a) is differentiable in 0, then it is differentiable on all of $\mathbb{R}$. [Hint: look at $(f(x + h) - f(x))/h$ for $h \neq 0$.] What is the derivative of f?
c) You know from calculus that the initial value problem $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = ky$, $y(0) = 1$ has the unique solution $y = e^{kx}$. Use this together with the results obtained in a) and b) to provide a characterization of exponential functions.

The point in b) is that the condition implies that the derivative exists and equals $f'(0)\cdot f$ in all cases. The knowledge to be recalled "from calculus" in c) is the *uniqueness* and *existence* of a solution, can be deduced from Picard's theorem, treated in first year calculus. Uniqueness and existence is also easy to prove directly in this special case, and this in fact is often done in *HS.*

The first questions are technical questions and most students were able to solve them on their own. However, the third point proved to be very challenging for almost all students. The challenge seems to be the word "characterization". In fact, the theoretical point of view involved with recognizing and formulating a "theorem" is not frequently required from students in $R_U(\sigma, \Omega)$ at least in the work prior to UvMat. On the other hand, with the result recalled from calculus and the results proved before, there is – from a technical point of view – a small step to realize and prove that a function *f* is an exponential function (i.e. $f(x) = a^x$ for some $a \geq 0$) if and only if *f* is differentiable at 0 and satisfies $f(x + y) = f(x)f(y)$ for all $x, y \in \mathbb{R}$. Of course there are other possible formulations, and in this case we made a point of leaving the formulation open, so that alternatives could appear (in fact they did).

Looking closer at students' final formulations of theorems, we find a number of shortcomings that are of a more logical nature. One example is shown in figure 3. We note the strange appearance of the letter *k* in part 2) and 3). In 2) an existential quantifier ($\exists$) would be more relevant than the universal ($\forall$), while in 3), the unspecified status of the letter *k* is just as problematic. On the other hand, it appears from the students' proof that these points are really mainly of a formal nature. Indeed, many students produced essentially sound proofs despite occasional lacks of clarity in their statements, as above. For these students, we can focus on the formal features of technology and theory which are, of course, of special importance to $R_{HS}(t, O)$ regardless of the mathematical praxeology *O* involved, as the teacher should not only be autonomous in producing mathematical statements with varying formality (retaining basic correctness) but should also be capable of assessing statements produced by students.

<u>Theorem</u>: Let $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a function. Then the following propositions are equivalent:
1) *f* satisfies $f(x + y) = f(x)f(y)$ for all $x, y \in \mathbb{R}$ and *f* is differentiable at $x = 0$
2) *f* satisfies the differential equation $df/dx = k{\cdot}f(x)$, $f(0) = 1\ \forall k \in \mathbb{R}$
3) $f(x) = e^{kx}$, $k \in \mathbb{R}$

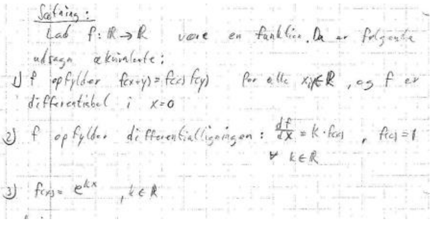

Sætning:
Lad $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en funktion. Da er følgende udsagn ækvivalente:
1) f opfylder $f(x+y) = f(x)f(y)$ for alle $x,y \in \mathbb{R}$, og f er differentiabel i $x=0$
2) f opfylder differentialligningen: $\frac{df}{dx} = k \cdot f(x)$, $f(0)=1$ $\forall k \in \mathbb{R}$
3) $f(x) = e^{kx}$, $k \in \mathbb{R}$

Figure 3. Part of a student solution to c) above – translation from Danish to English.

Roughly a quarter of the 25 students had serious challenges to produce even those parts of the reasoning that are not beyond the kind of arguments that appear in *HS* text books (such as reasoning related directly to the definition of the derivative). A variety of remedial efforts directed at student's relations to academic mathematics, needs to be integrated in such a course along with efforts of bringing these relations to bear on high school mathematics.

4. Concluding remarks

Considering Klein's problem in the concrete mathematical context of exponentiation, we can also say a little more about the roles and contributions of the ATD within the continent of didactic theories. Indeed, the institutional dimension in Klein's problem is made explicit through the reformulation in terms of the relations which are, could, or should exist between various positions (teacher, student) in the institutions of university and school, and similar (but in practice, quite different) mathematical organisations. For instance, we can describe a central feature of TDS as modelling teacher's relation to a mathematical organisation in terms of *situations.* In the case of exponentiation, this could amount to situations in which the characteristic equation $f(x + y) = f(x)f(y)$ should hold for some specific function f (just as the puzzle situation is essentially characterized by the equation $f(x + y) = f(x)+f(y)$). However, as the case studied in some detail above shows, it is a highly non-trivial task to develop university students' autonomous practice with these fundamental properties of exponential functions based on undergraduate courses in calculus. At the same time, within the institutional framework of contemporary university mathematics programmes, most parts of the "topologies" of teacher knowledge may be beyond reach and have to be acquired in the framework of the school. What one *can* reasonably strive to achieve in a university mathematics programme are the more modest aims formulated by Klein, and discussed in Section 3.1. But even within this setting, the qualities and potential impact of $R_U(\sigma, \Omega)$ on $R_U(\sigma, O')$ needs to be studied case by case and could be of considerable interest also for improving other parts of the programme.

Acknowledgement. I wish to thank Prof. Gert Schubring for pointing out a blatant error in an early version of this manuscript.

References

Artigue, M. & Winsløw, C. (2010). International comparative studies on mathematics education: A viewpoint from the anthropological theory of didactics. *Recherches en didactique des mathématiques, 30*(1), 47-82.

Ball, D. L. & Bass, H. (2009, March). *With an eye on the mathematical horizon: knowing mathematics for teaching to learners' mathematical futures*. Paper presented at the 43rd Jahrestagung für Didaktik der Mathematik, Oldenburg, Germany.

Barbé, J., Bosch, M., Espinoza, L. & Gascón, J. (2005). Didactic restrictions on the teacher's practice: The case of limits of functions in Spanish high schools. *Educational Studies in Mathematics, 59*(1-3), 235-268.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné* (2nd ed.). Grenoble: La pensée sauvage.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. Écologie & régulation. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Eds.), *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 41-56). Grenoble: La pensée sauvage.

Chevallard, Y. (2006). *Séminaire de didactique des mathématiques 2006-2007.* Course notes, on line at: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=141

Chevallard, Y. (2015). Teaching mathematics in tomorrow's society: A case for an oncoming counter paradigm. In S. J. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 173-187). Springer.

Carstensen, J., Frandsen, J. & Studsgaard, J. (2006). MatC til B stx. Aarhus, Denmark: Systime.

Durel, R. J. (1993). The capstone course: A rite of passage. *Teaching Sociology, 21*, 223-225.

Elipane, L. (2012). *Integrating the essential elements of lesson study in pre-service mathematics teacher education* (Doctoral dissertation). Copenhagen: University of Copenhagen.

Hill, H., Rowan, B. & Ball, D. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal, 42*(2), 371-406.

Hill, H., Ball, D. & Schilling, S. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 372-400.

Hodgson, B. (2002). The ICMI awards to bear the names of two eminent scholars. *ICMI Bulletin, 51*, 14-15.

Kilpatrick, J. (1992). A history of research in mathematics education. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 3-38). New York, NY: Macmillan.

Klein, F. (1908). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus, I.* Leipzig: B.G. Teubner. Quotes here refer to the English translation (1932). London: Macmilian.

Lenné, H. (1969). *Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland.* Stuttgart, Germany: Klett.

Miyakawa, T. & Winsløw, C. (2013). Developing mathematics teacher knowledge: The paradidactic infrastructure of "open lesson" in Japan. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16,* 185-209.

Rowe, D. (1983). A forgotten chapter in the history of Felix Klein's Erlanger program. *Historia Mathematica, 10,* 448-457.

Rowe, D. (1985). Felix Klein's "Erlanger Antrittsrede": A transcription with English translation and commentary. *Historia Mathematica, 12*, 123-141.

Steinbring, H. (1997). Changes views on mathematical knowledge in the course of didactical theory development: Independent corpus of scientific knowledge or result of social constructions? In T. Rowland and K. Ruthven (Eds.), *Mathematical knowledge in teaching* (pp. 43-64). Heidelberg, Germany: Springer.

Sträßer, R. (2013). Stoffdidaktik in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education*, SpringerReference. Accessed August 7, 2013 at:
www.springerreference.com/docs/html/chapterdbid/313323.html

Timm, U. & Svendsen, T. (2005). *Matematik C bogen*. Aarhus, Denmark: Systime.

Winsløw, C. (2007). Didactics of mathematics: an epistemological approach to mathematics education. *The Curriculum Journal, 18*(4), 523-536.

Winsløw, C. et al. (2009). First years of teaching. In R. Evens & D. Ball (Eds.), *The professional education and development of teachers of mathematics* (pp. 93-101). New York, NY: Springer.

Asunciones básicas de la cultura didáctica cuestionadas por la TAD
El problema de Klein y la formación del profesorado

Marianna Bosch
IQS School of Management, Universitat Ramon Llull, España

Josep Gascón
Dt. Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, España

Abstract. As a reaction to Carl Winsløw's work on the problem of Klein's double discontinuity, we start by presenting the critical position of ATD to certain principles assumed by the educational culture. We thus reveal an important part of the research programme opened by the theory of didactic situations where ATD belongs. In the second section, we describe the ATD answer to this problem and show how the assumption by teacher educational programmes of the principles questioned by the ATD makes the treatment of Klein's problem more difficult.

Résumé. Dans notre réaction au travail de Carl Winsløw sur le problème de la double discontinuité de Klein, nous commençons par exposer la position critique de la TAD face à certains principes assumés par la culture didactique. Nous révélons ainsi une partie importante du programme de recherche inauguré par la théorie des situations didactiques et dans lequel s'inscrit la TAD. Dans la deuxième partie, nous explicitons la réponse de la TAD à ce problème et nous montrons en quoi la prise en charge par les systèmes de formation des professeurs des principes questionnés par la TAD rend difficile le traitement du problème de Klein.

Resumen. Como reacción al trabajo de Carl Winsløw sobre el problema de la doble discontinuidad de Klein, empezamos por exponer la posición crítica de la TAD frente a ciertos principios asumidos por la cultura didáctica. Revelamos así una parte importante del programa de investigación inaugurado por la teoría de las situaciones didácticas en el que se inscribe la TAD. En la segunda parte, explicitamos la respuesta de la TAD a dicho problema y mostramos en qué sentido la asunción de los principios cuestionados por la TAD por parte de los sistemas de formación del profesorado dificulta el tratamiento del problema de Klein.

IV[e] congrès international sur la TAD (Toulouse, 21-26 avril 2013)
Axe 1. *Perspectives de la TAD, rapports avec d'autres approches*

Bosch, M. & Gascón, J. (2017). Asunciones básicas de la cultura didáctica cuestionadas por la TAD. El problema de Klein y la formación del profesorado. Dans G. Cirade et al. (Éds), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* (pp. 93-108). https://citad4.sciencesconf.org

5. Principios básicos asumidos por la cultura didáctica y cuestionados por la TAD

Toda comunidad científica, en la etapa de constitución de un nuevo paradigma, tiene la necesidad de cuestionar dos aspectos importantes relativos al ámbito que se da como objeto de estudio. En primer lugar, se debe desprender de la visión cultural de su ámbito de estudio, aquella que se basa en su interpretación espontánea basada en el sentido común. En el caso de las ciencias sociales y, en particular, en el caso de la didáctica, esta necesaria emancipación choca con los «prejuicios» dominantes en las instituciones que forman parte de su objeto de estudio, y con las ideas imperantes en amplios sectores sociales, puesto que todo el mundo se siente legitimado para opinar y sentenciar sobre las cuestiones educativas.

El segundo cuestionamiento afecta a los principios básicos que estaban vigentes en el antiguo paradigma, la mayoría de los cuales se mantienen implícitos y transparentes. En el caso de la didáctica, podemos hablar del paradigma de la que Guy Brousseau denomina como *didáctica clásica* y que caracteriza como aquel enfoque que, en la explicación de los hechos didácticos, toma como central la actividad cognitiva del sujeto, presuponiendo, además, que dicha actividad puede ser descrita y explicada de manera relativamente independiente de los restantes aspectos de la relación didáctica (Brousseau, 1986).

En lo que sigue, describiremos cinco principios básicos muy interiorizados en la cultura escolar y asumidos, en mayor o menor medida, por muchos de los enfoques de la didáctica clásica y que, simplificando mucho las cosas, podemos identificar con el *programa cognitivo* de investigación en didáctica de las matemáticas (Gascón, 2003). Expondremos la postura crítica que toma la TAD ante cada uno de ellos.

La asunción explícita o implícita de (algunos de) dichos principios o, en su caso, el rechazo explícito de los mismos, permite caracterizar, en parte, los diferentes programas de investigación didáctica. De hecho, la posición frente a dichos principios podría considerarse como una primera respuesta a la cuestión planteada por Carl Winsløw relativa a los componentes del núcleo duro del programa de investigación en el que se inscribe la TAD.

Con el objetivo de contextualizar el enunciado de los citados principios, empezaremos por indicar algunas acotaciones a la formulación a los mismos:

1) Para clarificar las posturas, propondremos una formulación muy simplificada y algo extremista de estos principios, sin presuponer que la cultura didáctica los asuma exactamente en estos términos.

Es importante tener en cuenta, además, que la cultura didáctica no es homogénea sino que, por el contrario, presenta múltiples matices y particularidades. Estas diferencias son especialmente notables cuando nos fijamos en los enfoques o teorías didácticas cuyo desarrollo se ha acelerado en los últimos decenios.

2) Estos cinco principios no son los únicos ni agotan el conjunto de asunciones básicas de la cultura escolar.

Hemos elegido algunos de los principios más persistentes y aparentemente más compartidos por la cultura escolar y que, además, no son cuestionados por la didáctica clásica. Pero una caracterización global de la cultura escolar y, más específicamente, de la didáctica clásica, requeriría un estudio mucho más sistemático que no pretendemos realizar aquí. Tampoco deberíamos suponer que el conjunto de las asunciones básicas de la TAD se formulan necesariamente en contraposición a los principios asumidos por la cultura escolar.

3) La postura de la TAD ante cada uno de estos principios es coherente con la de la TSD y, en muchos casos, ambas teorías tienen posiciones coincidentes.

La TAD comparte con la TSD la mayoría de los principios básicos que caracterizan el *programa epistemológico de investigación en didáctica de las matemáticas*. Este programa fue inaugurado por la teoría de las situaciones didácticas (Brousseau, 1972, 1998). A medida que se iba desarrollando, se puso de manifiesto que no era posible interpretar adecuadamente la actividad matemática escolar sin tener en cuenta los fenómenos relacionados con la reconstrucción escolar de las matemáticas que tienen su origen en la propia institución productora del saber matemático. Aparecen así los fenómenos de *transposición didáctica* (Chevallard, 1985) que darán lugar posteriormente a la *teoría antropológica de lo didáctico*. En esta se toma como objeto primario de investigación la actividad matemática institucionalizada (Gascón, 2003).

5.1. Principio 1: Fundamento de la Pedagogía

> «Hacer matemáticas» y «enseñar matemáticas» son actividades (relativamente) independientes.

Mientras que la Pedagogía se ha construido sobre la supuesta disociación entre «lo matemático» (considerado como el contenido de la enseñanza, transparente, incuestionable e independiente de la forma de ser enseñado) y «lo pedagógico» (considerado como la forma de enseñar, independiente del contenido que se enseña), la didáctica de las matemáticas emerge como disciplina científica en el momento que se hace cargo, de manera integrada, de «lo pedagógico» y «lo matemático». Ésta es su razón de ser.

Uno de los postulados básicos de la TAD es la determinación recíproca entre la organización de los contenidos matemáticos que se estudian (las *praxeologías matemáticas*) y la organización de los dispositivos para la enseñanza y el estudio de dichos contenidos (las *praxeologías didácticas*). Este postulado choca frontalmente con la posibilidad de que exista un ámbito de «lo pedagógico» centrado en el análisis de las organizaciones didácticas en general, independiente de las restricciones provenientes de los contenidos del saber que se pone en juego (sea este las matemáticas, la literatura o la música). Por lo tanto, la didáctica no puede obtenerse «añadiendo» las particularidades de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas a un presunto conocimiento «puramente pedagógico» (Gascón & Bosch, 2007).

En definitiva, la TAD postula la determinación recíproca entre *lo matemático* y *lo didáctico* como dos caras inseparables de los fenómenos didácticos.

5.2. Principio 2: Carácter absoluto del conocimiento matemático

> Los modelos epistemológicos vigentes en las instituciones (escolar y sabia), esto es, la forma de describir e interpretar los conocimientos matemáticos en dichas instituciones, no son cuestionables por la investigación didáctica.

Para la TAD, por el contrario, la formulación de un problema didáctico presupone el cuestionamiento radical del ámbito de la actividad matemática que está en juego y la elaboración, desde la didáctica, de un *modelo epistemológico de referencia* (MER) como hipótesis provisional que debe ser contrastable empíricamente. La puerta de entrada del análisis didáctico es el análisis epistemológico de las praxeologías que están en juego (análisis praxeológico).

La TAD propugna la necesaria emancipación epistemológica e institucional del didacta y de la ciencia didáctica en relación a los modelos epistemológicos vigentes en las instituciones que forman parte de su objeto de estudio.

Utiliza la metodología del análisis transpositivo como instrumento de ruptura de la transparencia de dichos modelos para evitar su asunción acrítica. Las nociones de *praxeología* y la escala de *niveles de codeterminación didáctica* (Chevallard, 2002) son herramientas esenciales para dicho análisis.

5.3. Principio 3: Dialéctica personal-institucional

> La problemática didáctica es, en primer lugar y principalmente, una problemática individual y, en gran medida, una problemática cognitiva.

En contraposición a este principio, muy arraigado en la cultura escolar, la TAD postula que la relación «personal» a una praxeología (la *praxeología personal*) es, en gran medida, el fruto de la historia de las sujeciones institucionales pasadas y presentes de la persona y puede explicarse a partir de las correspondientes relaciones institucionales. Así, lo «cognitivo», lo relativo al conocimiento, adquiere una dimensión praxeológica e institucional.

En consecuencia, para la TAD, el objeto primario de estudio de la didáctica lo constituye una problemática institucional de la que forman parte cuestiones tales como: ¿cuáles son las reglas que rigen el comportamiento de las praxeologías matemáticas y didácticas en una institución determinada? (dimensiones *económica* de la problemática didáctica), ¿por qué las praxeologías han llegado a ser como son en dicha institución y cómo podrían modificarse en una dirección determinada? (dimensión *ecológica*).

Para estudiar estas cuestiones, el didacta utiliza inevitablemente –como referencia– un modelo de las praxeologías matemático-didácticas que están en juego y que siempre es relativo a la institución de referencia (relatividad institucional del saber). La construcción y utilización metodológica de estos modelos de referencia, construidos explícitamente por la TAD, plantean cuestiones de investigación que también forman parte de la problemática didáctica básica y que constituyen la dimensión *epistemológica* de dicha problemática (Gascón, 2011).

En resumen, las praxeologías personales constituyen para la TAD un objeto de estudio «secundario» (lo que no significa que sea menos importante) en el sentido que su estudio debe referirse, en última instancia, a la relación institucional de las praxeologías en juego.

5.4. Principio 4: Recorte praxeológico del contenido del estudio

La problemática didáctica se puede abordar estudiando los fenómenos micro-didácticos que hacen referencia a ámbitos puntuales del contenido enseñado o, a lo sumo, a praxeologías locales.

La TAD, por el contrario, pretende emanciparse del *autismo temático* (Barbé, Bosch, Espinoza & Gascón, 2005) que invade, más allá del sistema escolar, muchas de las investigaciones didácticas. Sin negar el interés del estudio de los fenómenos micro-didácticos, la TAD llama la atención sobre el hecho de que estos solo pueden interpretarse adecuadamente cuando se relacionan con otros fenómenos micro-didácticos como componentes o elementos de fenómenos de mayor alcance. Por lo tanto, la TAD da prioridad al estudio de los fenómenos macro-didácticos y subraya que, en el estado actual de desarrollo de la ciencia didáctica, es imprescindible incluir praxeologías *regionales* y *globales* en la formulación de los problemas didácticos.

Así, por ejemplo, en (Bolea, 2003), para estudiar e interpretar adecuadamente los hechos didácticos que surgen en el aula con el estudio del álgebra elemental, se estudia el fenómeno que hemos denominado *algebrización abrupta* de las organizaciones matemáticas escolares del bachillerato y las restricciones ecológicas de todo tipo que inciden sobre dicho proceso.

Otro ejemplo de recorte praxeológico regional se describe y analiza con detalle en el trabajo de tesis de Francisco Javier García (2005). En este trabajo, para explicar los problemas didácticos relacionados con la enseñanza de la proporcionalidad, se estudia el fenómeno macro-didáctico del *aislamiento escolar de la relación de proporcionalidad* respecto del ámbito de las relaciones funcionales. Se propone una estrategia concreta para articular la proporcionalidad de magnitudes con el resto de las relaciones funcionales, lo que provoca una importante ampliación del recorte praxeológico escolar habitual, pasando de una praxeología local (aislada) a una praxeología regional. De esta forma se integra en el programa de estudio la *razón de ser* de la proporcionalidad (esto es, las cuestiones que se pueden platear con sentido en la enseñanza Secundaria obligatoria y que requieren de la proporcionalidad para ser respondidas), situándola en el universo de las relaciones funcionales al tiempo que se reformula profundamente el problema didáctico de la proporcionalidad.

5.5. Principio 5: Recorte institucional y unidad de análisis

> El aula constituye el ámbito privilegiado para extraer los datos empíricos necesarios para estudiar la problemática didáctica.

Aunque es cierto que muchas investigaciones en educación matemática tienden a centrarse en hechos que ocurren en el aula, para la TAD la *unidad mínima de análisis*, en referencia a la cual se formulan y abordan los problemas didácticos, abarca todas las etapas y todas las instituciones que intervienen en el proceso de transposición didáctica. Esto significa que debemos tomar en consideración, además de los datos empíricos que emergen de la *comunidad de estudio*, protagonista del proceso didáctico, los que surgen en la institución *productora* del saber matemático (saber sabio), en la *noosfera* (saber a enseñar) y en la institución *escolar*, esencialmente en el *aula* (saber enseñado).

El «saber aprendido» está compuesto por aquellos elementos praxeológicos que, al final del proceso didáctico, integrarán el medio matemático del grupo y que, por lo tanto, es un saber disponible que podrá ser utilizado por la comunidad de estudio de manera relativamente no problemática para la realización de nuevos tipos de tareas y para el estudio de nuevas cuestiones. Mientras que algunas teorías didácticas tienden a circunscribir su unidad de análisis a la comunidad de estudio, la TAD postula que no es posible explicar las características del «saber aprendido» ni ninguno de los fenómenos didácticos que emergen en la comunidad de estudio, sin tomar en consideración todas las etapas de la transposición (Bosch & Gascón, 2005). Esta ampliación del objeto de estudio de la didáctica comporta la inclusión de la problemática ecológica y la toma en consideración de todos los niveles de codeterminación didáctica (Chevallard, 2002).

El trabajo sobre el álgebra elemental desarrollado por la TAD constituye un ejemplo paradigmático del recorte institucional que incluye todas las instituciones que intervienen en la transposición didáctica e inaugura el análisis ecológico. A partir de los trabajos de Yves Chevallard (1984, 1989a, 1989b, 1990), Josep Gascón (1993, 1995, 1999) y Pilar Bolea et al. (1998, 2001, 2004), Noemí Ruiz-Munzón (2010) ha desarrollado un MER del álgebra elemental que toma como base empírica todas esas instituciones.

El trabajo de Floriane Wozniak (2005) sobre la estadística elemental es otro ejemplo paradigmático de ampliación de la base empírica en la que se sitúa un MER de la variabilidad.

En resumen, la TAD cuestiona radicalmente estos cinco principios básicos relativos a «lo matemático» y a «lo didáctico» que están interiorizados en la cultura y en la investigación didáctica clásica. Este pronunciamiento es parte del «núcleo duro» del *programa epistemológico de investigación* en el que, como hemos dicho, se inscribe la TAD como teoría y comporta una reconstrucción, ya iniciada por la TSD, de la realidad matemática, didáctica, pedagógica y escolar. De esta forma aportamos una primera respuesta a la cuestión planteada en la conferencia de Carl Winsløw sobre si la TAD es una teoría o un programa de investigación y sobre cuáles son algunos componentes del núcleo duro de dicho programa de investigación.

En cuanto a la cuestión de Carl Winsløw sobre el carácter *progresivo* o *regresivo* del programa de investigación didáctica en el que se sitúa la TAD, hay que decir que requerirá del juicio de la historia. Pero, si utilizamos los criterios que propone Imre Lakatos para caracterizar los programas de investigación progresivos, podemos afirmar que:

> The step from the cognitive to the epistemological program constitutes what Lakatos calls a *progressive change in a problem shift*, with the consequent increasing of heuristic power of the new research programme. This increase is corroborated by the appearance of new types of problems, of new auxiliary theories, and the appearance of new facts and phenomena. (Gascón 2003, p. 50)

6. El problema de Klein y la formación del profesorado

Tal como propone C. Winsløw, el problema de la doble discontinuidad de Klein se puede formular como el de la poca conexión que se establece entre tres diferentes tipos de relaciones a las obras o praxeologías matemáticas:

$$R_S(a, O) \rightarrow R_U(\alpha, \Omega) \rightarrow R_S(p, O)$$

La primera discontinuidad se origina al pasar de la relación a una obra O en *posición de alumno* de Secundaria, $R_S\,(a, O)$, a la relación con esta misma obra o una versión desarrollada **Ω**, también en posición de alumno, en otra institución, la Universidad, $R_U\,(\alpha, \Omega)$. La segunda discontinuidad se produce cuando, acabados los estudios universitarios, el alumno se debe enfrentar de nuevo, pero ahora en posición de profesor p, a la obra O para enseñarla en Secundaria $R_S\,(p, O)$.

Este proceso plantea múltiples cuestiones que constituyen lo que podríamos denominar primera formulación del *problema de Klein*:

¿En qué medida $R_U\,(\alpha, \Omega)$ aporta al futuro las herramientas necesarias para construir una efectiva $R_S\,(p, O)$ para enseñar O en S? O, más en general, las matemáticas estudiadas en la Universidad, así como la forma de estudiarlas, ¿son adecuadas para cubrir las necesidades matemáticas del futuro profesor de Secundaria? ¿Cuáles son estas necesidades matemáticas?

La respuesta que proporciona Félix Klein a este problema va en la línea de trazar un puente desde la matemática «superior» para conectarla con la matemática «elemental» de Secundaria. En particular, F. Klein propone considerar la noción de *función* como un concepto clave en la educación secundaria y promover el *cálculo diferencial e integral* en la enseñanza secundaria, insistiendo especialmente en sus aplicaciones y en los métodos gráficos. Para ello, lleva a cabo una reconstrucción original de la matemática «elemental», cuestionando el contenido y la estructura de las praxeologías matemáticas por enseñar y proponiendo una organización alternativa de la matemática escolar (Klein, 2006/1905).

Como bien indica C. Winsløw, queda abierto el problema de la transición $R_U\,(\alpha, \Omega) \rightarrow R_S\,(p, O)$, es decir, en el caso de las funciones, el modo en que esta construcción alternativa puede ser efectiva en la enseñanza de las funciones en S. Esto significa, en primer lugar, que no podemos considerar el problema de Klein como un problema cerrado para el cual tenemos una hipotética solución preestablecida y cuya solución práctica sólo está pendiente de la voluntad política y de los medios económicos para ponerla en marcha. En realidad, desde el punto de vista de la TAD, se trata de un problema abierto que, de acuerdo con Gisèle Cirade (2006), podemos reformular inicialmente como sigue:

¿Cuál es el *equipamiento praxeológico* necesario (o por lo menos útil) para que los profesores puedan intervenir de manera efectiva y pertinente en la formación matemática de los estudiantes (de tal o cual etapa educativa) y cómo pueden contribuir a ello los sistemas de formación del profesorado? ¿Qué papel debe jugar la ciencia didáctica en la construcción de este equipamiento y en la formación de los profesores?

Ante la cuestión del equipamiento praxeológico necesario para desarrollar la profesión docente, la TAD caracteriza tres tipos de praxeologías matemáticas relacionadas directamente con la formación del profesorado, cada uno de los cuáles está contenido en el siguiente (Cirade, 2006):

Matemáticas por enseñar → Matemáticas para la enseñanza
→ Matematicas para la profesión de profesor

La TAD propone empezar cuestionando las praxeologías por enseñar O y, en consecuencia, la relación institucional $R_S(a, O)$. Para ello es importante la construcción de organizaciones praxeológicas alternativas propias de la didáctica de las matemáticas, lo que hemos denominado *modelos epistemológicos (o praxeológicos) de referencia* (Bosch & Gascón, 2005). De esta manera, al plantear una organización alternativa de la matemática escolar, la TAD se sitúa en la tradición inaugurada por F. Klein y desarrollada por la teoría de las situaciones didácticas (TSD).

La diferencia de la respuesta que propone la TAD, en relación con la propuesta de Klein, se puede situar en la fundamentación didáctica de los criterios e instrumentos que se utilizan para reconstruir las praxeologías *por enseñar* y para ampliarlas a las praxeologías *para la enseñanza*. En efecto, las reconstrucciones propuestas tanto por la TAD como por la TSD parten de sendos modelos generales de la actividad matemática que se inscriben en un modelo más amplio de la construcción del conocimiento humano, dando así lugar a nuevos paradigmas epistemológicos (o didácticos). En concreto, la TAD propugna la necesidad de avanzar hacia el *paradigma del cuestionamiento del mundo* (Chevallard, 2013) en contraposición con el *paradigma de la visita de las obras* todavía vigente en las instituciones escolares.

Para ello es necesario disponer de una infraestructura matemática y didáctica cuya construcción y puesta en marcha requerirá el esfuerzo de toda la comunidad de investigación en didáctica de las matemáticas y la colaboración activa del sistema de enseñanza, incluyendo en particular la profesión de profesores.

Con el fin de ejemplificar brevemente las principales etapas de la construcción y puesta en marcha de dicha infraestructura para la formación del profesorado, nos centraremos en el caso en que la praxeología por enseñar sea el álgebra elemental.

El primer paso consiste en un análisis transpositivo del modelo epistemológico del álgebra vigente en Secundaria: R_S (álgebra). En este punto, los trabajos citados anteriormente sobre el álgebra muestran la potencia de dicho análisis y ponen de manifiesto restricciones que provienen de todas las etapas de la transposición. Estos análisis han permitido reformular el problema docente del álgebra en un problema de investigación didáctica y construir un MER del álgebra elemental como respuesta tentativa.

El siguiente paso es el diseño y experimentación de procesos de enseñanza y aprendizaje basados en los recorridos y actividades de estudio e investigación (REI y AEI) –que son dispositivos didácticos propios del *paradigma del cuestionamiento del mundo*–, sustentados en la propuesta del (MER). Los objetivos principales de esta experimentación son los siguientes:

a) contrastar experimentalmente la viabilidad del tipo de actividad que los REI y AEI encarnan;
b) estudiar las condiciones ecológicas que deberían implantarse si se quiere que dichos REI y AEI vivan con normalidad en la escuela;
c) analizar las consecuencias —previstas y no previstas— de su implantación en una institución docente determinada.

Una vez experimentados los REI y AEI en la institución de enseñanza Secundaria, se utilizará dicha experimentación para estudiar cuestiones cuyas respuestas se integren en praxeologías *para la enseñanza del álgebra* útiles en el proceso de formación del profesorado. Este estudio debe conducir a analizar, interpretar y mostrar la funcionalidad del álgebra elemental, incluyendo las cuestiones (transpositivas y otras) que han guiado la construcción del MER del álgebra por enseñar. También integrará nuevas cuestiones que puedan surgir sobre las posibles adaptaciones de los REI y AEI propuestos a instituciones concretas de enseñanza.

Este proceso de construcción colectiva de praxeologías para la enseñanza se inscribe en lo que llamamos un REI para la formación del profesorado: REI-FP.

En un REI-FP deben aparecer cuestiones de más largo alcance de las que aparecen en el REI asociado. Dichas cuestiones pueden referirse a:

- la delimitación y reconstrucción de las «obras matemáticas» designadas por el currículum;
- la razón de ser de dichas obras antes y después de ser reconstruidas;
- la articulación de las diferentes praxeologías por enseñar que suelen aparecer aisladas en la matemática escolar;
- el diseño y la gestión de los REI y AEI, cuestiones estas inseparables de la estructura y la razón de ser de las praxeologías por enseñar.

Esta es la vía de investigación abierta por nuestro grupo. Son varias las contribuciones en estas mismas actas que la ilustran. Así, la contribución de Alicia Ruiz-Olarría permite interpretar los tipos de conocimientos necesarios para la enseñanza que propone el enfoque conocido como *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) en relación a las praxeologías para la enseñanza $R_{FP}\,(pf,\,O) \rightarrow R_S\,(p,\,O)$. En la misma línea, Tomás A. Sierra y Pedro Nicolás analizarán la implementación de una posible metodología de los REI-FP en el Máster de Formación del Profesorado de Secundaria y en el Grado en Educación Primaria. Por su parte, Federico Olivero propondrá un MER de la geometría de Secundaria con el objetivo de ampliarlo para que sustente un REI-FP que tenga cabida en las instituciones universitarias de formación del profesorado:

$$R_S\,(a,\,O) \rightarrow [R_U\,(a,\,\Omega) = R_{FP}\,(pf,\,O)] \rightarrow R_S\,(p,\,O)$$

Todos estos trabajos se enmarcan dentro de un proyecto de investigación en marcha titulado «*Difusión de la modelización matemática en la enseñanza y en la formación del profesorado*».

En definitiva, la TAD se plantea el problema de la formación del profesorado como un verdadero problema de investigación didáctica que, como hemos dicho, requerirá el esfuerzo de toda la comunidad didáctica.

En síntesis, el tipo de formación que proponemos, al estar fundamentada en la TAD, cuestiona los cinco principios que hemos presentado al principio de este trabajo en el sentido siguiente:

1) Sitúa en el núcleo de la formación el análisis didáctico de los problemas de la profesión del profesorado, para vincularlos posteriormente con los conocimientos psicológicos, pedagógicos, sociológicos o de cualquier otra disciplina que puedan resultar pertinentes para abordar los problemas planteados.
2) Propone como herramienta primera de la formación el proceso de cuestionamiento de los contenidos por enseñar, dado que de ellos se desprenden un gran número de restricciones epistemológicas e institucionales para su enseñanza que el profesor debe conocer y aprender a gestionar.
3) Pospone el análisis de las características cognitivas o motivacionales de los alumnos a la previa determinación de las restricciones que provienen de las praxeologías por enseñar y de su ecología institucional.
4) Dentro del cuestionamiento de las praxeologías por enseñar, incluye su delimitación y la organización regional o global de las mismas, un ámbito de análisis que generalmente se deja fuera del alcance del profesorado.
5) Incluye, como unidad de análisis de los problemas de la profesión planteados, materiales empíricos que van más allá del espacio del aula.

En síntesis, lo que se esconde detrás del problema de la doble discontinuidad de Klein es el de la formación, a la vez matemática y didáctica, del profesorado de Secundaria, problema que situamos en el corazón mismo del problema general de la formación del profesorado.

Agradecimientos

Financiado por los proyectos EDU2012-39312-C03-01 «Competencias y modelización matemática en los estudios universitarios de ADE y en el paso de Secundaria a la Universidad» y EDU2012-39312-C03-03 «La modelización matemática para la formación del profesorado de secundaria: del algebra al cálculo diferencial».

Referencias

Barbé, J., Bosch, M., Espinoza, L. & Gascón, J. (2005). Didactic restrictions on the teacher's practice: The case of limits of functions in Spanish high schools. *Educational Studies in Mathematics, 59*(1-3), 235-268.

Bolea, P. (2003). El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares. En *Monografía del Seminario Matemático García de Galdeano, 29*. Zaragoza, España: Universidad de Zaragoza.

Bolea, P., Bosch, M. & Gascón, J. (1998). Le caractère problématique du processus d'algébrisation. Proportionnalité et grandeurs dans l'enseignement obligatoire. En M. Bailleul, C. Comiti, J.-L. Dorier, J.-B. Lagrange, B. Parzysz & M.-H. Salin (Eds.), *Actes de la IX*[e] *école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 153-159). Paris: ARDM.

Bolea, P., Bosch, M. & Gascón, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización: El caso de la proporcionalidad. *Recherches en didactique des mathématiques, 21*(3), 247-304.

Bolea, P., Bosch, M. & Gascón, J. (2004). Why is modelling not included in the teaching of algebra at secondary school? *Quaderni di Ricerca in Didattica, 14*, 125-133.

Bosch, M. & Gascón, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. En A. Mercier & C. Margolinas (Eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques* (pp. 107-122). Grenoble: La pensée sauvage.

Brousseau, G. (1972). Processus de mathématisation. En *La mathématique à l'école élémentaire* (pp. 428-457). Paris: APMEP.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques, 7*(2), 33-115.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble: La pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1984). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Première partie. L'évolution de la transposition didactique. *Petit x, 5*, 51-94.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1989a). *Arithmétique, algèbre, modélisation. Étapes d'une recherche*. Marseille : IREM d'Aix-Marseille.

Chevallard, Y. (1989b). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie: Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x*, *19*, 45-75.

Chevallard, Y. (1990). *Aspects d'un travail de théorisation de la didactique des mathématiques. Étude du cas de l'algèbre élémentaire* (Note de synthèse non publiée).

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. Écologie & régulation. En J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, F. Ruhal (Eds.), *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 41-56). Grenoble: La pensée sauvage.

Chevallard, Y. (2013). Enseñar matemáticas en la sociedad de mañana: Alegato a favor de un contraparadigma emergente. *Journal of Research in Mathematics Education, 2* (2), 161-182.

Cirade, G. (2006). *Devenir professeur de mathématiques : entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel* (Tesis doctoral). http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00120709/fr/

García, F. J. (2005). *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales* (Tesis doctoral). Universidad de Jaén, España.

Gascón, J. (1993). Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: Del patrón análisis-síntesis a la génesis del lenguaje algebraico. *Recherches en didactique des mathématiques, 13*(3), 295-332.

Gascón, J. (1995). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'« arithmétique généralisée ». *Petit x*, *37*, 43-63.

Gascón, J. (1999). La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar. *Educación matemática, 11*(1), 77-88.

Gascón, J. (2003). From the cognitive to the epistemological programme in the didactics of mathematics: two incommensurable scientific research programmes. *For the Learning of Mathematics, 23*(2), 44-55.

Gascón, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del algebra elemental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 14*(2), 203-231.

Gascón, J. & Bosch, M. (2007). La miseria del «generalismo pedagógico» ante el problema de la formación del profesorado. En L. Ruiz Higueras, A. Estepa & F. J. García (Eds.), *Matemáticas, escuela y sociedad. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD)* (pp. 201-240). Jaén, España: Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Klein, F. (2006/1905). *Matemática elemental desde el punto de vista superior*. Madrid: Nivola.

Ruiz-Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional* (Tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona, España.

Wozniak, F. (2005). *Conditions et contraintes de l'enseignement de la statistique en classe de seconde générale. Un repérage didactique*. (Tesis doctoral). Université Claude Bernard, Lyon.

La vulgarisation scientifique dans la classe : un renforcement du paradigme de la visite des œuvres ?

Marie-Hélène Lécureux-Têtu
UMR EFTS, Université Toulouse 2 (IUFM), France

Abstract. We consider a teaching sequence on the theme of nanotechnologies in a grade 9 (14-15 years old) of a French secondary school where a cartoon on the topic is watched. We analyse the influence on the study process of a scientific dissemination object used in class. Our analysis is based on the ATD and on tools taken from the social sciences, in the field "science, techniques and society" (STS). This field provides a description of different types of dissemination. We here present the most current type, called deficit model in STS. We show which are the underlying elements of the theory, in the ATD sense. The analysis of the cartoon illustrates this notion of deficit model and shows how this type of object is associated to the paradigm of visiting works.

Resumen. A partir de una secuencia sobre el tema de las nanotecnologías en una clase de 3º (14-15 años) de un instituto francés en la que se visiona unos dibujos animados sobre el tema, analizamos la influencia sobre el estudio de un objeto de divulgación científica utilizado en clase. Nuestro análisis se apoya en la TAD, así como en herramientas de las ciencias sociales, en el ámbito «ciencias, técnicas y sociedad» (STS). Este ámbito proporciona una descripción de los distintos tipos de divulgación. Presentamos aquí el tipo más corriente, llamado *deficit model* en STS, mostrando cuáles son los elementos de la teoría, en el sentido de la TAD, que subyacen a este marco. El análisis de los dibujos animados ilustra esta noción de *deficit model* y muestra cómo este tipo de objeto se asocia al paradigma de la visita de las obras.

Résumé. À partir d'une séquence sur le thème des nanotechnologies au sein d'un collège français, en classe de 3^{e} (élèves de 14-15 ans), pendant laquelle un dessin animé sur le thème est visionné, nous analysons l'influence sur l'étude d'un objet de vulgarisation scientifique utilisé en classe. Notre analyse s'appuie sur la TAD, mais aussi sur des outils issus des sciences sociales, dans le champ « sciences, techniques et société » (STS). Ce champ fournit une description de différents types de vulgarisation. Nous présentons ici le type le plus courant, appelé *deficit model* en STS, en montrant quels sont les éléments de théorie, au sens de la TAD, qui sont sous-jacents dans ce cadre. L'analyse du dessin animé illustrera cette notion de *deficit model* et montrera comment ce type d'objet s'associe au paradigme de la visite des œuvres.

IV^{e} congrès international sur la TAD (Toulouse, 21-26 avril 2013)
Axe 1. *Perspectives de la TAD, rapports avec d'autres approches*

Lécureux-Têtu, M.-H. (2017). La vulgarisation scientifique dans la classe : un renforcement du paradigme de la visite des œuvres ? Dans G. Cirade et al. (Éds), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* (pp. 109-124). https://citad4.sciencesconf.org

C'est en rejoignant une équipe travaillant au sein de l'UMR EFTS et du GRIDIFE de Toulouse que nous avons eu la possibilité d'analyser, à l'aide de la TAD, le dispositif d'étude sur les nanotechnologies que nous présentons. Ce dispositif a été mis en place dans un collège français depuis l'année 2009-2010, et nous nous intéressons ici au fonctionnement de ce dispositif lors de cette première année.

Simultanément, en formation au sein du master histoire, philosophie, didactique des sciences, spécialité recherche des universités Lyon 1 et Montpellier 2, nous avons appris à analyser des supports de médiation scientifique à l'aide des outils proposés dans un champ des sciences sociales, le champ « sciences techniques et société » (STS). Dans les différents types de vulgarisation mis en évidence en STS, le type le plus courant est le *deficit model*.

L'analyse que nous présentons ici croise donc ces deux champs théoriques. Nous verrons comment le *deficit model* s'associe parfaitement au paradigme de la visite des œuvres.

1. La rencontre de deux institutions

C'est par l'intermédiaire d'une manifestation type « fête de la science » que le dispositif d'enseignement sur les nanotechnologies a été initié. Cette manifestation a été l'occasion d'une rencontre entre le professeur de technologie et des chercheurs en nanotechnologies, qui étaient là pour promouvoir le film d'animation. Nous analysons ici la façon dont les institutions laboratoire travaillant sur les nanotechnologies et collège se rencontrent et se répondent.

1.1. La position institutionnelle du laboratoire par rapport à l'enseignement

Le laboratoire d'analyse et d'architecture des systèmes (LAAS) est un laboratoire toulousain du Centre national de la recherche scientifique (CNRS). Le LAAS s'investit de façon forte dans les actions de vulgarisation scientifique. Son site présente ainsi des pages destinées au grand public. On y trouve des informations diverses telles que les animations lors des journées portes ouvertes. Pour exemple, en 2012, dans le cadre de la fête de la science, les journées portes ouvertes comportaient un parcours jeunes

« l'énergie en s'amusant, la physique en s'amusant, la chimie en s'amusant ». Le même site indique des visites réalisées par des classes de collège ou de lycée [1]. Les chercheurs du LAAS sont facilement présents dans les établissements scolaires pour présenter la recherche et les métiers de la recherche. C'est l'une de ces interventions que nous analysons.

Rappelons que la participation à des actions de vulgarisation scientifique fait partie, en France, des missions du chercheur depuis 1982. Le texte de la loi d'orientation et de programmation pour la recherche et le développement technologique de la France indique :

> Art. 24. - Les métiers de la recherche concourent à une mission d'intérêt national. Cette mission comprend :
> – le développement des connaissances ;
> – leur transfert et leur application dans les entreprises, et dans tous les domaines contribuant au progrès de la société ;
> – *la diffusion de l'information et de la culture scientifique et technique dans toute la population, et notamment parmi les jeunes* ;
> – la participation à la formation initiale et à la formation continue ;
> – l'administration de la recherche. [2]

Les actions de vulgarisation entreprises par des chercheurs du LAAS sont en conformité avec ce texte de loi et correspondent à leur mission.

Le film d'animation utilisé pendant la séquence que nous étudions, dû à Christel Martin-Cerclier et Christophe Vieu et réalisé par Frank Grimal (2008) [3], a été financé, au moins en partie, par le LAAS et ce sont des chercheurs de ce laboratoire qui ont écrit le scénario, le producteur étant la délégation Midi-Pyrénées du CNRS. L'enveloppe du DVD porte aussi le sigle NaPa, sigle du consortium *Emerging Nanopatterning Methods Project* regroupant des laboratoires et des industries autour des nanotechnologies et affichant la volonté de développer des activités de diffusion vers le grand public. La jaquette du DVD mentionne : « Destiné à un public de collégiens et de lycéens 10-16 ans, ce film permet aux enseignants d'introduire ces technologies de pointes et de parler de sciences d'une manière ludique »

1. http://www.laas.fr/1-31291-Fete-de-la-science.php.
2. http://legifrance.gouv.fr/affichTexte.do?cidTexte=JORFTEXT000000691990.
3. Nous ferons référence dans la suite à ce DVD par le nom de ses scénaristes pour simplifier et parce que c'est au contenu que nous nous intéressons.

(Matin-Cerclier & Vieu, 2008). Il s'agit clairement d'un objet destiné à promouvoir les nanotechnologies.

1.2. L'enseignement au collège et les nanotechnologies

Les nanotechnologies n'apparaissent pas dans le corps des programmes du collège, que ce soit en mathématiques, en sciences physiques et chimiques, et en technologie. Mais l'introduction commune aux disciplines scientifiques donne des indications qui sont à relier au contenu de la séquence que nous étudions (MEN[4], 2008 ; c'est nous qui soulignons) :

> 2. Percevoir le monde
>
> L'Homme perçoit en permanence, grâce aux organes des sens, des informations de nature physico-chimique provenant de son environnement. Au-delà de la perception directe, l'observation peut être affinée par l'emploi d'instruments, objets techniques qui étendent les possibilités des sens. Elle peut aussi être complétée par l'utilisation d'appareils de mesure et par l'exploitation mathématique des résultats qu'ils fournissent. L'exploitation de séries de mesures, la réflexion sur leur moyenne et leur dispersion, tant dans le domaine des sciences expérimentales que dans celui de la technologie introduisent l'idée de précision de la mesure et conduisent à une première vision statistique du monde.
>
> La démarche expérimentale, au-delà de la simple observation, contribue à une représentation scientifique, donc explicative, du monde.
>
> 3. Se représenter le monde
>
> La perception immédiate de l'environnement à l'échelle humaine est complétée par une représentation du monde aux échelles microscopique d'une part et astronomique de l'autre. Les connaissances acquises en mathématiques permettent de s'appuyer sur des modèles de représentation issus de la géométrie, de manipuler les dimensions correspondantes et de les exprimer dans les unités appropriées.
>
> *À l'échelle microscopique, l'ordre de grandeur des dimensions respectives de l'atome et de la cellule est connu.* […]

4. Le sigle MEN désigne le ministère de l'Éducation nationale.

On peut émettre l'hypothèse que les professeurs travaillent prioritairement les contenus du programme, et se sentent dépourvus pour organiser l'étude de ce qui est indiqué ci-dessus.

Pour exemple, en mathématiques la notion d'ordre de grandeur en n'est pas définie de façon précise, elle peut être différente de la notion d'ordre de grandeur utilisée dans la classe en physique-chimie. De plus, il est très difficile à un professeur de mathématiques isolé d'avoir des raisons d'être pour diriger l'étude des modèles de représentation géométrique où les ordres de grandeur sont différents du cm, du dm ou du m. Les manuels scolaires fournissent très peu d'énoncés utilisables pour cette étude. Au mieux, dans les manuels, on verra des énoncés concernant l'astronomie, mais très peu d'énoncés concernant les dimensions de l'ordre du nanomètre.

Du côté de l'enseignement, on a donc des professeurs de collège pour qui l'accès à des réponses $R^{\lozenge}$ à la question « comment enseigner les nanotechnologies ? » n'est pas immédiat. Du côté des chercheurs du LAAS, on veut respecter la mission de vulgarisation, et pour cela on met à disposition des professeurs ce que l'on pense être des éléments de connaissance. Les deux institutions sont en adéquation, l'une offrant ce que l'autre demande. Au démarrage de ce dispositif, tout semble prêt pour que les réponses $R^{\lozenge}$ proposées par le LAAS se transforment assez directement en réponses $R^{\heartsuit}$.

2. La vulgarisation scientifique et la notion de *deficit model*

En sciences sociales, en particulier dans le champ appelé « sciences, techniques, société » (STS), on s'intéresse aux problèmes socio-scientifiques, dont l'analyse de la vulgarisation scientifique. Le mot « vulgarisation » ayant une connotation péjorative, on préfère, dans ce champ, parler de médiation scientifique. Nous avons gardé le mot de vulgarisation dans les titres de cette communication car c'est le mot utilisé couramment hors du champ STS.

Les STS ont permis de repérer plusieurs types de médiation scientifique. Alan G. Gross (1994) dans une analyse des aspects rhétoriques évoque deux types dominants de médiation scientifique, le *deficit model* et le *contextual model*. L'expression anglaise est souvent utilisée telle quelle, y compris dans les documents rédigés en français, aussi nous garderons cette expression sous cette forme. Gross rappelle que le *deficit model* comporte une forte dissymétrie : « scientific sufficiency and public deficiency » (p. 6), alors que dans le *contextual model* les interactions permettent une symétrie entre les scientifiques et le public. L'analyse institutionnelle présentée dans le paragraphe précédent met en évidence cette dissymétrie, qui conduit souvent au *deficit model.*

La thèse en muséologie de Marine Soichot (2011) nous présente les points importants du *deficit model* :

> La médiation des sciences s'est historiquement construite autour de l'idée que les profanes souffrent d'un ***déficit de connaissances scientifiques qu'il convient de combler***. Le point focal est alors la transmission de savoirs qui valorisent l'entreprise scientifique. Celle-ci est mise en spectacle en dehors des contextes historiques, culturels, politiques, etc. au sein desquels elle s'est développée. […]
> Ce terme [*le deficit model*] désigne l'interprétation selon laquelle la possible crise de confiance entre sciences et sociétés serait le résultat d'un manque de connaissance parmi les publics de ce qu'est la science et de ses résultats. […]
> Ce *deficit model* ou modèle de l'instruction publique selon Callon (1999) contribue à perpétuer une ***vision mythique de la scienc***e comme activité mue par la recherche du ***vrai, en dehors du temps et des passions humaines***. (p. 8-12)

Pour reconnaître si un objet de médiation relève du *deficit model,* on regarde quels sont les éléments des praxéologies issues de la recherche scientifique qui sont présentés par l'intermédiaire de cet objet.

Si l'essentiel consiste en éléments technologico-théoriques, le bloc pratico-technique étant absent au point que le déroulement du temps est invisible, si les praxéologies sont incomplètes, si ce qui est dit de la science est positiviste, relève du mythe, si les émotions sont bannies, alors l'objet relève bien du *deficit model*.

Au sens de la TAD, un objet de médiation scientifique relevant du *deficit model* porte les éléments théoriques suivants : le public manque de connaissances, et si le public reçoit ces connaissances, il soutiendra la recherche scientifique qui est présentée – et éventuellement, pour des jeunes, ils s'orienteront vers les sciences. La définition du *deficit model* s'associe parfaitement au paradigme de la visite des œuvres. Il s'agit, en fait, de montrer que les scientifiques créent des œuvres qui sont à admirer, avec en sous-entendu qu'il faut soutenir les scientifiques et les garder sur un piédestal.

3. L'analyse du dessin animé

Nous présentons ici une analyse du dessin animé (Martin-Cerclier & Vieu, 2008) visionné lors de la première séance sur les nanotechnologies, cette analyse étant guidée par la notion de *deficit model*.

3.1. Contraintes institutionnelles

Ce sont des chercheurs du LAAS qui ont proposé le scénario à la société réalisatrice du dessin animé. Ces chercheurs portent en eux comme élément théorique le fait que leur recherche est utile. Il ne sera pas étonnant de voir le scénario refléter cet élément.

Cependant, les chercheurs expriment au sujet de ce DVD quelques réserves. D'après eux, une contrainte au moment de la conception du film a été la conformité avec les prescriptions de l'union européenne pour obtenir une subvention permettant de financer la fabrication du film. Nous n'avons pas eu accès à ces prescriptions, nous ne savons pas ce qu'elles sont.

La durée du film est d'environ un quart d'heure, ce qui est adapté à un usage en classe. Il est bien en correspondance avec les demandes institutionnelles repérées précédemment.

3.2. Les praxéologies des scientifiques présentées dans le dessin animé

L'histoire est celle de deux adolescents, Nat et Pat, qui rapportent à un laboratoire une enveloppe égarée par un chercheur sur un banc dans un jardin public. Cela donne prétexte à une visite guidée du laboratoire, qui nous donne accès à certaines praxéologies des chercheurs dans leur travail au sein du laboratoire. Ce sont ces praxéologies que nous analysons ici.

Le seul bloc pratico-technique présenté de façon un peu plus complète dans le film est constitué autour du type de tâches T : « observer quelque chose de taille nanométrique au microscope ». La technique montrée consiste à déposer l'objet à observer dans une boîte, faire le vide, déposer la boîte dans la partie idoine du microscope, régler la netteté, et faire des zooms. Deux raisons d'être sont données à ce type de tâches : l'une consiste à vérifier l'état du matériel à taille nano, qui est très fragile, l'autre est que

« en observant les tout petits détails, on comprend mieux comment tout ce petit monde fonctionne ». Comme élément technologique associé, nous apprendrons qu'un faisceau d'électrons sert à visualiser l'objet. Le nom du microscope qui permet de voir à l'échelle nanométrique ne sera même pas prononcé.

Il est fait référence à d'autres blocs pratico-techniques, mais de façon très édulcorée et infantilisante. La figure 1 est une image extraite du film sur la lithographie douce :

Figure 1. La lithographie douce, une technique enfantine.

Le procédé de lithographie douce est commenté ainsi :

> La lithographie douce, ce n'est pas très compliqué. Regardez, j'utilise un timbre en élastomère que j'ai préalablement moulé. Je mets de l'encre dessus, c'est l'étape d'encrage, je le sèche ; je le retourne et le met en contact avec une surface, je retire le timbre de la surface et l'encre qui était sur le relief se dépose Voilà comment on peut faire un dessin avec des molécules.

Cet extrait montre bien comment sont évacués les aspects pratico-techniques : l'analogie avec quelque chose de simplet permet d'éviter toutes les difficultés, ne donne pas accès à la réalité, mais fait croire que le public saura de quoi il retourne.

Il n'est nullement dit pourquoi on ferait un dessin avec des molécules. Il semblerait que la lithographie douce permet de fabriquer des écrans souples ultra fins, mais quel est le lien ? Pourquoi, et comment cela fonctionne ?

Des éléments technologiques sont présentés plusieurs fois. Un élément fort est le fait que ce qui est de dimension nanométrique est invisible à l'œil nu. La notion de limite du visible est donnée, sans autre commentaire.

Pourquoi et comment définit-on la limite du visible ? Ce n'est jamais indiqué.

Un autre élément technologique donnera lieu à un développement : il s'agit de la notion d'ordres de grandeur. Une première illustration de cette notion est donnée par une frise.

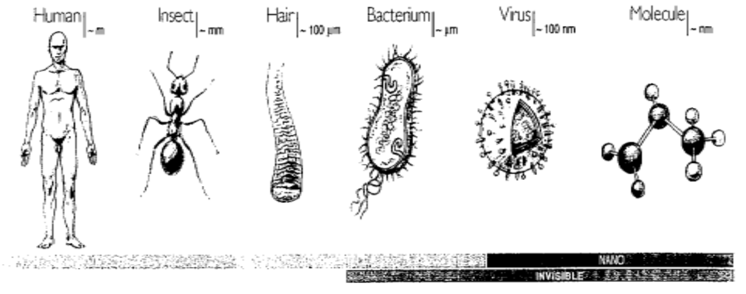


Figure 2. La frise des dimensions.

Le film ne montre pas la frise complète en une seule vue ; elle apparaît « par morceaux ». La reproduction que nous présentons ici est celle qui sera utilisée dans la classe lors de la troisième séance, que les élèves pourront donc alors voir en totalité. Un des personnages commente la frise :

> Ici nous sommes au niveau du mètre avec l'homme, puis plus petit, nous rencontrons par exemple la fourmi qui mesure quelques millimètres, on parle du monde macroscopique. Puis mesurant quelques microns, il y a le cheveu, à partir de là tout ce qui plus petit n'est plus visible à l'œil nu, comme une bactérie ou une cellule nous rentrons dans le monde microscopique. Ensuite, c'est le monde nanométrique, nous y trouvons les virus qui mesurent quelques centaines de nanomètres puis encore plus petits les molécules et les atomes constituants élémentaires de la matière inerte ou vivante.

Une seconde illustration est donnée par un personnage imaginaire qui intervient quelquefois pour renforcer les discours tenus par les chercheurs. « Il y a le même rapport de taille entre cet atome, une balle de tennis, et la terre ». Cet énoncé sera travaillé par la classe, sous la direction du professeur de mathématiques. On s'aperçoit alors que la plupart des élèves ne comprennent pas le sens de cette phrase.

Les praxéologies visibles sont toutes très incomplètes, nous pouvons penser sérieusement à un objet relevant du *deficit model*.

3.3. Compléments à l’analyse praxéologique

Nous reprenons ici les autres indicateurs qui permettent de déterminer si l’on est face à un objet relevant du *deficit model*.

Un premier indicateur est le positivisme, allant jusqu’à une vision mythique de la science. Ici, les nanotechnologies sont présentées comme une solution à bien des problèmes actuels. Ainsi il est annoncé que le bio-plume, objet de taille nanométrique qui a la forme d’une plume, est utile pour « prévenir les maladies avant qu’elles apparaissent ». Les nanotechnologies servent aussi l’environnement en permettant « d’augmenter l’efficacité des cellules photovoltaïques. ». Et puisque le film s’adresse à des jeunes, on nous dira que la nano-impression permet d’écrire tout un volume d’Harry Potter sur un timbre-poste, ce qui n’est pas forcément très utile. Le discours est entièrement positiviste.

L’analyse de l’image renforce l’analyse du discours. Dans ce dessin animé où la représentation du monde est très simplifiée, et donc loin de la réalité, il est à noter qu’il y aura des images qui, elles, sont vraies. Lorsque les personnages observent au microscope, il est montré de vraies images, réellement issues d’un microscope (voir figure 3). Ce qui donne une impression étrange : ce qui, dans le récit, est le plus artificiel, une image issue d’un appareil sophistiqué, est, en fait, la seule image réaliste. On a un sentiment d’inversion : seule la vue au microscope électronique est réelle. La seule chose vraie est issue de la science.

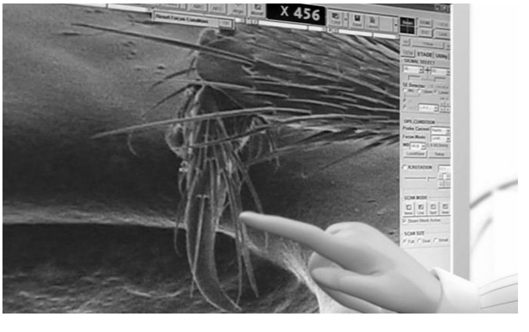


Figure 3. L’image par microscopie électronique est la seule image réaliste.

Un second point à analyser est la présence ou l’absence d’émotion. Le discours ne fait jamais état d’émotion. De plus, la technique choisie pour l’animation donne à voir des personnages très figés dans l’expression (voir figure 4). Il se peut que ce soit dû à une contrainte financière, mais l'effet est bien présent.

Un troisième indicateur est très souvent révélateur : quelle est la place faite au déroulement du temps ? Dans la description des activités du laboratoire, toute référence au bloc pratico-technique étant écartée, il n'est jamais question du temps.

Mais d'autres éléments de l'image vont être plus étonnants. Le début de l'histoire se déroule dans un jardin public, et c'est l'automne. Pendant la visite du laboratoire, certains plans laissent entrevoir des plantes, des arbres à l'extérieur. L'automne n'a pas sa place au laboratoire : tout est vert. Et l'on voit parfois circuler un paon, qui reviendra plusieurs fois. La figure ci-dessous montre plusieurs de ces éléments.

Figure 4. Deux personnages ; en fond, le paon entre les deux personnages.

Le paon reviendra de façon beaucoup plus importante que ce qui est visible sur la figure 4. Nous nous sommes interrogée sur ce qu'il pouvait signifier, et nous avons émis deux hypothèses. Dans notre société, on ne rencontre les paons que dans les jardins des plantes, les zoos, dans les jardins associés à des châteaux… Le paon n'est ainsi pas associé à la nature sauvage, mais à la nature domestiquée, dominée, mode de relation à la nature qu'il pourrait représenter. La recherche sur Wikipédia des symboles associés au paon apporte une réponse plus surprenante : le paon a pu être utilisé comme symbole d'immortalité. Le laboratoire pourrait alors être perçu comme un lieu hors du temps. On est davantage dans le jardin d'Éden que dans un lieu de travail.

L'analyse isolée du film montre qu'il relève bien du *déficit model*. Le discours des chercheurs à ce sujet indique qu'ils ne sont pas pleinement satisfaits du dessin animé. Les contraintes sous lesquelles il a été réalisé ont, néanmoins, conduit à ce résultat.

3.4. L'utilisation du film dans la classe

Le DVD a été visionné lors de la première séance étudiée. Immédiatement après avoir regardé le film, la professeure de sciences physiques et chimiques demande aux élèves ce qu'ils en ont retenu. La réponse est brève : les bio-puces pourraient servir à faire du diagnostic en médecine, et certaines raquettes de tennis sont en nanotubes de carbone. Dans la même séance, il sera demandé aux élèves s'ils ont repéré la limite du visible. La frise que nous avons présentée a marqué la classe : la limite du visible, c'est après le cheveu.

Lors de la seconde séance, les professeures reviendront sur un élément du DVD : la classe doit vérifier que le rapport de proportion entre la Terre et une balle de tennis est le même qu'entre la balle de tennis et un atome. Si le discours du dessin animé affirme que ce rapport est le même, l'image donnée ne peut pas respecter cette proportion, comme le montre la figure 5.

Les diamètres sont fournis par les professeurs, et la calculatrice interdite. L'énoncé impose de travailler en mètres. Certains élèves ont calculé les différences des diamètres, et ne comprennent manifestement pas ce qu'on leur demande de faire.

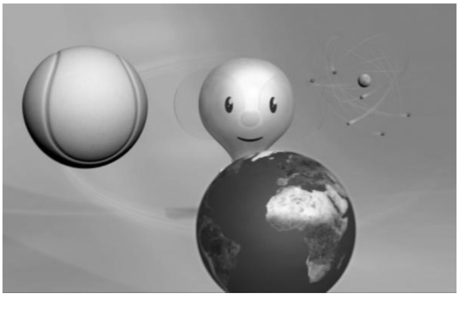


Figure 5. Proportions du diamètre de la terre, de la balle et de l'atome.

Le calcul sert, en fait, de prétexte aux professeures pour demander d'utiliser les puissances de 10, comme le montre l'extrait suivant :

> Déjà une remarque : ceux qui sont partis avec les divisions et les zéros, ils ne s'en sortent pas, hein ? Ils abandonnent, ils ne s'en sortent pas donc il y a peut-être un moyen que vous avez vu en cours de maths et qui est quand même plus pratique à utiliser.

La correction du calcul est entièrement prise en charge par les professeures, le *topos* des élèves est particulièrement faible.

Le dessin animé n'a donc pas permis d'accéder directement à la notion d'ordre de grandeur, les élèves ne sont pas appropriés les proportions. Seule la limite du visible semble avoir été bien repérée. Les professeures n'arrivent pas à faire vivre dans la classe les contenus du film. Les élèves n'ont aucune autonomie.

4. L'intervention d'une spécialiste en nanotechnologies

4.1. Les premières séances

La séquence a été préparée avec la participation des chercheurs du LAAS. Elle comporte trois séances. Les deux premières ont été dirigées par les professeures de mathématiques et de sciences physiques et chimiques. La dernière séance, d'une durée double, a été dirigée par les professeures de sciences physiques et chimiques et de technologie. Nous présentons ici les deux premières séances, qui se sont déroulées sans l'intervention de chercheur en nanotechnologies.

Le document de préparation de ces deux séances, côté chercheurs, est intitulé « savoir à enseigner ». Nous le reproduisons entièrement ci-dessous

> Séance 1.1 : échelle de taille et unité Visible/Invisible Naturel/Artificiel Vidéo Nano.
>
> Séance 1.2 : travail sur l'échelle et les unités, linéaire millimétrique, logarithmique (papier log), tableau, taille de la limite du visible et repérage dans l'échelle, vidéo « C'est pas sorcier » ? Rapport de taille : théorème de Thalès.

Ne sont présents dans ce document que des éléments technologiques, le bloc pratico-technique n'a pas sa place ici. On remarquera aussi l'absence d'indication didactique. On peut penser que les chercheurs ont laissé aux professeurs du collège l'initiative dans ce domaine.

La première séance commence par un temps d'activité autour de la mesure d'objets de petite dimension. Les élèves ont dû apporter des objets, les plus petits possibles. L'objectif étant de déterminer le plus petit, les élèves doivent mesurer les objets et les classer par dimension. Après cela, ils visionneront le film, et reviendront aux objets apportés. Il ne s'agit pas de faire vivre une praxéologie complète autour de la mesure d'objets de petite dimension. En particulier, on ne voit pas d'appareils permettant de mesurer des objets petits (pied à coulisse ou palmer). Les objets apportés semblent davantage servir de prétexte.

Une des professeures demande d'attribuer un adjectif aux objets en lien avec leur provenance. Elle essaie de faire vivre l'opposition *naturel/artificiel* mais cela ne fonctionne pas :

> On attendait sur l'origine, peut-être des mots plus // artificiel ou naturel, des choses plus comme ça, d'accord ? Ou alors, là, vous dites la (inaudible), vous êtes d'accord, ce n'est pas naturel, c'est artificiel. On en a parlé en chimie des substances, la définition, elle, est : substance de synthèse, artificielle. Vous vous souvenez ?

En troisième partie de la séance, ils reviendront aux objets : auraient-ils pu apporter des objets plus petits ?

Dans la seconde séance, conduite par les professeures de mathématiques et de sciences physiques et chimiques, la classe travaille à placer sur un graphique certains objets choisis par les professeures parmi ceux étudiés lors de la séance précédente. Le graphique doit permettre de comparer les dimensions des objets. Ils ont été choisis par les enseignantes de façon telle qu'une échelle linéaire ne permette pas de faire ce graphique. La classe finira par construire ce qui est appelé « échelle logarithmique » dans la préparation des chercheurs. Il s'agit en fait d'un tableau de conversion amélioré, qui va permettre de s'approprier la frise (figure 5) utilisée lors de la séance 3.

4.2. L'intervention d'une chercheure dans la dernière séance

La troisième séance est conduite par les professeures de sciences physiques et chimiques, et de technologie. C'est au cours de cette séance qu'interviendra une spécialiste des nanotechnologies.

Cette longue séance s'appuie sur des images apportées par la spécialiste. Dans un premier temps, il faudra déterminer la dimension de ce qui est représenté. Dans un second temps, il faudra deviner ce qui a bien pu être représenté.

Les images ont été prises avec des microscopes de natures différentes. Elles comportent une indication d'échelle, et un trait dont il faudra déterminer la longueur en vraie grandeur. Pour avoir une idée des ordres de grandeur, les images seront placées sur une reproduction de la frise issue du dessin animé. Cette reproduction s'étale sur toute la longueur d'un mur de la salle

Les arrondis sont imposés par les professeurs, sans qu'aucun questionnement ne puisse apparaître à ce sujet. L'utilisation du produit en croix est, elle aussi, imposée. Le travail en classe s'avère très difficile. Il faudra plus de trois quarts d'heure à la classe pour arriver à placer toutes les images.

Dans toute la séquence, ce sont toujours des longueurs qui sont manipulées. La notion de volume ne sera jamais évoquée. À la fin de la première séance, il sera question, pour la dimension d'un cheveu, du fait qu'on s'intéresse à la dimension la plus petite.

Pour finir, les professeures fournissent aux élèves la liste de ce qui a été représenté : il faudra associer l'étiquette et l'image. Pour la plupart des images, il va falloir s'aider des connaissances des ordres de grandeur, des mots utilisés dans les étiquettes (les nanotubes sont du côté du nanomètre plutôt que du millimètre), des comparaisons de dimensions.

Une fois ce travail achevé, c'est la spécialiste en nanotechnologies qui prend la parole.

Elle commence par commenter une image qui sert à illustrer la puissance scientifique : c'est une bactérie qui a été mise en forme de W. Mais rapidement le discours tourne autour du fonctionnement des microscopes. Les images sont de trois types différents (optique à fluorescence, microscopie électronique et microscopie à forces atomiques). La chercheure passera un long temps à décrire le fonctionnement des différents types de microscopes, mais aussi comment on choisit le type de microscope, suivant la nature de ce que l'on veut observer. Elle parlera ensuite des moteurs de taille nanométrique. La richesse du discours contraste avec le DVD, ce n'est plus un monde infantile. Le discours comporte beaucoup plus d'éléments pratico-techniques. Il tend à sortir du *deficit model*.

Les enregistrements se sont arrêtés là pour l'année 2009-2010. Un débat sur les nanotechnologies a eu lieu en cours d'histoire-géographie, mais il n'en reste pas trace.

5. Pistes de travail

La séquence d'enseignement que nous avons étudiée s'est déroulée en 2009-2010. Depuis, le dispositif a considérablement évolué, en utilisant une structure en atelier, où les chercheurs sont, en principe, à disposition des élèves. L'étude de cette évolution et des modifications des positionnements des professeurs de chacune des disciplines concernées et des chercheurs dans la classe nous semble intéressante à mener. Le paradigme de la visite des œuvres va-t-il pouvoir s'effacer devant la volonté affichée des enseignants de permettre aux élèves de débattre sur l'application des nanotechnologies ?

Par ailleurs, sur le plan théorique en STS, certains textes présentent l'histoire de la médiation scientifique sous la forme du *deficit model* en associant cette forme de vulgarisation à la mise en place des disciplines au sein de l'université au XIXe siècle. Il sera intéressant de travailler cet aspect théorique, et l'articulation de la définition des disciplines avec la transmission des savoirs.

Références

Callon, M. (1999). Des différentes formes de démocratie technique. *Les cahiers de la sécurité intérieure, 38*, 3-54.

CNRS Délégation Midi-Pyrénées (producteur), Grimal, F. (réalisateur) & Martin Cerclier, C. & Vieu, C. (scénaristes). (2008). *A precious envelope for budding scientists* [Film d'animation, DVD]. Toulouse : Heladon. http://www.heladon.fr/ublleciaportfolios/nanotechnologies/

Gross, A. G. (1994). The roles of rhetoric in the public understanding of science. *Public Understanding of Science, 3*(1), 3-23.

Ministère de l'Éducation nationale. (2008). Programmes du collège. Programmes de l'enseignement de mathématiques. *Bulletin officiel spécial nº 6 du 28 août 2008.*

Soichot, M. (2011). *Les musées et centres de sciences face au changement climatique. Quelle médiation muséale pour un problème socioscientifique ?* (Thèse de doctorat). http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00609008/

The anthropological theory of the didactic and giftedness

Pedro Nicolás Zaragoza and Ana Belén Hernández García
Dpto. de Didáctica de las Ciencias Matemáticas y Sociales,
Universidad de Murcia, España

Resumen. Se pretende analizar desde la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) la respuesta espontánea del sistema educativo ante la problemática de los alumnos con altas capacidades en la Región de Murcia (España). Se examinará la técnica de los Talleres de Enriquecimiento Extracurricular para concluir que esta tiene importantes carencias en su estado actual. Hacemos entonces una crítica del bloque tecnológico-teórico en que se sustenta y proponemos una mejora de la técnica basándonos en el modelo didáctico de referencia de la TAD.

Résumé. Nous analysons du point de vue de la théorie anthropologique du didactique (TAD) la réponse spontanée du système éducatif par rapport à la problématique des élèves à hautes capacités dans la Région de Murcia (Espagne). Nous examinons la technique des *ateliers d'enrichissement parascolaire* pour conclure qu'elle a d'importantes carences dans son état actuel. Nous faisons une critique du bloc technologico-théorique sur lequel elle s'appuie et nous proposons une amélioration de la technique basée sur le modèle didactique de référence de la TAD.

Abstract. The aim of this paper is to analyse from the perspective of the anthropological theory of the didactic (ATD) the spontaneous response given by the education system to the issue of gifted students in the Region of Murcia (Spain). The technique performed in the Extracurricular Enrichment Workshops will be examined to conclude that it has significant gaps considering its current state. Then we carry out a review of its underlying technological-theoretical block and we suggest an improvement of the technique based on the ATD didactic reference model.

IVe congrès international sur la TAD (Toulouse, 21-26 avril 2013)
Axe 1. *Perspectives de la TAD, rapports avec d'autres approches*

Nicolás, P. & Hernández, A. B. (2017). The anthropological theory of the didactic and giftedness. Dans G. Cirade et al. (Éds), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* (pp. 125-130). https://citad4.sciencesconf.org

1. What giftedness is

First and foremost, after a review of the current literature (Acereda & Sastre, 1998; Castelló & de Batllé, 1998; Ferrándiz et al., 2010; Hernández, 2010; Prieto & Castejón, 2000), one realizes that it is not clear whether giftedness is considered a phenomenon or a construct. Furthermore, it is not clear what the suitable characterization would be in the first case, and what the most convenient definition would be in the second case.

Aside from that, it seems that most of the characterizations or definitions take into account three features which have to appear in gifted students:

- A superior intellectual ability.
- High level of creativity.
- Certain personality traits: commitment to tasks, motivation, autonomy, leadership, etc.

Giftedness may occur in a particular "realm" (simple talent: linguistic, logical, mathematical…), in several (complex talent: academic, artistic-figurative…) or in every "realm" (extremely gifted).

2. Creation of the *Equipo de Orientación Educativa y Psicopedagógica* (EOEPs) *Específico para Altas Capacidades*

Gifted students are considered students with special educational needs. Among the reasons why these students require an educational attention other than the ordinary, we can mention:

- The great tension existing between their learning style and the standard didactic praxeologies (Chevallard, 1997).
- The importance of detecting and stimulating talents.

Thus, the *Consejería de Educación de la Comunidad Autónoma de Murcia* deals with the following task T_1: Respond to the educational needs of gifted students. (Región de Murcia, 2009)

The following technique τ_1 arises then: The creation of the *Equipo de Orientación Educativa y Psicopedagógica Específico para Altas Capacidades* (in short, Team for Gifted Students: TGS). The functions entrusted to this TGS are related to expert counselling and advice to the other educational guidance services, the *Inspección de Educación* and the Kindergarten, Primary and Secondary education schools (Región de Murcia, 2011).

3. Extracurricular Enrichment Workshops

The TGS come up with the following task T_2: *Provide gifted students with an environment free of the ecological obstacles derived from the curricular education in which they can carry out study processes according to their idiosyncrasy.*

As a response to this task comes up the following technique τ_2: *Creation of the Extracurricular Enrichment Workshops* (Rojo et al., 2010). These workshops are addressed to students identified as gifted in the Region of Murcia from the levels of Primary and Secondary. They consist of several “research projects” which are carried out throughout about six fortnightly sessions of three hours. Broadly speaking, the workshops pursue, among others, the following objectives: achieve the comprehensive development of students’ personal skills, enhance the initiative, commitment and responsibility, develop divergent thinking, encourage the development of thinking strategies, strengthen social skills. These “research projects” are presented by the teachers to the TGS, as this one is the responsible for the choice of the most suitable projects to achieve the aims mentioned above. In addition, the teachers are provided with some instructions prior to the design of their project. Some of them are: launch the learning from the students’ prior knowledge, respect different learning paces, generate challenges and cognitive and creative risks, enhance autonomous learning and combine it with other means of shared learning.

The technological-theoretical block Θ_2 justifying this technique is found in the field of Psychology: active and participative psychology, cognitive theory, theory of Multiple Intelligences, a description of the psychological characteristics possessed by gifted students...

4. Objection to the technique τ_2 from the Didactics of Mathematics

The main objection to the technique τ_2 is that, in a “research project” devoted to mathematics, a too wide range of mathematical activities are possible, for example, juxtaposition of many *Punctual Mathematical Organisations* (PMO) or a *Local Mathematical Organisations* (LMO) relatively complete. It is known that the study processes (study moments, dialectics…) lived in each one are of very different nature (Fonseca, 2004).

So τ_2 is a "weak" technique to the extent that its application may produce very different didactic results.

5. Conclusion

The aforementioned is, above all, an objection to the technological-theoretical block being this an evident token of "pedagogical generalism" (Gascón & Bosch, 2007). Indeed, this deficiency of τ_2 is a sign of the gaps of the logos block which holds τ_2 and, in general, the whole Praxeology of Gifted Students (PGS). The technological-theoretical block of a praxeology is, ultimately, the responsible for the ontological discourse of this praxeology, the commissioned to say what exists and what does not exist for the praxeology. Thus, the ontological discourse of the PGS related to mathematics is naïve and spontaneous. In particular, it lacks of a model/conception of mathematical activity. This fact concerns not only the design of mathematical activities but also the description of mathematical giftedness.

We suggest an improvement of some features of τ_2, its reliability and robustness, on the basis of other technological and theoretical elements, namely, those belonging to the didactic reference model of the ATD. Particularly, we suggest the Research and Study Courses (RSC) as the standard didactic device for the Extracurricular Enrichment Workshops, considering that, according to the technological-theoretical discourse of the ATD, a RSC generates relatively complete LMO throughout study processes where every didactic moment is fully lived (Chevallard, 2007; Barquero et al., 2011). This fact seems to be especially convenient for gifted students because of their learning style and their personal characteristics. Furthermore, it should be pointed out that the Extracurricular Enrichment Workshops lack many of the ecological obstacles found in curricular education, which makes them an exceptional environment for didactic experimentation.

References

Acereda, A. & Sastre, S. (1998). *La superdotación*. Madrid: Síntesis Psicología.

Barquero, B., Bosch, M. & Gascón, J. (2011). Ecología de la modelización matemática: Los recorridos de estudio e investigación. In M. Bosch et al. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 553-577). Barcelona, Spain: CRM.

Castelló, A. & de Batllé, C. (1998). Aspectos teóricos e instrumentales en la identificación del alumnado superdotado y talentoso. Propuesta de un protocolo. *Faisca: Revista de altas capacidades, 6,* 26-66.

Chevallard, Y. (2007). Les mathématiques à l'école : pour une révolution épistémologique et didactique. *Bulletin de l'APMEP, 471*, 439-461.

Chevallard, Y. (1997). Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en didactique des mathématiques*, *17*(3), 17-54.

Ferrándiz, C., Prieto, M. D., Fernández, M. C., Soto, G., Ferrando, M. & Badía, M. (2010). Identification model of gifted students in secondary education. *Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del profesorado*, *32*, 201-240.

Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y la enseñanza universitaria* (Doctoral dissertation). Universidad de Vigo, Spain.

Gascón, J. & Bosch, M. (2007). La miseria del «generalismo pedagógico» ante el problema de la formación del profesorado. In L. Ruiz-Higueras, A. Estepa & F. J. García (Eds.), *Matemáticas, escuela y sociedad. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD)* (pp. 201-240). Jaén, Spain: Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Hernández, D. (2010). *Alta habilidad y competencia experta*. (Doctoral dissertation). Universidad de Murcia, Spain.

Prieto, M. D. & Castejón, J. L. (2000). *Los superdotados: esos alumnos excepcionales*. Málaga, Spain: Aljibe.

Región de Murcia. (2009). Decreto 359/2009, de 30 de octubre, por el que se establece y regula la respuesta educativa a la diversidad del alumnado en la Comunidad Autónoma de la Región de Murcia. In Boletín Oficial de la Región de Murcia (n.º 254, de 3 de noviembre de 2009)

Región de Murcia. (2011). Orden de 3 de febrero de 2011, de la Consejería de Educación, Formación y Empleo por la que se crea el Equipo de Orientación Educativa y Psicopedagógica Específico de Altas Capacidades. In Boletín Oficial de la Región de Murcia (n.º 41, de 19 de febrero de 2011).

Rojo, A., Garrido, C., Soto, G., Sainz, M., Fernández, M. C. & Hernández, D. (2010). Talleres de enriquecimiento extracurricular para alumnos de altas habilidades. *Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del profesorado, 32*, 137-146.

El conocimiento pedagógico del contenido y las praxeologías matemáticas para la enseñanza

Alicia Ruiz-Olarría
Dpto. Didácticas Específicas, Universidad Autónoma de Madrid, España

Marianna Bosch
IQS School of Management, Universitat Ramon Llull, España

Josep Gascón
Dt. Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, España

Abstract. This communication, which corresponds to a doctoral research, proposes an interpretation of the different categories or teaching knowledge domains proposed by the approach centred on the *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT), in the aim of elucidating the kind of problems approached and the scope of its contributions. The tools provided by ATD are widely used, especially the three categories of praxeologies directly linked to teaching: praxeologies to be taught, praxeologies for teaching and praxeologies for the teaching profession.

Résumé. Dans cette communication, qui fait partie d'un travail de thèse, nous proposons une interprétation des différentes catégories ou domaines de connaissances pour l'enseignement que propose l'approche centrée sur le *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) en vue d'élucider le problème abordé par cette approche et la portée de ses contributions. Nous utilisons pour cela les outils de la TAD, tout spécialement les trois catégories de praxéologies directement liées à l'enseignement des mathématiques : praxéologies à enseigner, pour l'enseignement et pour la profession de professeur.

Resumen. En esta comunicación, que forma parte de un trabajo de tesis doctoral, proponemos interpretar las categorías o dominios de conocimientos necesarios para la enseñanza que propone el enfoque centrado en el *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) con el objetivo de dilucidar el problema que aborda y el alcance de sus aportaciones. Utilizaremos las herramientas que proporciona la TAD y, en especial, las tres categorías de praxeologías directamente relacionadas con el ejercicio de la docencia de matemáticas: praxeologías por enseñar, para la enseñanza y para la profesión docente.

IV^{e} congrès international sur la TAD (Toulouse, 21-26 avril 2013)
Axe 1. *Perspectives de la TAD, rapports avec d'autres approches*

Ruiz-Olarría, A., Bosch, M. & Gascón, J. (2017). El conocimiento pedagógico del contenido y las praxeologías matemáticas para la enseñanza. Dans G. Cirade et al. (Éds), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* (pp. 131-153). https://citad4.sciencesconf.org

1. Introducción

La búsqueda de medidas encaminadas a mejorar la formación del profesorado y el ejercicio de la profesión docente han sido y siguen siendo objeto permanente de investigación desde diferentes disciplinas y ha dado lugar a diversas teorías y enfoques que tratan de delimitar dicha problemática y proponer soluciones. Una de las propuestas más influyentes surgió en los años 80 del siglo pasado, con la noción de «conocimiento pedagógico del contenido» (*Pedagogical Content Knowledge*, PCK) introducida por el psicólogo americano Lee S. Shulman (1986, 1987). El PCK se interpreta como una amalgama de conocimientos sobre la materia y conocimientos de pedagogía que, se supone, constituyen la forma propia y exclusiva de comprensión profesional de los profesores. Se afirma que el PCK permite organizar los temas, representarlos y adaptarlos a los diversos intereses y capacidades de los alumnos, así como exponerlos en la enseñanza de la manera más eficaz.

En esta misma línea, la investigadora americana Deborah L. Ball toma en consideración, específicamente, el conocimiento matemático desde el punto de vista de la enseñanza, incluyendo el conocimiento de la estructura de la materia, las normas que rigen su funcionamiento y las relaciones entre sus contenidos. De forma similar al PCK, la nueva noción de «conocimiento matemático para la enseñanza» (*Mathematical Knowledge for Teaching*, MKT) constituye una herramienta analítica para el estudio del conocimiento matemático-didáctico de los profesores más que un modelo de tal conocimiento en sí mismo (Deborah L. Ball, Mark H. Thames & Geoffrey Phelps, 2008). La tesis central de estas aportaciones consiste en subrayar la existencia de un tipo especial de conocimiento del contenido (y, en particular, del contenido matemático) que es específico de la profesión de profesor. Se trata de una tesis que se ha construido a partir del análisis empírico de las prácticas docentes del profesorado y que ha tenido y sigue teniendo una gran influencia en las investigaciones educativas.

En esta comunicación, que forma parte de un trabajo de tesis doctoral en curso, utilizaremos las tres categorías de praxeologías directamente relacionadas con el ejercicio de la docencia de matemáticas propuestas por Gisèle Cirade (2006) para clarificar nuestra interpretación de los *conocimientos matemáticos necesarios para la enseñanza* en el ámbito de la formación del profesorado y empezar así a establecer un diálogo con los enfoques que utilizan el MKT. Aquí, nos centraremos en las praxeologías *para la enseñanza* enfatizando su relación con las praxeologías *por enseñar*. Nos proponemos interpretar, utilizando las herramientas que proporciona la TAD, las categorías de conocimientos que propone el enfoque centrado en el MKT con el objetivo de dilucidar el problema que aborda y el alcance de sus aportaciones.

2. El conocimiento pedagógico del contenido (PCK)

La línea de investigación inaugurada por Lee Shulman en 1987 surge como respuesta a la pregunta: ¿Qué conocimiento es esencial para el profesor? La noción clave para responder a esta pregunta es la de *conocimiento pedagógico del contenido* (PCK). Esta noción surge de la constatación repetida de que ni el conocimiento del *contenido matemático* es una garantía suficiente para que el profesor enseñe dicho contenido de una manera eficaz, ni el *conocimiento pedagógico* que pueda tener el profesor de los métodos de enseñanza, cuando este conocimiento es independiente de la disciplina a enseñar, mejora las cosas significativamente. El *conocimiento pedagógico del contenido* incluye, así, aquellos conocimientos del profesor relativos al aprendizaje de los estudiantes de un contenido específico como, por ejemplo, el conocimiento que tienen los profesores de las dificultades típicas de los estudiantes en cada tema concreto y la manera de preverlas y remediarlas. De esta forma se amplía la noción de *conocimiento pedagógico* incluyendo componentes matemáticos. Según Alan H. Schoenfeld (2000) esta idea constituye el origen de un nuevo programa de investigación en el que ya se ha llevado a cabo un importante volumen de trabajo y que, sobre todo, plantea cuestiones muy interesantes para futuras investigaciones:

> The idea of the pedagogical content knowledge has been elaborated in numerous studies (e. g., Carpenter, Fennema, Peterson & Carey, 1988; Grossman, 1990; Ma, 1999; Sherin, 1996; Stein, Baxter & Leinhart, 1990). Such studies indicate ways in which teachers' knowledge shapes what the teachers are able to do in the classroom at times constraining their options, at times providing the support-structure for a wide range of activities. But there are many open questions as one considers the nature of teachers' knowledge. What forms does such knowledge take? How is it organized? How is it

accessed? A comprehensive model of teaching needs to address such issues. (p. 247)

Debido a la enorme influencia que ha tenido el trabajo de Shulman sobre las investigaciones relativas a la formación del profesorado a lo largo de los últimos 25 años, sintetizaremos sus principales aportaciones tal como aparecen en L.S. Shulman (1987), donde expone lo que considera el «conocimiento base para la enseñanza» —*the knowledge base of teaching*— en el afán de dar una respuesta a la pregunta acerca de la base intelectual, práctica y normativa para la profesionalización de la docencia.

¿Cuáles son las fuentes del *conocimiento base para la enseñanza* y en qué términos se pueden conceptualizar estas fuentes? Para empezar a dar respuesta a estas cuestiones, Shulman y sus colaboradores observan, según sus propias palabras, cómo se desarrollan los conocimientos de pedagogía y del contenido de las materias en los jóvenes profesores, desde que son estudiantes en los programas de formación del profesorado hasta que se transforman en profesores noveles. Los resultados de sus propias investigaciones y las de otros colegas (Berliner 1986; Leinhardt & Greeno, 1986) le llevaron a la identificación de las fuentes del *conocimiento base para la enseñanza* al tiempo que sugerían esquemas generales de este conocimiento. La observación de cómo maestros experimentados enseñaban «la materia» que planteaba dificultades a los profesores novatos sirvió para centrar la atención en los tipos de conocimientos y destrezas necesarios para enseñar bien. Por otra parte, la atención en la enseñanza de temas específicos —Huckleberry Finn, las ecuaciones de segundo grado, el subcontinente indio, la fotosíntesis— fue reveladora de la manera en que determinados tipos de conocimientos de la materia y ciertas estrategias didácticas interactuaban en la mente de los profesores. Como resultado de todas estas investigaciones, Shulman establece las 7 categorías siguientes del *conocimiento base para la enseñanza*:

- *conocimiento del contenido,* considerado como la formación estándar del profesor en su especialidad y medida en el nivel de titulación;
- *conocimiento pedagógico general*, atendiendo especialmente aquellos principios y estrategias de manejo y organización de la clase que trascienden el ámbito de la asignatura;

- *conocimiento del currículo,* con especial dominio de los materiales y los programas que sirven como «herramientas para el oficio» del docente;
- *conocimiento pedagógico del contenido* (PCK) entendido como esa «amalgama especial» entre materia y pedagogía que constituye una esfera exclusiva de los profesores, su propia forma de comprensión profesional;
- conocimiento de los alumnos y de sus características;
- *conocimiento de los contextos educativos,* que abarca desde el funcionamiento del grupo clase, la gestión y financiación de los distritos escolares, hasta el carácter de las comunidades y culturas;
- conocimiento de *los objetivos, las finalidades y los valores educativos, y de sus fundamentos filosóficos e históricos*. Los profesores deben basar sus concepciones sobre las finalidades posibles y deseables de la educación en las obras que, desde Platón hasta Dewey, Neill y Skinner expresan sus ideas sobre los buenos sistemas educativos y, en general, en las obras de índole filosófica, crítica y empírica que pueden informar los objetivos, las visiones y los sueños de los profesores.

Entre estas categorías, el *conocimiento pedagógico del contenido* (PCK) adquiere particular interés porque identifica los cuerpos de conocimientos propios para la enseñanza. Representa la mezcla entre conocimientos pedagógicos y conocimientos sobre la materia y permite comprender cómo determinados temas y problemas se organizan, se representan y se adaptan a los diversos intereses y capacidades de los alumnos, y se exponen para su enseñanza. El conocimiento pedagógico del contenido es la categoría que, con mayor probabilidad, permite distinguir entre la comprensión del especialista en un área del saber y la comprensión del profesor.

Durante años, Shulman y sus colaboradores han realizado observaciones y análisis de los comportamientos de numerosos profesores cuando enseñan. La organización de los datos y su interpretación les ha permitido inferir principios adecuados de la práctica, que pueden servir como guías útiles para su implementación. Se trata, también, de reconocer las características específicas relativas a las estrategias pedagógicas según la materia en cuestión. Como resultado de sus observaciones, estos autores coligen que no se puede evaluar adecuadamente al profesorado por medio de la observación de su actuación docente si no se tiene en cuenta la materia que se está enseñando. Propugnan que los programas de formación del profesorado no deben restringir su actividad a la didáctica general y la supervisión de las prácticas, ya que no son ámbitos libres de contenidos; consideran que el énfasis en el conocimiento pedagógico de la materia que se enseña debería impregnar todo el currículo de la formación de profesores.

3. El conocimiento matemático para la enseñanza (MKT)

Las investigaciones de D. L. Ball, M. H. Thames y G. Phelps (2008) se basan en las realizadas por Shulman y se centran en «aquello que los profesores tienen que saber y poder hacer para llevar a cabo de una manera eficiente el trabajo de enseñar matemáticas» (p. 397). Una vez puesto en evidencia que no basta con el conocimiento del contenido para enseñar de manera eficaz, el problema está en cómo hay que saber este contenido y qué otros conocimientos deberían tener los profesores. El énfasis hay que ponerlo en el uso del conocimiento en y para la enseñanza, y no tanto en la actuación concreta del profesor en el aula. Plantean así la necesidad de responder, en primera instancia, a la pregunta:

> What fundamental activities are demanded by the broad aims of developing a classroom in which mathematics is treated with integrity, students' ideas are taken seriously, and mathematical work is a collective as well as an individual endeavor? (p. 396)

La noción fundamental que introducen D. L. Ball, M. H. Thames y G. Phelps (2008) es la de *conocimiento matemático para la enseñanza* (MKT). Se interpreta como los conocimientos matemáticos necesarios para la enseñanza de las matemáticas ya que, según estos autores:

> Teaching involves showing students how to solve problems, answering students' questions, and checking students' work, it demands an understanding of the content of the school curriculum. (p. 396)

Sus investigaciones se apoyan en el estudio de casos concretos y también en estudios longitudinales realizados en las aulas: videos de clases, planes de estudio, apuntes de profesores y trabajos de estudiantes. Se trata de coordinar los puntos de vista matemático y pedagógico a partir del análisis detallado de los registros de estas prácticas con el objetivo de llegar a desarrollar una teoría basada en la práctica del conocimiento matemático conforme se va utilizando en la enseñanza. El análisis cualitativo que llevan a cabo está guiado por las dos cuestiones siguientes:

> 1. What are the recurrent tasks and problems of teaching mathematics? What do teachers do as they teach mathematics?
> 2. What mathematical knowledge, skills, and sensibilities are required to manage these tasks? (p. 396).

Por ejemplo, el profesor tiene que saber por qué se producen los errores de los alumnos, cuál es la fuente de estos errores y la manera de subsanarlos «con fluidez», consideraciones que, según estos autores, marcan una diferencia con las demás profesiones. Estiman que dicha diferencia se manifiesta, por ejemplo, en que los investigadores han de revisar sus propios errores y no los de los demás, mientras que el profesor debe revisar no solo los errores de los estudiantes sino analizar respuestas inusuales de los alumnos y proporcionar soluciones acertadas, lo que es fundamental en el trabajo de la enseñanza.

En el análisis que hacen de las tareas de enseñanza, D. L. Ball, M. H. Thames y G. Phelps (2008) han concluido que muchas de ellas requieren conocimientos matemáticos aparte de los conocimientos acerca de los estudiantes o de la enseñanza. Por ejemplo, decidir si un método funciona para el caso general, seleccionar una representación matemática adecuada o determinar la validez de un argumento matemático, requiere conocimiento matemático, antes que conocimiento acerca de los estudiantes o de la enseñanza lo que, por otra parte, no se aprende en los cursos universitarios de matemáticas. En resumen, ponen de manifiesto que existen conocimientos sobre la materia que no forman parte ni del conocimiento matemático oficial ni del pedagógico y que, por lo tanto, hay que identificar y organizar adecuadamente para incluirlos en los cursos de formación para profesores.

Desde un punto de vista metodológico y como complemento a los análisis cualitativos de la enseñanza, estos autores desarrollaron y validaron encuestas sobre los conocimientos matemáticos para la enseñanza. Estas encuestas se pasaron a grandes muestras de profesores y los resultados obtenidos proporcionaron una base empírica para contrastar las hipótesis sobre la estructura del conocimiento matemático para la enseñanza a la vez que ayudaron a refinar las categorías correspondientes. En definitiva, estos análisis aportaron evidencia de que el conocimiento matemático necesario para la enseñanza es multidimensional (Heather C. Hill & Deborah L. Ball, 2004).

En este sentido, y como resultado de los análisis descritos, para materializar el nuevo mapa del MKT, D. L. Ball, M. H. Thames y G. Phelps (2008) establecen cuatro dominios:

1) El *conocimiento común del contenido* (*common content knowledge*, CCK) que se utiliza en otros ámbitos distintos del de la enseñanza. Por ejemplo, los profesores deben saber hacer el trabajo que exigen a sus alumnos.
2) El *conocimiento especializado del contenido* (*specialized content knowledge*, SCK) que se requiere exclusivamente para la enseñanza. Este conocimiento se necesita, por ejemplo, para generalizar un procedimiento inusual o buscar patrones de errores en los alumnos, así como saber qué objetos elegir a la hora de representar situaciones matemáticas con eficacia. Para hacer este trabajo, se precisa una especie de «descompresión» de las matemáticas que no se necesita en otros ámbitos.
3) El *conocimiento del contenido y de los estudiantes* (*knowledge of content and students*, KCS) combina conocimientos acerca de los estudiantes y de las matemáticas. Los profesores tienen que anticipar qué es lo que los estudiantes van a encontrar fácil o difícil, qué será motivador para ellos, qué será interesante, etc. Deben, asimismo, poder interpretar lo que los estudiantes dicen, ayudarlos en la expresión de sus pensamientos emergentes, conocer las concepciones y los errores más comunes, etc.
4) El *conocimiento del contenido y la enseñanza* (*knowledge of content and teaching*, KCT) combina conocimiento sobre la enseñanza y conocimiento de las matemáticas. Los profesores secuencian un contenido particular y eligen qué ejemplos presentar para ayudar a los estudiantes a profundizar mejor en el contenido. Un ejemplo sería conocer diferentes modelos del algoritmo de la resta válidos para su enseñanza en un nivel educativo concreto y saber implementarlos con eficacia.

En relación con las categorías del mapa de L.S. Shulman, los puntos (3) y (4) coinciden con las dos dimensiones centrales del *conocimiento pedagógico del contenido* (PCK) (ver figura 1), pero el punto (2) aparece como un conocimiento específico esencial que no se entrelaza con el PCK. Además, D.L. Ball y sus colaboradores postulan la necesidad de considerar otro tipo de conocimiento del contenido: el *conocimiento matemático en el horizonte* (*horizon knowledge of mathematics*, HKC). Se trata de un tipo de visión periférica que no se exterioriza en la enseñanza pero que orienta y dirige la práctica docente (Deborah L. Ball & Hyman Bass, 2009). Del mismo modo aparece también lo que se considera *conocimiento del currículo* (figura 1).

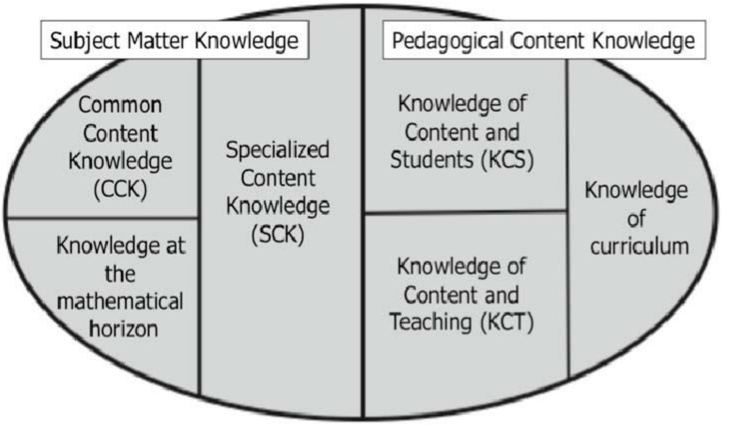


Figura 1. Mapa del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT).
Fuente: Ball & Bass (2009).

En definitiva y según sus propios autores, la principal aportación de este enfoque consiste en proponer la existencia de un conocimiento matemático que no se necesita normalmente para fines distintos de la enseñanza y que, por tanto, se puede considerar como específico de la profesión de profesor, es el denominado *conocimiento especializado del contenido* (SCK). Se trata de un conocimiento caracterizado por ser explícito y consciente más allá del conocimiento implícito o tácito. Entre las tareas matemáticas habituales e incluso rutinarias que llevan a cabo los profesores y en las que se manifiesta este tipo de conocimiento, D. L. Ball, M. H. Thames y G. Phelps (2008) destacan las siguientes: (a) presentar los conceptos matemáticos; (b) responder a los estudiantes mediante preguntas; (c) encontrar un ejemplo para tratar una cuestión matemática específica; (d) seleccionar una representación matemática adecuada; (e) conectar los temas de los diferentes cursos académicos; (f) explicar los objetivos matemáticos a los padres; (g) evaluar y adaptar el contenido matemático de los libros de texto; (h) graduar la dificultad de las tareas; (i) determinar la validez de un argumento matemático; (j) elegir definiciones adecuadas; (k) utilizar la notación matemática y el lenguaje natural de manera crítica; (l) reconocer equivalencias entre dos expresiones.

4. Praxeologías relacionadas con la enseñanza de las matemáticas

¿Cómo podemos interpretar desde la TAD los desarrollos que acabamos de presentar sobre el MKT y más específicamente sobre el SCK? Es evidente, en primer lugar, que la TAD conceptualiza como praxeologías o ingredientes praxeológicos los diferentes tipos de conocimientos delimitados. Siguiendo el trabajo de G. Cirade (2006) conviene distinguir, como hemos indicado en la introducción, tres tipos diferentes de praxeologías relacionadas con las prácticas docentes: las praxeologías *por enseñar*, las praxeologías *para la enseñanza* y las *praxeologías de la profesión docente*. Las praxeologías por enseñar vienen determinadas, al menos teóricamente, por un pacto social que establece lo que debe ser estudiado en la escuela y quedan, básicamente, delimitadas en el currículo. Dado que los conocimientos del profesor no pueden reducirse estrictamente a aquello que debe enseñar, se hace necesario lo que G. Cirade (2006) designa como *praxeologías para la enseñanza*, y que contienen los conocimientos matemáticos necesarios para delimitar las matemáticas por enseñar, interpretarlas, cuestionarlas y explicitar su «razón de ser». Estas praxeologías se insertan en un conjunto más amplio, las praxeologías *de la profesión docente*, que incluyen aquellos elementos que permiten el cuestionamiento, la desconstrucción y la reconstrucción tanto de las praxeologías por enseñar como de las praxeologías para la enseñanza. Todas son praxeologías *didácticas* en la medida en que están orientadas a la *difusión social de las praxeologías matemáticas* y, por tanto, contienen los conocimientos que se requieren para diseñar y gestionar el proceso de estudio de las matemáticas. Avanzar en el conocimiento y desarrollo de estas praxeologías didácticas es, de hecho, uno de los principales objetivos actuales de la investigación en didáctica de las matemáticas.

En resumen, podemos distinguir, al menos, tres tipos de praxeologías directamente relacionadas con el ejercicio de la docencia de matemáticas, en el bien entendido que cada uno de los tipos está contenido en el siguiente (ver figura 2).

Praxeologías por enseñar	$\subset$	Praxeologías para la enseñanza	$\subset$	Praxeologías de la profesión docente

Figura 2. Praxeologías relacionadas con la enseñanza de las matemáticas.

Es importante resaltar que las praxeologías no son, generalmente, construcciones individuales. La TAD asume un principio fundamental, el del *carácter institucional o colectivo de las praxeologías* según el cual la «vida» de las praxeologías (en el sentido de construcción, desarrollo, mantenimiento, difusión, evolución, desaparición, etc.) no depende, en primera instancia, de las personas individualmente consideradas, sino de las *instituciones* en las que actúan estas personas. Por lo demás, las praxeologías relacionadas con la enseñanza de las matemáticas no se pueden considerar como disponibles y listas para ser utilizadas en la enseñanza ni, mucho menos, en la formación del profesorado. Postulamos que las praxeologías matemáticas *para la enseñanza* se construyen en gran medida como consecuencia del desarrollo de las respuestas a cuestiones que pueden surgir en el ámbito de las praxeologías matemáticas *por enseñar*. Así, por ejemplo, una cuestión del tipo «¿Cómo justificar en la enseñanza obligatoria la regla de los signos del producto de números enteros?», que pertenece plenamente a las matemáticas por enseñar, puede generar la construcción de una praxeología matemática para la enseñanza —relacionando la emergencia de los números negativos con las necesidades manipulativas del álgebra elemental (Eva Cid & Noemí Ruiz-Munzón, 2011)— y una praxeología de la profesión (en este caso, aún por construir).

El trabajo de G. Cirade (2006) muestra la gran problematicidad que encierran las matemáticas que se enseñan en Secundaria y cómo los recursos matemáticos que permiten abordarla están todavía muy alejados de la cultura matemática de la comunidad docente dado que, en muchos casos, requieren elaboraciones matemáticas originales y no triviales. A veces, la problematicidad no rebasa el ámbito de las propias matemáticas por enseñar y, entonces, no suele ser muy costoso obtener la información necesaria para construir las respuestas apropiadas a través de los colegas profesores o de recursos fácilmente disponibles para los miembros de la profesión. La formación inicial, tanto matemática como didáctica, y las prácticas tuteladas del joven profesor constituyen aquí la vía ideal para subsanar el problema. En muchos otros casos surgen cuestiones problemáticas que van más allá de los contenidos de enseñanza, cuyas respuestas se sitúan en las praxeologías matemáticas para la enseñanza, como sucede con las siguientes: ¿qué diferencia hay entre una razón, una fracción y un cociente?, ¿por qué se miden los ángulos en radianes?, ¿por qué la función de proporcionalidad no es objeto de estudio en la universidad?, ¿se necesitan realmente los números reales en la educación secundaria?, ¿para qué sirve la noción de mediana? Ahora, la búsqueda de elementos de respuesta adquiere una mayor complejidad ya que para responderlas se requieren *elaboraciones matemáticas originales* que se sitúan a caballo entre las matemáticas «sabias» y las «escolares». Son herramientas *matemáticas* de uso *didáctico* necesarias para el diseño, implementación y evaluación de los procesos formativos. Otros ejemplos relevantes de elaboración de infraestructuras matemáticas potencialmente útiles para diseñar praxeologías matemáticas para la enseñanza, y dirigidos explícitamente a la formación del profesorado, se encuentran en el trabajo ya clásico de Félix Klein (1908/2006) *Matemáticas elementales desde un punto de vista superior* y en el de Henri Lebesgue (1915/1995) *La medida de las magnitudes*, cuyo objetivo es fundamentar la relación entre los números reales y la medida de magnitudes continuas.

5. Praxeologías *para la enseñanza* y modelos epistemológicos de referencia

Postulamos que el problema de la construcción de una praxeología matemática *para la enseñanza* con el fin de utilizarla, por ejemplo, en una institución de formación del profesorado, está estrechamente relacionado con el problema de la construcción de un modelo epistemológico de referencia (MER) de la correspondiente praxeología por enseñar. Consideramos que el proceso de construcción de un MER y los criterios y principios que lo rigen constituyen componentes de la praxeología para la enseñanza (y también de la praxeología de la profesión asociada, caso que no abordaremos aquí). Esta es la razón por la cual la elaboración de una praxeología para la enseñanza, en el ámbito de la TAD, ha estado siempre ligada al cuestionamiento de las praxeologías escolares habituales y, consiguientemente, a la construcción de nuevas praxeologías por enseñar.

En este apartado mostraremos, a título de ejemplo, qué aspectos del proceso de construcción de un MER de una praxeología por enseñar (en cierta institución) pueden interpretarse como componentes de una praxeología para la enseñanza en la citada institución. Para ello tomaremos el caso del *álgebra elemental* porque disponemos de múltiples trabajos elaborados en el ámbito de la TAD en los que se cuestiona y se reformula este ámbito de la matemática escolar (Yves Chevallard, 1984, 1989, 1990; Pilar Bolea, Marianna Bosch y Josep Gascón, 2001; Pilar Bolea, 2003; Ruiz-Munzón, 2010).

El cuestionamiento del que parte la TAD no aborda directamente los errores y dificultades de los alumnos con el álgebra elemental o las posibles secuencias y recursos que pueden utilizar los profesores en su enseñanza. El primer paso es analizar los componentes de la praxeología escolar en torno al álgebra elemental, es decir estudiar qué se enseña actualmente bajo la designación de «álgebra» en las distintas instituciones escolares, qué se ha enseñado en otros periodos y qué tipos de evoluciones ha seguido el proceso transpositivo. Se constata entonces (Chevallard, 1984) que la problemática a la que responde no está claramente explícita ni en el currículo oficial ni en los libros de texto y, en cierto sentido, podríamos decir que la institución de la enseñanza secundaria ha «olvidado» la razón de ser del álgebra elemental. El modelo epistemológico del álgebra elemental vigente en la enseñanza secundaria la presenta, de hecho, como una *aritmética generalizada* formada por un conjunto de tareas y técnicas bastante formales y desarticuladas y muy débilmente interpretadas y justificadas. Esta situación permite explicar muchas de las dificultades para enseñar y aprender el álgebra elemental en secundaria.

En esta situación no parece razonable la pretensión de diseñar una praxeología *para la enseñanza* con base en el modelo epistemológico del álgebra elemental dominante en dicha institución, ya que no nos permitiría superar sus limitaciones. La TAD propone utilizar el *análisis praxeológico* del álgebra elemental que, además del estudio de los procesos transpositivos que afectan este ámbito de la matemática enseñada, incluye el proceso de *construcción de un MER* para dicho ámbito y, en particular, los *criterios y principios* que han regido su construcción.

En lo que sigue, formularemos esquemáticamente algunas de las principales cuestiones que han guiado la construcción del MER y que, como tales, constituyen la base para diseñar una posible praxeología para la enseñanza del álgebra elemental en secundaria. Dicho en otros términos, las cuestiones que propondremos son cuestiones que deberían estudiarse en un proceso de formación del profesorado de matemáticas, y el conjunto de respuestas articularían una posible praxeología para la enseñanza. Obviamente, la elección de las cuestiones que propondremos se fundamenta en la forma de interpretar el álgebra elemental en la TAD y en los resultados obtenidos en los trabajos de investigación desarrollados en este ámbito. El proceso de construcción de un MER del álgebra elemental en Secundaria podría partir de una cuestión como la siguiente:

> ¿Qué papel juega y qué papel podría jugar el álgebra elemental en la matemática escolar de secundaria?

Entre otras posibles, debería considerarse la respuesta según la cual el álgebra elemental debe considerarse, en secundaria, como un *instrumento de modelización* de todo tipo de sistemas (sean estos matemáticos o extramatemáticos). Para simplificar, nos restringiremos aquí a este caso, considerando la siguiente cuestión en el proceso de construcción del MER:

> ¿Qué praxeologías matemáticas pueden tomarse como sistema inicial a modelizar? ¿Qué tipos de tareas matemáticas planteables en este sistema podemos tomar como punto de partida?

Entre las respuestas posibles se encuentra la de considerar como sistema inicial por modelizar la praxeología matemática en torno a los *problemas aritméticos*, con la emergencia de la noción de *programa de cálculo aritmético* (PCA) (Ruiz-Munzón, 2010).

Si aceptamos que el álgebra elemental debe jugar inicialmente el papel de un *instrumento de modelización* y que este instrumento se desarrolla a través de etapas sucesivas que denominamos *etapas del proceso de algebrización* de las praxeologías matemáticas, entonces la construcción del MER requerirá plantearse y discutir posibles respuestas alternativas a lo siguiente:

> ¿Qué cuestiones problemáticas planteables en dicho sistema requieren de manera ineludible el uso, en la primera etapa de la ESO, del instrumento algebraico y, por lo tanto, posibilitan la génesis funcional del mismo?

En la respuesta que propone actualmente la TAD, se identifica la *primera etapa del proceso de algebrización* con el momento en que es necesario trasladar la *formulación retórica* de un PCA a una *formulación escrita* (simbólica) de dicho PCA y manipular su estructura globalmente. En esta etapa aparecen nuevas técnicas, esencialmente de *simplificación*, para resolver los nuevos problemas. El paso de la formulación retórica de un PCA a su formulación simbólica pone en juego la necesidad de escribir la secuencia de *operaciones en una única línea, explicitando su estructura de forma global* y, por lo tanto, tomando en consideración la *jerarquía de las operaciones*, las reglas del *uso de paréntesis* y las propiedades de las relaciones entre ellas (elementos tecnológicos).

> ¿Qué nuevo tipo de tareas deberán plantearse en el ámbito de los problemas aritméticos para poner de manifiesto las limitaciones de las técnicas algebraicas de simplificación y provocar la emergencia de nuevas técnicas algebraicas definitorias de una segunda etapa de algebrización?

En los trabajos de la TAD, el paso a la *segunda etapa del proceso de algebrización* se identifica con la necesidad de igualar dos PCA que contienen los dos mismos argumentos no numéricos.

$$P\ (x_1, x_2, a_1, \ldots, a_k) = Q\ (x_1, x_2, b_1, \ldots, b_s)$$

Se requiere de nuevas técnicas, las *técnicas de cancelación*, puesto que hay que manipular una igualdad de dos PCA como un nuevo objeto matemático (ecuación). Dichas técnicas tienen como fin obtener "*ecuaciones equivalentes*" y no sólo PCA equivalentes como pasaba con las técnicas de simplificación características de la primera etapa. En esta segunda etapa del proceso de algebrización es donde se sitúa, en particular, la praxeología que contiene las tareas resolubles mediante *ecuaciones con una incógnita*.

> ¿En cuántas etapas parece razonable articular el proceso de algebrización de las organizaciones matemáticas en la enseñanza secundaria?

La TAD propone estructurar el proceso de algebrización en tres etapas. La *tercera etapa* corresponde al momento en que surge la necesidad de no limitar el número de variables y de no hacer distinción entre *incógnitas* y *parámetros*. El tipo de cuestiones que provoca esta ampliación tiene relación con el estudio relativo a cómo repercute la variación conjunta de dos o más variables sobre el PCA, aunque las técnicas disponibles para abordar estas cuestiones en el ámbito puramente algebraico pueden ser bastante limitadas. Otro tipo de cuestiones que no pueden resolverse plenamente en la segunda etapa son las que hacen referencia a la existencia y unicidad de soluciones.

> ¿Qué papel se asignará a las ecuaciones con una incógnita en dicho proceso? ¿Y a las ecuaciones con dos incógnitas?

En el MER que propone la TAD, la actividad matemática en torno a las ecuaciones con una incógnita se sitúan entre la primera etapa (ecuaciones con una incógnita que no requieren del uso de la técnica de cancelación) y la segunda etapa (ecuaciones que requieren el uso de dicha técnica). Dicha actividad se considera como un caso muy particular de la actividad en torno a las ecuaciones con dos incógnitas que constituyen el ámbito de la segunda etapa del proceso de algebrización.

> ¿Cuáles son las cuestiones matemáticas o extramatemáticas a las que el álgebra elemental viene a responder en la enseñanza secundaria? Esto es, ¿cuál es la razón de ser del álgebra elemental? ¿Constituyen los problemas de planteo algebraico su razón de ser?

La TAD propone como razón de ser del álgebra elemental—como culminación del proceso de algebrización elemental— la actividad que caracteriza la tercera etapa, esto es, el trabajo sistemático con fórmulas en el que no se limita el número de variables y en el que se lleva a cabo un juego sistemático entre “incógnitas” y “parámetros” que se consideran intercambiables.

Añadamos, finalmente, que la construcción de una praxeología para la enseñanza del álgebra elemental también debería incluir cuestiones de más largo alcance aunque no avanzaremos más en este desarrollo sobre los posibles componentes de las praxeologías para la enseñanza y su relación con la elaboración y uso de un MER. Hemos querido ilustrar la complejidad y riqueza del *análisis praxeológico* de la matemática enseñada que propone la TAD y que también debería incluir —indicado solo fugazmente— el estudio de los *procesos transpositivos* que explican el estado actual de la enseñanza del álgebra en secundaria, sus orígenes, motivaciones y deficiencias.

Volvamos a la propuesta de D. L. Ball y sus colaboradores para intentar relacionar la problemática de los MER y las praxeologías para la enseñanza con los distintos componentes del «conocimiento del contenido para la enseñanza» que proponen estos autores.

6. Los componentes praxeológicos del «conocimiento especializado del contenido»

Para ilustrar lo que distingue el conocimiento *especializado* del contenido del conocimiento *puro* del contenido, D. L. Ball y H. Bass (2009, p. 3) toman el ejemplo de la multiplicación de números enteros y las producciones de tres alumnos (figura 3).

$$
\begin{array}{r}
49 \\
\times\, 25 \\
\hline
405 \\
108 \\
\hline
1485
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
49 \\
\times\, 25 \\
\hline
225 \\
\underline{100} \\
325
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
49 \\
\times\, 25 \\
\hline
1250 \\
25 \\
\hline
1275
\end{array}
$$

Figura 3. Producciones de tres alumnos en una multiplicación.

Llegar a identificar las causas que han originado los errores en los resultados es un conocimiento exigible al profesorado de matemáticas puesto que, a juicio de estos investigadores, facilitará una manera mejor de intervenir para evitar su reproducción. Es tarea del profesor averiguar y poder dar una explicación de cada uno de los pasos que el alumno ha ejecutado.

Así, en el primer ejemplo, la hipótesis plausible es que el alumno haya iniciado el algoritmo «usual» alterando el orden de «la llevada»: al multiplicar 5 por 49, ha escrito 5, la cifra de las unidades y ha sumado el 4, cifra de las decenas a la cifra de las decenas de 49, lo que da 8, cuyo producto por 5 es 40. Esta interpretación concuerda con el resultado 108 de multiplicar 2 por 49 siguiendo la misma pauta.

D. L. Ball y H. Bass (2009) afirman que este tipo de análisis es una habilidad de la que carecen muchos profesores a pesar de ser un requisito indispensable para poder determinar las causas de estos errores. Para dar respuesta a esta tarea, proponen bucear en las diferentes maneras en que los estudiantes han aprendido a realizar cálculos y tratar de identificar fragmentos de estos algoritmos que se hayan podido deslizar en los nuevos cálculos. Los profesores no solo deberían estar en condiciones de determinar los procedimientos erróneos sino también los procedimientos correctos pero inusuales. D. L. Ball, M. H. Thames y G. Phelps (2008) se sirven de los siguientes ejemplos de sustracciones, a título de ejemplo, de lo que los profesores deberían saber: no solamente explicar cómo se realizan los distintos pasos sino su generalización posible más allá de los casos concretos (figura 4).

$$
\begin{array}{r}
307 \\
-168 \\
\hline
-1 \\
-60 \\
200 \\
\hline
139
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
307 \\
-168 \\
\hline
2 \\
30 \\
107 \\
\hline
1\ 39
\end{array}
$$

Figura 4. Dos técnicas para realizar sustracciones.

Así, en el primer caso, el –1 sale de la diferencia entre las cifras mayor y menor de las unidades respectivas añadiendo el signo – porque la cifra del sustraendo es mayor que la del minuendo; -60 es el equivalente a lo anterior con relación a las cifras de las decenas, al igual que 200. El resultado final se obtiene restando 61 de 200. En el segundo caso, se escriben los resultados parciales de completar el sustraendo a la decena y centena superiores, lo que permite completar 168 a 200 (añadiendo 2 y 30), y se añaden finalmente las 107 unidades que permiten llegar a 307.

Con estos ejemplos los autores especifican en qué sentido el *conocimiento especializado del contenido* va más allá del *conocimiento común.* Enfatizan de este modo la existencia de una relación institucional al conocimiento matemático que es propia de la profesión docente y no coincide con las de otras instituciones:

> The mathematical demands of teaching require specialized mathematical knowledge, needed by teachers, but not needed by others. Accountants have to calculate and reconcile numbers and engineers have to mathematically model properties of materials, but neither group needs to explain why, when you multiply by ten, you “add a zero.” In developing survey questions to measure such knowledge, we ask, for example, whether an unusual method proposed by a student would work in general, which statement best explains why we find common denominators when adding fractions, and which of a set of given drawings could be used to represent 2 divided by 2/3. These and questions like them are the daily fare of teaching. The demands of the work of teaching mathematics create the need for a body of mathematical knowledge that is specialized to teaching. (p. 401)

Los ejemplos presentados como prototipos del conocimiento especializado del contenido también muestran los elementos praxeológicos específicos de la tarea docente. En los de la figura 3, parece evidente que los alumnos han intentado emplear la «técnica usual» —predominante en la enseñanza— aunque hayan obtenido un resultado erróneo. Desde el punto de vista del observador, se trata de la puesta en funcionamiento de una técnica relativa a una *praxeología por enseñar*. El *conocimiento especializado del contenido,* necesario para elucidar por qué un alumno ha combinado, sustituido, confundido, etc. la secuencia de gestos prescritos para lograr el buen resultado, se situaría en el nivel de una *praxeología matemática para la enseñanza* en la institución de educación primaria. Los componentes de tal praxeología incluyen las praxeologías por enseñar (es decir, la realización de los algoritmos de cálculo como el producto y la sustracción con sus gestos técnicos y algún elemento tecnológico explicativo), pero deben incorporar otros elementos praxeológicos (identificación de elementos de técnicas alternativas, con sus posibles justificaciones tecnológicas, etc.) que son los que «expanden», como dicen los autores, el conocimiento matemático elemental. Creemos que, mientras los alumnos pueden utilizar (de forma correcta o incorrecta) técnicas de una *praxeología por enseñar* para resolver tareas matemáticas sin un conocimiento explícito de las correspondientes tecnologías que permiten interpretar y justificar dichas técnicas, los profesores deben conocer o construir explícitamente las citadas tecnologías matemáticas para llevar a cabo las tareas que forman parte del *conocimiento especializado del contenido*.

Lo que no se observa en los distintos componentes del conocimiento especializado del contenido es el *cuestionamiento* de las praxeologías matemáticas por enseñar, de su naturaleza y componentes. ¿Qué técnica de multiplicación o de sustracción se enseña y por qué? ¿Qué otras alternativas posibles no se enseñan y por qué? ¿Qué diferencias, en un sentido ergonómico (Sierra, Bosch & Gascón, 2013; Brousseau, 2007, 2010), se pueden establecer entre las distintas técnicas? ¿Qué elementos tecnológicos deberían acompañarlas?, etc. Este tipo de cuestionamiento debería conducir, por medio de un análisis praxeológico similar al presentado anteriormente en el caso del álgebra, al estudio crítico de los componentes del saber por enseñar (por ejemplo mediante el análisis de los procesos transpositivos) y a la construcción de modelos epistemológicos de referencia relativos a los contenidos considerados, lo que requiere en general cuestionar también las delimitaciones de estos contenidos y su estructuración con otras praxeologías, más allá del nivel puntual e incluso local.

7. Interpretación del problema que plantean el PCK y el MKT

La aportación fundamental del trabajo de L. S. Shulman y, en el caso de las matemáticas, del iniciado por D. L Ball, consiste en abrir una línea de investigación que pone el énfasis en la necesidad de tomar en consideración, en la formación del profesorado, la especificidad de los contenidos que se enseñan. Podemos decir que, en cierto sentido, L. S. Shulman identifica una *dimensión didáctica* en las praxeologías docentes, es decir, algo que no se puede reducir ni a la disciplina enseñada en sentido estricto ni a la pedagogía general. Dicho con otras palabras, establece la existencia de una nueva *relación institucional* a los contenidos de la enseñanza que no se reduce a la relación del saber sabio y que es *específica de la profesión docente*. El punto que permanece más oscuro en las investigaciones que hemos considerado de este ámbito es la manera cómo propone que la *investigación educativa* aborde esta nueva dimensión *didáctica* de la problemática docente.

El enfoque centrado en el MKT pretende indagar cuáles son las *tareas y problemas habituales* que surgen en la enseñanza de las matemáticas y cuáles son los *conocimientos, habilidades y sensibilidades que se requieren* para gestionar dichas tareas. Para responder a estas cuestiones utiliza una metodología de corte «empirista» que parece presuponer que las prácticas sociales (en este caso prácticas docentes) son trasparentes. Supone que el *conocimiento matemático para la enseñanza* puede extraerse directamente de la observación de los *profesores excelentes.*

La respuesta que propone dicho enfoque al problema que plantea se materializa en el mapa del *conocimiento matemático para la enseñanza* (MKT), dentro del cual la noción fundamental (su principal aportación) es el citado *conocimiento especializado del contenido* (SCK). Se considera que el SCK es un conocimiento que es específico de la profesión docente y que requiere interpretar, analizar y «extender» el conocimiento matemático tal como viene propuesto tanto por la matemática sabia como por la matemática escolar (el «conocimiento común»). Para describir este conocimiento, se utilizan las nociones habituales de la epistemología escolar, haciendo referencia a actividades «genéricas» que pueden hacer referencia a cualquier contenido matemático y a todos los temas del currículo.

A pesar de poner mucho énfasis en el carácter profesional de este conocimiento (no asimilable a ningún otro tipo de colectivo), no se considera como una construcción colectiva, manteniendo el carácter individual del problema de su adquisición, sin plantear la necesidad de generarlo, desarrollarlo, y hacerlo evolucionar hacia formas más adecuadas y transferibles. Tampoco se toma en consideración el problema de su fundamentación «teórica» ni de su articulación para formar un cuerpo de conocimiento con entidad propia. Y, lo que es más importante, el SCK no llega en ningún momento a cuestionar las praxeologías matemáticas escolares, asumiendo el modelo epistemológico dominante de las instituciones docentes.

Una de las consecuencias de la asunción acrítica del modelo epistemológico dominante en la descripción de las tareas en las que se supone interviene el SCK es la ambigüedad de su formulación. Así por ejemplo, la tarea de «*evaluar y adaptar el contenido matemático de los libros de texto*» es completamente ambigua a menos que se precise el criterio sobre el que se basará dicha evaluación y adaptación. En el caso del álgebra elemental, ¿qué significaría, por ejemplo, «evaluar y adaptar el papel que juegan los problemas de planteo algebraico en los libros de texto»? Es evidente que la respuesta a esta pregunta difiere según el tipo de modelo epistemológico que se asuma como referente.

Análogamente, las tareas de «*presentar los conceptos matemáticos*» y «*elegir definiciones adecuadas*» comportan actividades completamente diferentes en función del papel que se pretenda otorgar a dichos conceptos y a dichas definiciones en una praxeología determinada. Asimismo, el significado de la tarea docente de «*conectar los temas de los diferentes cursos académicos*» depende esencialmente del modelo epistemológico que se sustente para cada uno de los «temas» que se pretende conectar y para el conglomerado de los mismos. Por ejemplo, en el caso del álgebra elemental, ¿qué criterios deberían utilizar los profesores para «conectar» el álgebra elemental con la aritmética? ¿Considerando el álgebra como una aritmética generalizada, como un lenguaje que generaliza un presunto «lenguaje aritmético» o, por el contrario, considerando que el álgebra constituye un instrumento de construcción de lo numérico?

Para que el diálogo entre el enfoque del MKT y la TAD pueda empezar a dar frutos, es importante analizar en qué medida se podría integrar al MKT el análisis praxeológico de la TAD, en lo que supone este último de cuestionamiento del saber establecido en determinadas instituciones y la necesidad de proponer construcciones alternativas a los modelos epistemológicos dominantes.

Referencias

Ball, D. L. & Bass, H. (2009, marzo). *With an eye on the mathematical horizon: knowing mathematics for teaching to learners' mathematical futures*. Ponencia presentada en 43rd Jahrestagung für Didaktik der Mathematik, Oldenburg, Alemania.

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Berliner, D. (1986). In pursuit of the expert pedagogue. *Educational Researcher, 15*(7), 5-13.

Bolea, P. (2003). El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares. En *Monografía del seminario matemático García de Galdeano, 29*. Zaragoza, España: Universidad de Zaragoza.

Bolea, P., Bosch, M. & Gascón, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización: El caso de la proporcionalidad. *Recherches en didactique des mathématiques, 21*(3), 247-304.

Brousseau, G. (2007). Le calcul « à la plume » des multiplications et des divisions élémentaires. Paris : ARDM. http://www.ardm.eu/files/Francais_Calcul_partie1.pdf

Brousseau, G. (2010). Le calcul humain des multiplications et des divisions de nombres naturels. *Grand N, 85*(2), 13-41.

Chevallard, Y. (1984). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Première partie. L'évolution de la transposition didactique. *Petit x, 5*, 51-94.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x*, *19*, 45-75.

Chevallard, Y. (1990). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Troisième partie. Voies d'attaque et problèmes didactiques. *Petit x*, *23*, 5-38.

Cid, E. & Ruiz-Munzón, N. (2011). Actividades de estudio e investigación para introducir los números negativos en un entorno algebraico. En M. Bosch et al. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 579-604). Barcelona, España: CRM.

Cirade, G. (2006). *Devenir professeur de mathématiques : entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel* (Tesis doctoral). https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00120709/fr/

Hill, H. C. & Ball, D. L. (2004). Learning mathematics for teaching: Results from California's mathematics professional development institutes. *Journal of Research in Mathematics Education*, *35*, 330-351.

Klein, F. (2006). *Matemática elemental desde un punto de vista superior* (J. Fernández, trad.). Madrid: Nivola. (Edición original 1908)

Lebesgue, H. (1995) *La medida de las magnitudes. Serie metrología técnica.* México: Limusa. (Edición original 1915)

Leinhardt, G., & Greeno, J. G. (1986). The cognitive skill of teaching. *Journal of Educational Psychology*, *78*, 75-95.

Ruiz-Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional* (Tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona, España.

Schoenfeld, A. H. (1999). Models of the Teaching Process, *Journal of Mathematical Behavior*, *18*(3), 243-261.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57*, 1-21.

Sierra, T. A., Bosch, M. & Gascón, J. (2013). El cuestionamiento tecnológico-teórico en la actividad matemática. El caso del algoritmo de la multiplicación. *Bolema*, *27*(47), 779-804.

Axe 2

L’analyse praxéologique comme outil de l’analyse et de l’ingénierie didactiques

Eje 2

El análisis praxeológico como herramienta para la ingeniería y el análisis didácticos

Axis 2

Praxeological analysis as a tool for didactic analysis and engineering

Utiliser les potentialités phénoménotechniques de la TAD : quel prix payer ?

Maggy Schneider
Département de mathématiques, Université de Liège, Belgique

Abstract. The neologism "phenomenotechnique" from Gaston Bachelard is here related to the a priori potentialities of a didactic theory to raise phenomena. This paper links three dimensions: mi own position on engineering as phenomenotechnique in the light of the anthropological theory of the didactic (ATD); the phenomena raised by ATD when connecting mathematical organisations (MO) and didactic organisations (DO) as far as a reference epistemological model is available and fulfils certain conditions; the kind of phenomena that can be raised when linking the typology of DO proposed by Marianna Bosch and Josep Gascón with the distinction between "modelling" and "deduction" MOs.

Resumen. El neologismo «fenomenotécnico» de Gaston Bachelard se vincula con las potencialidades a priori de una teoría didáctica para hacer aparecer fenómenos. Este artículo se articula alrededor de tres dimensiones: mi propia posición sobre las ingenierías como fenomenotécnica a la luz de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD); los fenómenos que la TAD puede hacer surgir al articular organizaciones matemáticas (OM) y didácticas (OD) siempre que se disponga de un modelo epistemológico de referencia cuya construcción cumpla ciertas condiciones; el tipo de fenómenos que se pueden hacer surgir al cruzar la tipología de OD propuesta por Marianna Bosch y Josep Gascón y la distinción entre OM «modelización» y OM «deducción».

Résumé. Le néologisme « phénoménotechnique » de Gaston Bachelard est étendu ici au sens d'un qualificatif traduisant les potentialités a priori d'une théorie didactique à faire apparaître des phénomènes. Cet article s'articule autour de trois dimensions : la position qui est la mienne sur les ingénieries comme phénoménotechnique à la lumière de la théorie anthropologique du didactique (TAD) ; les phénomènes que la TAD est susceptible de mettre au jour à l'articulation des organisations mathématiques (OM) et des organisations didactiques (OD) pourvu que l'on dispose d'un modèle épistémologique de référence dont la construction respecte certaines conditions ; le type de phénomènes que l'on peut mettre au jour en croisant la typologie d'OD que proposent Marianna Bosch et Josep Gascón et la distinction entre OM « modélisation » et OM « déduction ».

IV^e congrès international sur la TAD (Toulouse, 21-26 avril 2013)
Axe 2. *L'analyse praxéologique comme outil de l'analyse et de l'ingénierie didactiques*

Schneider, M. (2017). Utiliser les potentialités phénoménotechniques de la TAD : quel prix payer ? Dans G. Cirade et al. (Éds), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* (pp. 157-184). https://citad4.sciencesconf.org

1. Sur l’usage du mot « phénoménotechnique »

Je reviens, par ce titre de mon exposé, aux origines de ce qu’on a appelé la « didactique fondamentale » au sein de l’école française, en particulier par référence aux ingénieries didactiques à propos desquelles a été fait un parallèle avec la phénoménotechnique de Gaston Bachelard (1987). Dans son cours à l’école d’été d’Orléans en 1982, Yves Chevallard posait effectivement ainsi la question des rapports entre la recherche en didactique et l’action subséquente sur le système d’enseignement : non pas en termes d’innovation ou de recherche-action mais en termes de mise à l’épreuve de constructions théoriques élaborées par les chercheurs dans des réalisations didactiques qui constituent surtout, en tant que méthodologies de recherche, « le lieu de cette étape cruciale de l’activité scientifique à laquelle Bachelard a donné le nom parodique de phénoménotechnique » (Chevallard, 1982, p. 39).

Pour comprendre les enjeux d’un tel point de vue mais aussi les questionner à la lumière de développements plus récents, il convient de situer le travail de G. Bachelard dans la perspective d’un constructivisme épistémologique qui fait des « phénomènes » non pas des observables que donnerait à voir une réalité supposée indépendante ou « ontologique » mais des construits humains le plus souvent collectifs. Plus précisément, ces phénomènes émergent d’une pensée dialectique entre objets et concepts à la manière du rationalisme appliqué tel que l’entend G. Bachelard (1949), qui suppose de « passer par le positivisme afin de le dépasser » (p. 104). Mais, toujours dans cette perspective constructiviste, on s’accorde à penser que les observables, provoqués ou non, ne deviennent phénomènes à proprement parler qu’à la lumière d’une théorie et qu’il n’est pas impérativement besoin, pour les faire apparaître comme tels, de techniques sophistiquées, comme le cyclotron qui permet de mettre en évidence et d’éprouver des phénomènes de mécanique quantique. Par exemple, avant même de pouvoir parler de falsification au sens de Karl Popper, ce sont des expériences de pensée qui amènent Galilée à énoncer les principes de sa théorie physique en particulier sur la relativité des référentiels qui portent son nom. Ces expériences de pensée, en l’occurrence ce qu’on appelle le « bateau de Galilée », constituent alors des situations contrefactuelles suggérées par une hypothèse théorique pour en accroître la crédibilité, ici l’invariance des lois de la mécanique d’un tel référentiel à un autre. En ce sens, je me permettrai d'utiliser le néologisme « phénoménotechnique » de G. Bachelard aussi au sens d'un qualificatif pour parler, de manière quasiment tautologique, de la portée phénoménotechnique d'une théorie, une théorie didactique en l'occurrence. Il s'agit bien sûr d'une portée potentielle a priori plus ou moins effective dans les usages qu'en font les chercheurs. Et c'est ce que je vais tenter d'illustrer dans la suite.

2. Ingénieries et phénomènes didactiques : quelques extensions théoriques

Mais que sont les phénomènes didactiques ? Pour répondre à cette question, je souhaiterais d'abord exposer sommairement ma position sur le rôle des ingénieries en tant que phénoménotechniques telle que je l'ai développée à l'école d'été de Clermont-Ferrand (Schneider, 2011) en me cantonnant aux genèses artificielles de concepts même si les phénomènes mis au jour vont bien au-delà. J'expliquerai ensuite à quelles extensions théoriques cette position m'a amenée.

2.1. Les ingénieries et leurs effets en termes de dénaturalisation

Si l'on veut envisager de telles genèses dans une perspective poppérienne, il faut éviter le risque – qui est grand – de plaidoyers « cachés » en leur faveur et dont les points aveugles sont liés à l'absence de perception des effets de contrat et/ou à la naturalisation excessive de la transposition au sein de laquelle se fait le travail. Pour éviter cet écueil, il est sans doute plus facile de tirer parti des ingénieries qui ne marchent pas – au sens où les analyses a priori et a posteriori ne concordent pas – que de celles qui marchent. Pour autant que l'on prenne la peine, comme le dit Michèle Artigue (1990), de rechercher « ce que, dans les hypothèses engagées, les distorsions constatées invalident » (p. 298), plutôt que de se borner, comme cela arrive souvent d'après l'auteure, « à proposer des modifications de l'ingénierie visant à les réduire sans s'engager donc véritablement dans une démarche de validation » (Artigue, 1990, p. 298). Quant à prouver que des ingénieries marchent, cela reste périlleux, même si on peut espérer qu'une analyse a priori serrée permette de distinguer ce qui relève du nécessaire et du contingent. C'est d'autant plus difficile lorsqu'elles concernent des tranches amples d'apprentissage et ce, en particulier, à cause des phénomènes d'obsolescence et de reproductibilité. Et cependant, même dans ce dernier cas, une perspective poppérienne n'est pas exclue. Je l'avais développé à partir de l'exemple des travaux de Régine Douady (1986) sur la dialectique outil-objet et d'une critique dont cette notion avait fait l'objet de la part de Samuel Johsua (1996). Ce dernier, qui se situe lui aussi dans une perspective poppérienne, insiste sur l'importance des résultats de recherche fondés sur l'étude des conditions limites d'une théorie mais exprime aussi un certain scepticisme sur des résultats trop liés à la théorisation retenue. Entre autres exemples, il pointe les conclusions avancées par R. Douady sur le fait que la dialectique outil-objet « ça marche ». Bien que reconnaissant que l'auteure citée précise les conditions dans lesquelles fonctionne cette dialectique et bien qu'exprimant la nécessité d'examiner de plus près son travail de recherche, S. Joshua ne peut s'empêcher un propos assez sévère :

> Mais on peut faire fond sur un énoncé qui se détache largement des conditions de la recherche : « on peut faire, au primaire, de la dialectique outil-objet ». Que cet énoncé, pris au pied de la lettre, soit quelque peu dogmatique, c'est certain. Mais sans cette dîme payée à la dogmatisation, on ne peut guère parler de résultat. (Johsua, 1996, p. 208)

Nonobstant ce propos qui a la tonalité d'une critique, je pense qu'on peut regarder les travaux de R. Douady comme une forme d'invalidation, en tout cas de mise à l'épreuve à la mode poppérienne, non pas du fonctionnement didactique qu'elle propose, mais de celui *a contrario* duquel s'est définie la dialectique outil-objet et que résume l'expression « j'apprends, j'applique ». Ce dernier fonctionnement semble reposer sur une conviction non questionnée inspirée d'une conception déductiviste de l'enseignement qui prête une certaine efficacité à un enseignement allant, comme le dit R. Douady, du « général au particulier », du « signifiant au signifié » ou encore de « l'objet à l'outil ». On touche là à une épistémologie spontanée largement répandue chez les enseignants et qui semble occulter la possibilité de toute autre. Or, à l'instar de Guy Brousseau, R. Douady prouve bien qu'une autre approche est possible, invalidant par là-même la conviction du contraire, fût-elle inconsciente. On connaît des conditions nécessaires d'un tel travail : caractère fondamental des questions posées aux élèves, existence d'un milieu permettant leur dévolution, existence d'une niche scolaire où de telles pratiques peuvent se développer, etc. – toutes dimensions dont l'analyse doit permettre d'évaluer si les faits observés ont un caractère nécessaire ou contingent.

Des recherches, comme celle de R. Douady, qui montrent la faisabilité d'autres manières d'enseigner, participent donc à la dénaturalisation de transpositions didactiques devenues transparentes de par leur standardisation au sein d'institutions scolaires, en somme des « prêts à penser » institutionnels comme les appellerait Alain Mercier (1999). C'est pourquoi, une analyse de la transposition au sein de laquelle s'inscrivent, par exemple, les tâches dévolues aux élèves me paraît incontournable, même pour des recherches portant sur l'enseignement ordinaire, si l'on veut éviter des points aveugles liés aux hypothèses implicites sous-jacentes à cette transposition trop naturalisée.

Mais on peut aller plus loin dans l'usage phénoménotechnique des ingénieries en mettant en évidence d'abord les difficultés d'apprentissage que négligent ces mêmes transpositions, ensuite les formes embryonnaires des savoirs, relativement distantes des formes socialement standardisées, qui peuvent vivre en dehors d'elles. L'ingénierie construite sert alors à faire apparaître des phénomènes jusque-là invisibles. Encore faut-il, bien sûr, montrer que ces difficultés d'apprentissage ne sont pas propres à la transposition dans laquelle s'inscrit l'ingénierie en question mais qu'elles résistent aux transpositions habituelles dont on peut avoir l'illusion qu'elles les traitent alors qu'elles n'y sont pas gérées – les élèves rencontrant leur ignorance, par exemple, dans les moments du travail de la technique. Mais il faut aussi montrer que les formes embryonnaires des savoirs en jeu sont des réponses satisfaisantes à des questions de forte portée épistémologique. C'est pourquoi de telles recherches doivent être structurées autour de situations fondamentales, que l'on déterminera avec un regard praxéologique à l'échelle du domaine mathématique et à un niveau d'étude adapté, comme je le développerai plus loin. Car, en effet, il y a lieu de se demander en quelles institutions peuvent vivre de telles formes du savoir, pour quelles raisons et en l'absence de quelles contraintes ? Un regard institutionnel, instruit de la TAD, s'impose donc tant sur les obstacles d'apprentissage que sur les situations.

2.2. Des obstacles d'apprentissage à dimension institutionnelle

Dans les travaux que j'ai menés ou dirigés dans la perspective décrite plus haut, une première catégorie de phénomènes est relative à la mise en évidence de « préconstruits » au sens où l'entend Y. Chevallard (1991) dans sa théorie de la transposition didactique. On y voit, au principe même de ces préconstruits, un rapport empiriste aux « choses » que l'on peut même qualifier, au sens de G. Bachelard, d'expérience première – surtout là où les préconstruits sont relatifs à des grandeurs physiques ou géométriques. C'est ainsi que les élèves doutent du fait que la limite d'une suite d'aires rectilignes puisse être la valeur exacte d'une aire curviligne ou que celle de vitesses moyennes puisse conduire à une vitesse instantanée qui échappe, au-delà d'une certaine précision, au monde des sens et des mesures (Schneider, 1991). Cependant, comme l'a montré Pierre Job (2011), l'obstacle empiriste perdure bien au-delà de ce contexte puisqu'il permet aussi d'interpréter un rapport « non lakatosien » des élèves aux définitions en fin d'enseignement secondaire : celles-ci, pour eux, sont supposées « décrire » ce que l'on entend « intuitivement » par les « choses » au lieu d'être des modèles de ces choses donnant prise au raisonnement dit déductif.

Les ingénieries, croisées si possible avec d'autres méthodes, ont alors pour fonction première de mettre en évidence ces préconstruits ainsi que des conditions – formulées en termes de variables didactiques des tâches soumises aux élèves – qui en permettent la reprise collective dans des formes de savoirs embryonnaires, comme par exemple une vitesse instantanée définie par un calcul de limite « en acte » consistant à supprimer les termes en Δt de l'expression de la vitesse moyenne algébriquement réduite.

Bien sûr, ce que nous apprend la TAD, à travers le regard institutionnel auquel elle engage fortement, c'est que ces préconstruits ne naissent pas *ex nihilo* et que les obstacles épistémologiques trouvent des racines profondes dans la culture, ainsi que l'avait écrit Luis Radford en 1997, au point de nécessiter leur analyse en remontant souvent très haut dans l'échelle de codétermination didactique. Dans le cas présent, l'obstacle empiriste peut être interprété à la lumière du modernisme de nos sociétés occidentales, encore sous l'influence du positivisme d'Auguste Comte, où la science « moderne » se présente comme un « acte de lecture de la nature » en vue d'en comprendre les lois intrinsèques et de les maîtriser au service de l'entreprise industrielle de la bourgeoisie. Il en résulte une idéologie des savoirs « certains » et de lois « immuables » découvertes par *la* « bonne » méthode. Et il n'est pas innocent sans doute de rapprocher de cette idéologie celle contemporaine du « juste milieu » représentative d'une bourgeoisie bien pensante qui, comme l'ont montré les travaux de Yves Chevallard et Floriane Wozniak (2005), pèse sur la non prise en compte de la variabilité à un moment donné des théories statistiques, tout écart à la moyenne étant perçu comme une erreur. À un niveau institutionnel plus bas sur l'échelle de codétermination, il convient de penser que l'expérience première peut tout simplement être un premier rapport personnel conforme au rapport institutionnel à un objet mathématique tel qu'il peut exister, à un certain niveau de scolarité, en décalage avec le nouveau rapport attendu. Un exemple typique est celui de la tangente, définie d'une certaine manière dans le cas du cercle, manière qui sera en contradiction flagrante avec ce qu'on appellera en analyse la tangente en un point d'une courbe (Schneider, 1988 ; Castela, 1995). Ou, toujours dans les institutions didactiques, on peut invoquer, ainsi que le fait A. Mercier (2008), un rapport empiriste au monde comme effets néfastes du phénomène d'ostention dominant dans les pratiques enseignantes ou regarder ce dernier à son tour comme un fait de civilisation. Cet exemple illustre donc que cette échelle peut et doit être regardée, non de manière unidirectionnelle, mais comme un ensemble de niveaux qui peuvent, à un moment donné, être rapprochés pour formuler et mettre à l'épreuve plusieurs hypothèses interprétatives d'un phénomène donné ; mais encore que la prise en compte a priori de niveaux élevés de cette échelle se doit toujours d'être envisagée.

2.3. Une extension du concept de situation fondamentale

Ce regard institutionnel sur les ingénieries et les obstacles m'a conduite à élargir le concept de situation fondamentale de la théorie des situations didactiques (TSD) à des cas où l'enjeu majeur est moins la construction d'un savoir particulier par les élèves que leur entrée dans une nouvelle institution (Schneider, 2008) : on cherche ainsi avant tout à rendre adéquat au rapport institutionnel leur rapport personnel à certains objets de savoir identifiés par cette institution. Et il m'a plu de voir, dans la situation des médiatrices d'un triangle de G. Brousseau, au-delà de l'apprentissage d'un résultat mathématique qui est leur concours, l'évolution, du collège au lycée, du rapport personnel des élèves à la géométrie, laquelle « ne consiste pas à décrire ce qu'on voit mais à établir ce qui doit être vu » (Brousseau, 2000, p. 9). Ce regard m'a amenée également à distinguer, à l'instar d'autres chercheurs, le concept de situation fondamentale et l'une de ses déclinaisons en situation adidactique, et de miser grandement sur des premières rencontres « culturelles-mimétiques », outillées, par le biais de médias appropriés, de discours « heuristiques » adaptés au niveau praxéologique : soit « modélisation », soit « déduction » en un sens que je préciserai plus loin.

Comme l'ont montré les travaux de P. Job (2011) sur l'analyse mathématique et ceux que nous codirigeons sur l'algèbre linéaire (Job et Schneider, 2017), avec des concepts comme ceux de limite et de l'algèbre linéaire en général, on touche en effet aux limites de l'opérationnalité de la notion de situation fondamentale, au sens strict, d'un savoir S, entendue comme tâche pour laquelle S constituerait une réponse optimale. Effectivement, le développement et l'adoption de tels savoirs sont en partie le fruit d'un consensus au sein de l'institution qui les a vus naître. Concernant le concept de limite, par exemple, on sait actuellement que l'analyse non standard propose une alternative viable au concept de limite comme fondation de l'analyse en donnant un corps cohérent aux conceptions infinitésimales, autrefois bannies, pour servir de sous-bassement. Les limitations de cette acception de la notion de situation fondamentale font ressortir avec force la relativité institutionnelle des savoirs et mettent de ce fait l'approche préconisée par la TAD au cœur même de la TSD.

3. La question des articulations entre OM et OD et celle du MER comme phénoménotechnique

3.1. L'étude d'une « approche heuristique de l'analyse » comme entrée en matière

Mon premier véritable usage de la TAD remonte à 2001. Il s'agissait de l'analyse didactique d'une « approche heuristique de l'analyse mathématique » (groupe AHA, 1999a, 1999b) qui était caractérisée, d'une part, par des références constructivistes utilisées plutôt, mais pas uniquement, sur le mode idéologique et, d'autre part, par des organisations mathématiques assez particulières « plus proches d'un traitement d'exemples que d'une théorie » ou, du moins, dirais-je plutôt aujourd'hui, par des OM qui ne s'apparentent pas à une théorie mathématique standardisée telle qu'elle a pu faire l'objet d'un consensus social dans des institutions mathématiques. Mon but aujourd'hui n'est pas de renier l'analyse que j'avais faite à l'époque du projet en question, qui souffre effectivement de plusieurs faiblesses, mais d'épingler les phénomènes didactiques sous-jacents que j'ai formulés ultérieurement et sur lesquels je vais revenir après un petit détour.

Pour l'instant, je me contente de préciser que, en ce qui concerne le projet AHA, j'avais pris la peine d'analyser en quoi il relevait du constructivisme, que ce soit en référence à la théorie de Brousseau, par l'étude des moments d'adidacticité, ou par rapport à l'épistémologie constructiviste de Lakatos, en analysant sa structure globale, ses enjeux affichés, le discours qui y était effectivement privilégié et les médias utilisés. Je pouvais donc attester de sa filiation partiellement assumée à un certain paradigme constructiviste, en même temps que je mettais en évidence des particularités de l'OD sous-jacente à ce projet qui, dans une première phase importante, était en rupture avec un exposé déductif de l'analyse. Ce projet me permettait ainsi de poser une question à l'articulation d'une OD et d'une OM particulières : « Quel poids accorder au constructivisme ? Le prix peut-il en être des praxéologies mathématiques non canoniques […] ? » (Schneider, 2001, p. 53).

Au-delà de ce projet particulier, j'avais défendu l'idée que la TAD était, contrairement à ce que pensaient d'aucuns à l'époque, une théorie d'enseignement-apprentissage en ce sens qu'elle spécifiait les moments d'étude dont on ne peut faire l'économie sans risquer d'hypothéquer les apprentissages, et j'avais posé la question plus globale de l'articulation des OM et des OD tout en regrettant que la TAD fût, à l'époque, plus explicite sur les critères d'évaluation (de description ?) des premières que sur ceux des secondes :

> Au-delà de la description des praxéologies mathématiques et didactique sous-jacentes à des leçons ou à des projets d'enseignement, c'est leur articulation qui devrait permettre de mettre en évidence les ressorts des pratiques enseignantes […]. Nul doute cependant que les didacticiens attendent impatiemment de plus longs développements sur l'évaluation d'une organisation didactique. (Schneider, 2001, pp. 9 ; 54).

Depuis une typologie des OD a été formalisée par Marianna Bosch et Josep Gascón se caractérisant « par le fait d'attribuer une grande importance à quelques-uns des moments de l'étude au détriment de tous les autres – qui sont alors généralement sous la seule responsabilité de l'élève ou de l'étudiant » (Bosch & Gascón, 2002, p. 32). On parle donc aujourd'hui d'OD théoricistes, technicistes, modernistes, ainsi que d'OD classiques, empiristes ou constructivistes. Mais, comme le soulignent M. Bosch et J. Gascón, l'usage de cette typologie suppose une « référence » qui lui est extérieure :

> … si une OD peut être décrite, en première approximation, à partir de sa structuration en termes de moments, il n'en reste pas moins que les moments ne suffisent pas à une telle description : car l'explicitation des différents moments de l'étude va partir, avant tout, de ce donné qu'est l'OM à mettre en place, qu'il va falloir être capable d'analyser en éléments ni « trop gros » ni « trop fins » pour le pas tuer sa « structure vitale », tout en montrant comment se réalise ou pourrait se réaliser sa « recomposition ». (Bosch et Gascón, 2002, p. 32)

Le concept de « modèle épistémologique de référence » (MER) est-il cette référence précisément ? Quels types de phénomènes donne-t-il à voir au niveau de l'articulation entre OM et OD ? Quel prix payer pour le construire de manière à ce qu'il puisse jouer le rôle de phénoménotechnique à ce niveau ?

En particulier, comment caractériser les OM auxquelles peut conduire un dispositif didactique à consonance « constructiviste », à l'image du projet AHA ? Et quels critères utiliser pour évaluer, par exemple, les technologies associées ? Est-ce pertinent de regarder si « les formes de justification utilisées sont proches des formes canoniques en mathématiques » ? (Chevallard, 1999). À quoi renvoie le « en mathématiques » ? Et, d'ailleurs, quelle est la fonction de tels critères au niveau de la recherche ? J'y reviendrai plus loin après avoir analysé et contrasté deux usages du concept de MER.

3.2. Caractéristiques d'un usage peu phénoménotechnique du concept de MER : à propos du théorème de Lagrange à l'université

Un premier usage du concept de MER m'apparaît, après analyse approfondie, peu voire pas du tout phénoménotechnique. Il s'agit d'un MER autour du théorème de Lagrange pour étudier des enseignements universitaires dans une filière mathématique et une filière économique constitué par Sébastian Xhonneux (2011) ou Sébastian Xhonneux et Valérie Henry (2012). Ce MER est constitué de cinq familles de tâches autour desquelles sont définies cinq OM locales. Les trois premières familles de tâches : « Chercher des candidats à être extremum d'un problème d'optimisation sous contraintes d'égalité », « Résoudre un problème d'optimisation sous contraintes d'égalité » et « Exploiter la signification du théorème de Lagrange » sont qualifiées de « procédurales » en référence à la théorie d'Anna Sfard (1991) complétée de la dialectique outil-objet de R. Douady (1986). Les deux autres familles de tâches sont alors appelées « structurales » : il s'agit de « Construire les éléments théoriques relatifs au théorème de Lagrange » et de « Construire les éléments théoriques relatifs au multiplicateur de Lagrange ». Ce MER est ensuite structuré en plusieurs niveaux : deux organisations mathématiques, OM_1 et OM_2, formant un niveau qui correspond à ce que A. Sfard nomme les processus « d'intériorisation » et de « condensation » du théorème de Lagrange tandis que les autres OM représentent la « réification », au sens de A. Sfard, stade où le « concept » – je cite les auteurs – n'est plus le théorème mentionné mais les multiplicateurs de Lagrange. À ce moment, la TAD est mentionnée dans l'usage qu'en fait Carl Winslow (2008) pour montrer que, d'un niveau d'étude à l'autre, la théorie peut se transformer en tâches.

Force m'a été de constater que ne se dégage pas vraiment de phénomène, ni dans le corps de la thèse ni dans les conclusions partielles ou finale, pas même pour caractériser ce que d'aucuns renomment un « décalage institutionnel », alors que ce travail comporte une somme imposante d'informations relatives à l'enseignement du théorème de Lagrange. Ce n'était faute pourtant d'avoir pris connaissance, comme la bibliographie l'indique, des importants travaux de Michèle Artaud (1993) sur une problématique proche qui auraient pu induire l'une ou l'autre hypothèse susceptible d'être mise à l'épreuve.

Mais, au-delà de la critique, il m'importe ici de souligner quelques caractéristiques de cette recherche qui pourraient expliquer où le bât blesse. J'y observe, entre autres :

- Un fort métissage « théorique » : outre la théorie de A. Sfard et la TAD, on y trouve référence aux travaux de Évelyne Barbin sur les différentes fonctions de la démonstration – expliquer ou vérifier –, à ceux de R. Douady sur les cadres et la dialectique outil-objet, à la théorie de la représentation selon Raymond Duval à propos des registres et de la différence entre preuve et argumentation, etc. Si le métissage théorique peut être fécond, comme l'a montré M. Artigue (2009) à propos de la complémentarité de la TAD et de l'ergonomie cognitive instrumentale pour l'étude du rôle des technologies numériques dans les apprentissages, il ne peut l'être qu'au prix d'analyses qui en permettent l'articulation. Dans le cas étudié ici, le recours à la théorie de A. Sfard permet au contraire d'éviter au chercheur de décrire, à la lumière de la TAD et du regard articulé qu'elle autorise sur les OM et les OD, par quel processus les « blocs technologico-théoriques » des praxéologies OM_1 et OM_2 sont transformées en tâches. L'absence de phénomènes est alors masquée par le recours à une surenchère de critères d'origines et de nature multiples que ce soit pour parler de diverses démonstrations du thèorème de Lagrange mais aussi d'OM ou d'OD observées. Par exemple pour l'analyse des démonstrations, S. Xhonneux (2011) utilise aussi bien la distinction de Raymond Poincaré entre « intuition (qualifiée de réelle) » et « rigueur » (formelle), les fonctions de la démonstration de É. Barbin, etc. mais aussi le fait que la démonstration utilise ou non la fonction lagrangienne, ou encore se base ou non sur le théorème des fonctions implicites. En ce qui concerne les OM et les OD, S. Xhonneux ajoute aux critères formulés par Y. Chevallard pour les unes et à la définition des autres par M. Bosch et J. Gascón, beaucoup d'autres critères tels que la présence ou l'absence d'éléments de la *praxis* ou du *logos* de chacune des OM identifiées dans le MER, la « cohérence » ou la « rigueur » ou encore le caractère déductif ou inductif des manuels suivant que ceux-ci « séparent ou lient le procédural au structural », etc. Ces critères sont alors utilisés comme les critères de grilles d'évaluation, qui ne peuvent être utilisées sans tenir compte de l'appréciation personnelle de l'évaluateur qui doit juger, par exemple, du caractère « intuitif » ou « formel » d'une démonstration.

- Un MER présenté assez abruptement, que ce soit dans la version affinée ou l’autre, comme étant « fabriqué empiriquement à partir des praxéologies à enseigner et des textes “savants” comme les articles mathématiques, les manuels ou les supports de cours universitaires » (Xhonneux & Henry, 2012, p. 763), sans analyser ce qui relève des institutions « savantes » ou des institutions « didactiques » ou d’institutions « professionnelles ». En effet, en ce qui concerne le premier aspect, S. Xhonneux (2011), tout en estimant que le théorème de Lagrange est une petite pièce d’un grand puzzle, ne décrit jamais le puzzle en question et renvoie à la théorie la plupart du temps implicite et à chercher au sein d’un autre chapitre du syllabus, d’un autre cours ou d’une autre institution. Quant aux « pratiques de l’économiste ou du mathématicien », elles sont évoquées comme pouvant influencer le savoir à enseigner mais ne sont pas étudiées, « vu la complexité du sujet ». On sait pourtant, et les travaux de Emmanuelle Rouy (2007) sur le concept de tangente l’illustrent, que la forme donnée à un théorème ou à un concept dépend d’un projet institutionnellement situé, qu’il s’agisse d’institutions savantes, didactiques ou professionnelles.
- Un MER construit autour d’un théorème plutôt que d’être pensé au niveau d’un domaine, ici celui de l’optimisation sous contraintes. Par exemple, S. Xhonneux en exclut la méthode des multiplicateurs de Carathéodory, pourtant utilisée dans un cours observé, sans justification et sans doute parce qu’il la situe en dehors du thème « théorème de Lagrange ». Quant au recours à l’un ou l’autre théorème susceptible d’être utilisé pour démontrer le théorème de Lagrange, par exemple, le théorème des fonctions implicites, il ne peut être jaugé – mais ce n’est pas fait dans cette thèse – qu’à la lumière d’une économie mathématique plus globale. Et c’est bien ainsi que E. Rouy (2007) avait pu évaluer la place du théorème de Lagrange dans l’étude des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, en lien avec celle de leur dérivée. Tout se passe, dans le travail de S. Xhonneux (2011), comme si le MER devait rendre compte de la liste exhaustive des tâches observées dans des institutions savantes ou didactiques à propos du thème « Théorème de Lagrange » sans argumentation et sans se situer au niveau du sous-domaine mathématique

qu'est l'optimisation sous contraintes ou même à celui d'un univers mathématique plus large.

Ce MER est alors utilisé en tant que description d'une OM dont « dépendra l'analyse des OD » liées au théorème de Lagrange pour analyser le savoir enseigné, soit en termes d'OM pour ce qui est du savoir à enseigner à partir de l'analyse de manuels, soit en termes d'OD, pour ce qui est du savoir enseigné, à partir de cours observés. Mais, en l'absence d'analyses proprement didactiques, ces OM et OD sont partiellement superposées sans être vraiment articulées. Or, comme dit plus haut, l'usage de la typologie des OD que donnent M. Bosch et J. Gascón (2002), demande, par l'insistance attribuée à certains moments de l'étude, à être outillée, au cas par cas, d'analyses didactiques comme celles que j'avais faites du projet AHA pour étudier en quoi il relevait vraiment du paradigme constructiviste à la lumière d'un MER argumenté sur le plan épistémologique. J'y reviendrai.

Je contrasterai aussi plus loin ce travail de S. Xhonneux où les potentialités phénoménotechniques de la TAD sont peu exploitées avec deux analyses du théorème des accroissements finis (TAF) faites, l'une par E. Rouy, l'autre par Jean-Pierre Bourgade (2017), où deux formes complémentaires d'allégeance à l'institution mathématique permettent de mettre au jour des phénomènes didactiques et leurs raisons d'être. Mais, l'analyse faite à la section 3.2. m'engage à revenir aux sources du concept de MER comme outil qui permet au chercheur d'articuler OM et OD. Il m'a paru utile, à cette fin, de revenir à la réflexion faite par Gascón en 1993 sur l'algèbre élémentaire et sur le fonctionnement du concept de MER qui y est à l'œuvre.

4. Le concept de MER comme phénoménotechnique

C'est la posture de dénaturalisation typique de la TAD qui est à l'origine du concept de MER. Voici en effet en quels termes J. Gascón (1993) caractérise l'ouverture de la didactique sur le savoir mathématique : « On peut considérer qu'il existe, dans toute institution didactique où l'on enseigne des mathématiques, des modèles implicites des différents domaines du savoir mathématique enseigné, d'où émerge par extension un modèle implicite de la nature même du savoir mathématique » (p. 43).

Comme l'illustre J. Gascón à propos de l'algèbre élémentaire, ce modèle agit comme un système de conditions et de contraintes sur les pratiques, en « permettant l'existence de certaines d'entre elles et en empêchant que d'autres puissent apparaître » (p. 44). Et, conformément à la TAD, ce modèle implicite se doit d'être dénaturalisé et pris comme « objet d'étude, c'est-à-dire comme faisant partie des faits didactiques qui constituent la base "empirique" de la recherche » (p. 44). J. Gascón poursuit en insistant sur la nécessité que le chercheur dispose d'un « modèle alternatif du domaine d'activité mathématique enseigné qui lui serve de cadre de référence pour interpréter le modèle dominant dans l'institution qu'il étudie », ce modèle devant lui-même être situé dans un « modèle global de l'activité mathématique qui restera, selon les cas, plus ou moins explicité par le chercheur ».

Mais, ainsi que je vais l'illustrer, la constitution même du modèle épistémologique de référence a une histoire qu'il est intéressant de connaître, pour tout autre chercheur, afin de pouvoir y identifier les choix inéluctables au principe même de la définition de ce modèle duquel dépendent, en définitive, les phénomènes qui seront donnés à voir et leur interprétation.

4.1. Un MER phénoménotechnique relatif à l'algèbre élémentaire

Le modèle implicite qui prévaut dans l'enseignement de l'algèbre est celui étudié par Y. Chevallard en France et par J. Gascón en Espagne. On l'appelle le modèle de l'arithmétique généralisée qui « met l'accent sur le "symbolisme algébrique" et l'oppose à un supposé "langage arithmétique" que le premier est censé élargir et généraliser » (Gascón, 1993, p. 45) ce qui, parmi plusieurs caractéristiques, conduit, d'une part, à la « désarticulation » du corpus de problèmes en résolutions d'équations ou d'inéquations, de manipulation d'identités et de fonctions élémentaires, d'application de formules et de résolution de problèmes « concrets » et, d'autre part, à l'interprétation des difficultés d'acquisition du langage algébrique trop exclusivement référée au cadre arithmétique, comme la modification du sens des signes +, =, –, ×, etc. d'un langage à l'autre.

Si un tel modèle a pu être explicité et caractérisé, c'est à la lumière d'un modèle alternatif décrit et argumenté par J. Gascón (1993) en plusieurs étapes que je résume ci-dessous.

Se situant explicitement dans la perspective anthropologique développée par Y. Chevallard, J. Gascón présente le patron d'analyse-synthèse (A-S) comme une macro-technique constituée d'un raisonnement régressif qui remonte de l'objet inconnu aux données du problème auquel fait suite un raisonnement progressif faisant chemin inverse. Son exemple est une construction géométrique se résolvant par ce que George Polya (1967) a systématisé sous le nom de « méthode des deux lieux » et que je résume ainsi dans sa version élémentaire : la construction d'une figure satisfaisant à des contraintes se ramène à celle d'un point que l'on détermine à l'intersection de lieux, ceux-ci étant des ensembles de points possibles satisfaisant alternativement une partie des contraintes puis l'autre. Gascón illustre ensuite que le patron A-S est une aide à la résolution de problèmes autres que ceux de constructions géométriques, un problème arithmétique en l'occurrence, mais que, parmi d'autres limitations, il ne produit pas de forme générale de résolution de problèmes isomorphes pas plus qu'il ne donne les conditions d'existence de ces solutions.

Là intervient son analyse épistémologique de l'algèbre, basée non pas, comme ce qui se fait d'habitude, sur la genèse de l'algèbre dans l'école d'Alexandrie où des « valeurs indéterminées » sont représentées par des lettres à la place des nombres, mais sur la « nouvelle algèbre » de François Viète ainsi que sur la « méthode » de René Descartes qui permettent de rendre « analytique » le patron A-S. Il montre ainsi un problème de construction géométrique où les lieux qui déterminent le « point clé » ne sont pas, à ses yeux, constructibles directement à partir des données du problème mais dans lequel les contraintes peuvent s'exprimer par des équations formant un système que doit vérifier ce point clé. Il résout également, de manière analytique, une variante du problème arithmétique initial qui rend impraticable une analyse réductive permettant de décomposer la résolution en une chaîne de résultats intermédiaires calculables à partir des précédents. Enfin, J. Gascón illustre que le fait de représenter les données également par des lettres, que l'on appelle paramètres, permet de s'intéresser à la structure des problèmes, au-delà de la seule obtention de l'inconnue, et de produire de nouvelles connaissances sur le système modélisé, relatives par exemple aux conditions d'existence des solutions, à leur interprétation dans le contexte y compris dans des cas particuliers de l'énoncé, etc.

De cette analyse a résulté un modèle épistémologique de référence relatif à l'algèbre, qui s'est précisé peu à peu pour aboutir à la formulation donnée par M. Bosch et J. Gascón en 2002 :

> [L]'algèbre élémentaire n'apparaît pas initialement comme une OM au même niveau que les autres organisations qui s'étudient à l'école […]. [C'est] un instrument mathématique d'étude d'organisations mathématiques : un instrument didactique […] À la question « qu'est-ce que l'algèbre élémentaire ? » nous ne répondons pas en termes d'OM, mais en termes de processus de modélisation d'OM par d'autres OM. (Bosch & Gascón, 2002, p. 36)

Les OM à modéliser algébriquement sont premières et diversifiées : on citera par exemple, les problèmes de constructions géométriques et les problèmes de « dénombrement simple ». En outre, c'est le processus de modélisation lui-même qui est central, avant de laisser place à des OM « totalement algébrisées » où l'outil algébrique est étudié en tant qu'objet. Dans cette perspective, les paramètres jouent un rôle fondamental et font apparaître des formules qui peuvent être interprétées comme des fonctions à plusieurs variables. L'analyse de leur complexité conduit alors les auteurs à formuler des indicateurs du « degré d'algébrisation ». Ce modèle épistémologique de référence a servi à leurs auteurs à mieux comprendre les pratiques empiriques liées à l'arithmétique généralisée. En particulier, l'abandon des paramètres dans l'algèbre enseignée qui lui est contemporain a conduit, entre autres, à la séparation excessive entre différents secteurs de l'algèbre : équations, formules, fonctions, etc. Mais ce modèle a aussi donné l'idée d'ingénieries alternatives, qui prennent la forme de PER organisés autour de thèmes tels que « la vente de t-shirts » ainsi que d'une succession de questions qui supposent de complexifier les modèles algébriques dont on a besoin. Ces PER posent des questions de nature écologique dont M. Bosch (2011) a rendu compte à l'école d'été de Clermont-Ferrand.

Mais, surtout, le concept de MER fonctionne ici comme une véritable phénoménotechnique car il sert d'abord à dénaturaliser des modèles implicites devenus transparents. Et cette propriété du MER découle bien du pas de côté épistémologique effectué par rapport aux pratiques empiriques dont il n'est pas issu. Cependant, on ne peut éviter, comme je l'illustre dans la section suivante, le parti-pris du chercheur, étant donné les contraintes a priori qui pèsent sur sa réflexion et les institutions auxquelles il est assujetti. Cela rend d'autant plus nécessaire l'explicitation la plus précise possible de ses choix et de ses arguments.

4.2. Des choix inéluctables du chercheur à l'explicitation de son modèle de l'activité mathématique à un haut niveau de l'échelle de codétermination didactique

Comme montré dans la section précédente, la construction par J. Gascón de son modèle relatif à l'algèbre élémentaire suppose le traitement de questions fondamentales telles que « Qu'est-ce que faire de l'algèbre ? ». Mais son élaboration ne peut éviter des choix du chercheur lui-même qui sont plus ou moins explicites. Pour développer cela, je voudrais montrer que, à partir de mêmes référents, on peut construire un autre modèle alternatif. Il se fait en effet que, dans le même temps, j'avais analysé avec des professeurs du secondaire ce que G. Polya (1967) appelle des « modèles » de résolution de problèmes qu'il classe en quatre catégories : le modèle des deux lieux, le modèle cartésien, la récurrence et la superposition. Bien qu'on puisse faire des recoupements d'un modèle à l'autre pour résoudre certains problèmes, je ne parlerai que des deux premiers en soulignant que notre objectif initial n'était pas de réfléchir sur l'enseignement de l'algèbre mais plutôt sur celui de la géométrie au collège et, en particulier, sur les transformations du plan auxquelles nous voulions rendre une instrumentalité mathématique qu'elles n'avaient pas dans l'enseignement. C'est sur la méthode des deux lieux que nous nous sommes focalisés en illustrant largement, à l'instar de Julius Petersen (1880), que les transformations permettent d'élargir le modèle de G. Polya dans les problèmes où les deux lieux à l'intersection desquels on va déterminer le point clé de la construction ne sont pas immédiatement « accessibles ». En effet, dans un nombre assez important de problèmes, un des lieux recherchés au moins est l'image du lieu d'un autre point dont le point clé est l'image par une transformation géométrique. C'est le cas d'ailleurs du problème sur lequel s'appuie J. Gascón (1993) pour montrer l'intérêt d'une modélisation algébrique : en fait, sa déclaration sur l'impossibilité de construire, dans ce problème, les lieux qui déterminent le point clé directement à partir des données est toute relative en ce sens qu'elle dépend des outils géométriques qu'on s'autorise à un moment donné du curriculum.

Mais, au-delà de sa portée géométrique, nous avions développé l'intérêt de la méthode des deux lieux dans d'autres domaines mathématiques, tout comme le fait G. Polya d'ailleurs, en parlant de l'extension de ce modèle à propos de la détermination d'une fonction trigonométrique par une équation différentielle et des conditions initiales. Et, dans un article portant le titre militant « Plaidoyer en faveur de la méthode des deux lieux » (COJEREM, 1995a, 1995b), nous avions développé des exemples multiples où le modèle des lieux (deux lieux voire plus) trouve une expression très générale qui s'applique tant en analyse et en algèbre qu'en géométrie et qui met en évidence un autre rôle des paramètres que nous avions résumé en substance ainsi : il s'agit de trouver un objet qui satisfait à plusieurs conditions (une figure géométrique, une fonction, ou, pourquoi pas une maison d'habitation, etc.). L'écueil consiste à choisir d'emblée une solution qui répond à la première condition ou même à quelques-unes mais qui ne les respecte pas toutes. Pour ne pas être ainsi « coincé », il convient de s'offrir, d'entrée de jeu, des « degrés de liberté » en cherchant d'abord non pas un seul objet qui correspond à la première condition par exemple, mais une classe d'objets suffisamment vaste pour la restreindre ensuite en faisant jouer tour à tour, dans un ordre « efficace », toutes les conditions imposées. Dans la recherche d'une fonction, ce sont les paramètres qui constituent ces degrés de liberté et c'était là, pour nous, un de leurs rôles importants parmi d'autres. Au détour, donc, de cette réflexion sur l'enseignement de la géométrie, et à partir également de travaux plus anciens (Schneider, 1980, 1988) sur l'intérêt d'un regard fonctionnel précoce, nous avions ébauché un autre MER pour l'algèbre qui a trouvé un mode d'expression dans le projet AHA et sur lequel Marysa Krysinska (2007) a travaillé avec des élèves en début et en fin de secondaire. Dans ce MER, le travail proprement algébrique (équations, inéquations, identités) est subordonné à l'étude des classes paramétrées de fonctions en lien avec des domaines d'application privilégiés (par exemple, la classe des fonctions sinusoïdales en lien avec l'étude de phénomènes harmoniques), étude qui constituerait alors l'un des fils conducteurs curriculaires de l'enseignement des mathématiques dans le secondaire (voir aussi Krysinska et Schneider, 2010).

Mais il n'y a pas lieu de militer pour un MER ou pour un autre, dont la construction est soumise à des contraintes et des possibilités institutionnelles externes, surtout lorsque du développement est lié à la recherche. Pourvu que, comme je l'ai souligné plus haut, un pas de côté fondé épistémologiquement soit fait par rapport aux pratiques enseignantes ordinaires et que, pour le chercheur, la construction d'au moins un modèle de référence spécifique permette de rendre visibles des phénomènes didactiques qui ne l'étaient pas, d'autoriser leur description et des tentatives d'explication. En ce sens, un MER constitue une phénoménotechnique pour autant que, et J. Gascón le précise bien, on soit conscients qu'il détermine fortement les phénomènes qu'il permet de mettre au jour et d'étudier. Dans le cas du MER sur l'algèbre décrit par M. Bosch et J. Gascón (2002), c'est « un élément théorique central d'une OD hypothétique (non empirique) de niveau régional » (p. 37) par rapport auquel le chercheur va pouvoir situer des OD empiriques dont celle précisément de l'arithmétique généralisée. Cependant, comme illustré plus haut, un autre MER de l'algèbre élémentaire peut être envisagé, non contradictoire avec le précédent mais s'inscrivant dans un focus curriculaire plus large.

La question devient alors celle du spectre à travers lequel le chercheur envisage son MER en même temps que celle des niveaux de l'échelle de codétermination didactique auxquels se réfère son modèle plus général de l'activité mathématique. Comme J. Gascón (1993), je pense que le concept de situation fondamentale demeure ici une référence incontournable, que ce soit dans un sens strict ou au sens large donné plus haut. Mais les recherches que j'ai menées ou dirigées m'ont engagée à expliciter mon propre modèle de l'activité mathématique (Schneider, 2008), en me polarisant sur l'idée que les mathématiques enseignées se doivent d'être et d'apparaître comme une économie de pensée, car elles permettent de « tuer » les problèmes, mais aussi en distinguant deux niveaux praxéologiques sur lesquels je reviendrai. Le premier de ces niveaux cependant ne peut être identifié qu'au prix d'une certaine indépendance par rapport à « l'institution mathématique » laquelle demeure souvent invisible. Or l'invisibilité de certaines institutions est un frein réel à la constitution d'un MER comme illustré ci-dessous.

4.3. L’invisibilité de certaines institutions comme obstacle à la phénoménotechnique

Je l’ai déjà évoqué, P. Job (2011) a étudié le rapport empiriste à la notion de définition comme obstacle à l’acquisition du caractère lakatosien de la notion de limite. Il a étayé cette hypothèse par une analyse a priori épistémologique et institutionnelle et par une « situation fondamentale de mise à l’épreuve », pour le chercheur, de cette interprétation, et, pour les étudiants, de leur posture première face aux définitions. Pour mener à bien cette entreprise, il a été amené à débusquer des institutions « cachées », c’est-à-dire invisibles même pour des chercheurs qui se sont penchés sur des sujets de recherche connexes. Par exemple, l’institution des « formalistes » pour lesquels un raisonnement correct en analyse serait forcément « caractérisé par l’emploi d’un langage formalisé syntaxiquement correct où apparaissent les quantificateurs universel et existentiel dans le respect de l’application d’inférences valides », institution aux yeux de laquelle Cauchy devrait apparaître comme mauvais élève de la classe alors que les historiens s’accordent à le voir comme le fondateur de l’analyse moderne. De manière souterraine également joue une autre institution dont P. Job et M. Schneider (2017) montrent en quoi elle peut faire barrage à ce qu’ils appellent un discours heuristique, à savoir l’institution des mathématiciens dont l’épistémologie serait platonicienne.

Ce n’est pas un hasard sans doute que E. Rouy (2007) et J.-P. Bourgade (2017) ont, de manières différentes mais non contradictoires et plutôt complémentaires, analysé le théorème des accroissements finis (TAF) à la lumière de l’institution des mathématiciens. La première a étudié ce théorème comme élément d’une OM standardisée dans l’enseignement des mathématiques à l’université, OM qui demeure un « phare » emblématique des mathématiques rigoureuses pour les enseignants du secondaire. Dans cette OM, le TAF est un maillon entre les propriétés topologiques des réels et la validation du lien entre la positivité de la dérivée d’une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et sa croissance. Faute de pouvoir imaginer une démonstration qui, comme dans le projet AHA, s’appuie sur le patron A-S pour court-circuiter une OM imposante dont la rentabilité ne peut être explicitée au niveau secondaire, et faute de pouvoir exposer cette OM avec l’ensemble de ses démonstrations, le TAF permet alors aux enseignants de s’offrir une

« bouffée de rigueur » car sa démonstration à partir du théorème de Rolle ne nécessite qu'une astuce technique. Quant aux démonstrations impliquant les propriétés topologiques des réels, elles sont évitées et les résultats font l'objet de gestes d'ostension. E. Rouy parle, dans ce cas, de praxéologies « à trous ». Quant à J.-P. Bourgade (2017), il développe que, dans les « prépas des INP », c'est aussi le « désir de rigueur [qui] conduit à énoncer [ce] théorème sous ses hypothèses minimales et à le démontrer dans ce cadre » (p. 223), alors que ses « applications réalistes […] ne font appel qu'à des conditions de validité moins larges » (p. 223). Son analyse épistémologique du théorème de Rolle l'incite effectivement à souligner « le lien consubstantiel qui se crée progressivement entre l'exigence de rigueur et la minimalité des hypothèses d'un théorème » (p. 225).

De manière plus générale, l'institution qui se définit par un rapport emblématique aux mathématiques dans leur forme standardisée fait écran à un niveau praxéologique pourtant incontournable dans l'éducation mathématique. Ce sera l'objet de ma conclusion.

5. En guise de conclusion : un phénomène à l'articulation des OM et des OD que donne à voir une distinction entre deux niveaux praxéologiques

Je reviens à mon analyse d'une « approche heuristique de l'analyse mathématique » (Groupe AHA, 1999a et 1999b) pour y souligner une spécificité révélatrice d'un phénomène qu'il me paraît intéressant d'analyser à la lumière de la théorie de la transposition didactique telle qu'elle était formulée à ses origines. Il faut d'abord remarquer que ce projet relève d'un MER explicite composé de deux « boucles d'enseignement » comme les appellent les auteurs. La première est elle-même composée de deux pôles : d'une part, la modélisation de grandeurs géométriques ou physiques comme les aires curvilignes et les vitesses et, d'autre part, l'étude de classes paramétrées de fonctions au sens où j'en ai parlé précédemment. Quant à la deuxième boucle, elle se devait de négocier une transition entre, d'une part, ce qu'on pourrait appeler le calcul infinitésimal amarré à des questions de géométrie et de physique et, d'autre part, l'analyse constituée comme théorie mathématique autonome.

Comme je l'avais écrit, il y a un important *logos* dans cet ouvrage mais il ne s'apparente pas à une théorie mathématique standardisée, en particulier, mais pas uniquement, dans la première boucle citée. J'en reprends ici quelques caractéristiques : un exposé qui reste fort proche d'un traitement d'exemples choisis pour leur caractère paradigmatique, un choix momentané de techniques dont la portée est limitée mais qui conservent le sens de la démarche, comme des calculs « artisanaux » de dérivées avant toute étude des propriétés de l'opérateur de dérivation mais aussi des discours technologiques validant la modélisation mathématique d'un système et des propriétés qu'un certain sens commun lui prête. Par exemple, on y prouve que la limite de suites d'aires rectilignes est la valeur exacte d'une aire curviligne en jouant, par une double réduction par l'absurde, sur une conviction géométrique relative à l'ordre des aires de surfaces emboîtées. Plus généralement, on justifie que le calcul créé (de limite, de dérivée ou de primitive) donne bien ce que l'on cherche, au prix d'une « validation » non canonique basée sur des intuitions géométriques ou cinématiques, des expériences mentales, l'examen de cas extrêmes, etc., ou encore au prix d'une validation pragmatique qui consiste à rendre crédible une nouvelle technique, sujette à caution, en montrant qu'elle permet de retrouver des résultats déjà acquis par d'autres méthodes.

Évidemment, par rapport au critère d'évaluation de Y. Chevallard considéré en un sens premier : *les formes d'évaluation sont-elles standard ?* je me dois d'être sévère mais je peux aussi considérer un tel critère comme un élément, parmi d'autres, permettant de caractériser certaines OM. Et je ne m'en suis pas privée, ayant théorisé de telles OM comme des OM « modélisation » qu'il est intéressant, à mes yeux, de contraster avec des OM « déduction ». Ces deux niveaux, je les envisage à la fois comme processus pour décrire deux facettes de l'activité mathématique et comme produits de ces processus en termes d'organisations mathématiques. Ils concernent tout autant les institutions didactiques que celles qui sont à l'origine du savoir savant, que ce soit de nos jours ou dans des temps révolus. Pour un développement plus ample, je renvoie le lecteur à mes travaux (Schneider, 2008, 2011) et je me contenterai de dire ici que, dans les praxéologies « modélisation », on cherche à modéliser des objets non définis mathématiquement, existant par le truchement d'une désignation, mais dont on a une certaine connaissance : ce sont des « préconstruits » au sens de Y. Chevallard (1991). Dans les praxéologies « déduction », on construit une organisation déductive des éléments du modèle ainsi construit, les objets étant définis par les techniques qui les modélisent, rendant ainsi nulle et non avenue toute question relative au bien-fondé de la modélisation initiale.

Il me serait facile de faire un plaidoyer en faveur de l'existence des praxéologies de type « modélisation » en me référant aux nombreux observables récoltés par mes thésards et moi-même sur le fait que les élèves se questionnent sur la pertinence des modèles que ce soit en raison d'une vision empiriste ou d'une rupture par rapport à des acquis scolaires antérieurs. Mais là n'est pas mon but ici. Le phénomène que je voudrais pointer est la non-visibilité des praxéologies « modélisation » à certains niveaux de l'enseignement et en certaines institutions. Je m'en tiendrai ici à l'enseignement secondaire, institution dans laquelle les enseignants – et, plus particulièrement, ceux du lycée– identifient difficilement ce niveau praxéologique tant les praxéologies « déduction » sont, à leurs yeux, un « phare » emblématique du travail mathématique qu'ils ne peuvent pourtant jouer pleinement, compensant alors par des gestes d'ostension comme décrit plus haut. On est là dans une forme d'articulation entre les OM et les OD où c'est la prégnance de certaines OM qui contraignent les OD dont elles empêchent certaines formes. Et, pour mettre au jour d'autres phénomènes de ce type à l'articulation des OM et des OD, il me semble que la distinction faite ici entre OM « modélisation » et OM « déduction » est un pendant utile à la typologie d'OD que proposent M. Boch et J. Gascón.

Sans doute faudrait-il interpréter le phénomène décrit plus haut en retournant aux sources mêmes de la théorie de la transposition didactique. En effet, rendre une épaisseur épistémologique au texte du savoir en reconnectant le « cœur théorico-technologique de l'œuvre avec ses applications » pour reprendre les mots de Y. Chevallard avant même que ce texte n'existe pour les élèves, que ce soit par des jeux adidactiques comme les appellent M. Schneider et A. Mercier (2008) et/ou par un type de discours que P. Job et M. Schneider (2017) qualifient d'heuristique, c'est transgresser une « transmission scolaire bureaucratique » que Michel Verret (1975) identifie par les processus de dépersonnalisation et de désyncrétisation du savoir délimité en savoirs partiels pouvant s'exprimer dans un langage autonome et se prêtant à une programmabilité de leur acquisition. Tâche périlleuse s'il en est…

Références

Artaud, M. (1993). *La mathématisation en économie comme problème didactique : une étude exploratoire* (Thèse de doctorat). Université Aix-Marseille 2.

Artigue, M. (1990). Ingénierie didactique. *Recherches en didactique des mathématiques, 9*(3), 281-308.

Artigue, M. (2009). Rapports et articulations entre cadres théoriques : le cas de la théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques, 29*(3), 305-334.

Bachelard, G. (1987). *Le nouvel esprit scientifique*. Paris : PUF. (Édition originale 1934)

Bachelard, G. (1949). *Le rationalisme appliqué*. Paris : PUF.

Bosch, M. (2011). Plan d'épargne et modélisation algébrique. Vers une ingénierie didactique des PER. Dans C. Margolinas et al. (Éds), *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp. 349-366). Grenoble : La pensée sauvage.

Bosch, M. & Gascón, J. (2002). Organiser l'étude. Théories & empiries. Dans J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Éds), *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 23-40). Grenoble : La pensée sauvage.

Bourgade, J.-P. (2017). Le théorème des accroissements finis comme question curriculaire. Dans G. Cirade et al. (Éds), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* (pp. 221-245). https://citad4.sciencesconf.org

Brousseau, G. (2000). *Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire.* https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00515110

Castela, C. (1995). Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures. *Recherches en didactique des mathématiques, 15*(1), 7-48.

Chevallard, Y. (1982). Sur l'ingénierie didactique. *Actes de la IIe école d'été de didactique des mathématiques*. Orléans : IREM. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=195

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné* (2e éd.). Grenoble : La pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques, 19*(2), 221-266.

Chevallard, Y. & Wozniak, F. (2005). Enseigner la statistique au secondaire. Entre genre prochain et différence spécifique. Dans A. Mercier & C. Margolinas (Éds), *Balises pour la didactique des mathématiques* (pp. 195-218). Grenoble : La pensée sauvage.

Cojerem. (1995a). *Des situations pour enseigner la géométrie : guide méthodologique. 1re à 4e année*. Bruxelles : De Boeck.

Cojerem. (1995b). *Géométrie en situations : 1re/4e, notions pour l'élève.* Bruxelles : De Boeck.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, *7*(2), 5-31.

Gascón, J. (1993). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'« arithmétique généralisée ». *Petit x*, *37*, 43-63.

Groupe AHA (1999a). *Vers l'infini pas à pas, manuel pour l'élève.* Bruxelles, Belgique : De Boeck Wesmael.

Groupe AHA (1999b). *Vers l'infini pas à pas, guide méthodologique*. Bruxelles : De Boeck Wesmael.

Job, P. (2011). *Étude du rapport à la notion de définition comme obstacle à l'acquisition du caractère lakatosien de la notion de limite par la méthodologie des situations fondamentales/adidactiques* (Thèse de doctorat). Université de Liège, Belgique.

Job, P. & Schneider, M. (2017). *À propos de l'écologie du discours heuristique*. Dans G. Cirade et al. (Éds), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la* société (pp. 407-420). https://citad4.sciencesconf.org

Joshua, S. (1996). Qu'est-ce qu'un « résultat » en didactique des mathématiques ? *Recherches en didactique des mathématiques, 16*(2), 197-220.

Krysinska, M. (2007). *Émergence de modèles fonctionnels comme outils de catégorisation de phénomènes divers : repères épistémologiques et didactiques* (Thèse de doctorat). Université de Namur, Belgique.

Krysinska, M. & Schneider, M. (2010). *Émergence de modèles fonctionnels*. Liège, Belgique : Presses universitaires de Liège.

Mercier, A. (1999). *Sur l'espace*-*temps didactique. Études du didactique, en sciences de l'éducation* (Note de synthèse pour l'habilitation à diriger des recherches). Université de Provence.

Mercier, A. (2008). Pour une lecture anthropologique du programme didactique. *Éducation et Didactique, 2*(1), 7-40.

Mercier, A. & Schneider, M. (2008). Approche par compétences, définition et désignation des savoirs mathématiques : peut-on envisager la disparition d'une organisation disciplinaire des savoirs ? *Éducation et didactique, 2*(1), 109-124

Petersen, J. (1880). *Méthodes et théories pour la résolution des problèmes de constructions géométriques*. Paris : Gauthier-Villars.

Polya, G. (1967). *La découverte des mathématiques*. Paris : Dunod.

Radford, L. (1997). On Psychology, Historical Epistemology, and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics. *For the Learning of Mathematics, 17*(1), 26-33.

Rouy, E. (2007). *Formation initiale des professeurs de l'enseignement secondaire supérieur et changements de rationalité mathématique entre l'institution secondaire et l'institution universitaire. Le cas éclairant du thème des dérivées* (Thèse de doctorat). Université de Liège, Belgique.

Schneider, M. (1980). *Les fonctions trigonométriques et exponentielles : connaissances disponibles si leur apprentissage s'accompagne d'un travail de mathématisation*. Namur, Belgique : FUNDP.

Schneider, M. (1988). *Des objets mentaux « aires » et « volumes » au calcul des primitives* (Thèse de doctorat). Université Catholique de Louvain, Belgique.

Schneider, M. (1991). Un obstacle épistémologique soulevé par des « découpages infinis » des surfaces et des solides. *Recherches en didactique des mathématiques, 11*(2-3), 241-294.

Schneider, M. (1992). À propos de l'apprentissage du taux de variation instantané. *Educational Studies in Mathematics, 23*, 317-350.

Schneider, M. (2001). Praxéologies didactiques et praxéologies mathématiques. À propos d'un enseignement des limites au secondaire. *Recherches en didactique des mathématiques, 21*(1-2), 7-56.

Schneider, M. (2008). *Traité de Didactique des Mathématiques*. Liège, Belgique : Presses universitaires de Liège.

Schneider, M. (2011). Ingénieries didactiques et situations fondamentales. Quel niveau praxéologique ? Dans C. Margolinas et al. (Éds), *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp. 175-205). Grenoble : La pensée sauvage.

Schneider, M. & Mercier, A (2008). Situation adidactique, situation didactique, situation-problème : circulation de concepts entre théorie didactique et idéologies pour l'enseignement. Dans *Actes du colloque « Didactiques : quelles références épistémologiques ? »*, Bordeaux, mai 2005.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1-36.

Verret, M. (1975). *Le temps des études*. Paris : Honoré Champion.

Winslow, C. (2008). Transformer la théorie en tâches : la transition du concret à l'abstrait en analyse réelle. Dans A. Rouchier & I. Bloch (Éds), *Perspectives en didactique des mathématiques* [CD]. Grenoble : La pensée sauvage.

Xhonneux, S. (2011). *Regard institutionnel sur la transposition didactique du théorème de Lagrange en mathématiques et en économie* (Thèse de Doctorat). Université de Namur, Belgique.

Xhonneux, S. & Henry, V. (2012). Le théorème de Lagrange en mathématiques et en économie : une étude didactique du savoir enseigné. Dans J.-L. Dorier & S. Coutat (Éds), *Enseignement des mathématiques et contrat social: enjeux et défis pour le 21^e^ siècle – Actes du colloque EMF 2012* (GT5, pp.760-771). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

L’évolution diachronique des praxéologies en classe de langues vivantes étrangères

Jocelyne Accardi
EA 4671 ADEF, Université d’Aix-Marseille (IUFM), France

Abstract. Our problem concerns students’ praxeologies, seen from the history of foreign language teaching (FLT). Our hypothesis is that there is a link between, on the one hand, FLT language reference and the didactic conditions and constraints and, on the other hand, students’ praxeologies. The grid of analysis is established using categories of the levels of didactic codetermination, the language reference and the praxeological organizations. The results of this study show how the TAD opens new ways to think about the action-oriented approach (a current methodology in school education in French-FLT), its implementation and its future.

Resumen. Nuestra problemática tiene por objeto las praxeologías de los alumnos, enfocadas desde la historia de la enseñanza de las lenguas extranjeras (LE). Nuestra hipótesis es que existe un vínculo entre, por un lado, la lengua de referencia de las LE y las condiciones y restricciones didácticas y, por otro, las praxeologías de los alumnos. Hemos construido una plantilla de análisis a partir de las categorías de la escala de niveles de codeterminación didáctica, de la lengua de referencia, y de las organizaciones praxeológicas. Los resultados del estudio evidencian que la TAD abre pistas de reflexión sobre la perspectiva accional, su puesta en marcha y su porvenir.

Résumé. Notre problématique porte sur les praxéologies en classe de langues vivantes étrangères (LVE), à partir de l’histoire de l’enseignement des LVE. Notre hypothèse est qu’il existe un lien entre, d’une part, la langue de référence des LVE et les conditions et contraintes didactiques et, d’autre part, les praxéologies en classe de LVE. Notre grille d’analyse est construite à partir des catégories de l’échelle de niveaux de codétermination didactique, la langue de référence et les organisations praxéologiques. Les résultats de l’étude montrent comment la TAD ouvre des pistes de réflexion sur la perspective actionnelle, sa mise en place et son devenir.

IV^e congrès international sur la TAD (Toulouse, 21-26 avril 2013)
Axe 2. *L’analyse praxéologique comme outil de l’analyse et de l’ingénierie didactiques*

Accardi, J. (2017). L’évolution diachronique des praxéologies en classe de langues vivantes étrangères. Dans G. Cirade et al. (Éds), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l’école et dans la société* (pp. 185-206). https://citad4.sciencesconf.org

1. Introduction

Notre recherche s'intéresse aux praxéologies dans l'enseignement des langues vivantes étrangères (LVE) à partir de l'histoire des méthodologies [1] de cette discipline. À ce sujet nous nous posons les questions suivantes : quel est le lien entre la langue de référence [2] sur laquelle s'appuie l'enseignement des LVE, et les praxéologies enseignantes dans la classe ? Quelles sont les tâches et les techniques préconisées par chaque méthodologie de l'enseignement des LVE ? Quelles technologies et théories accompagnent ces changements ? Quelles conditions et contraintes didactiques ces méthodologies ont-elles rencontrées ? Comment ces praxéologies ont-elles évolué à travers le temps ?

Notre problématique porte sur l'évolution, sur plusieurs siècles, des praxéologies en classe de LVE à partir de l'histoire des méthodologies de l'enseignement des langues. Notre hypothèse affirme que la théorie anthropologique du didactique est un outil performant pour faire émerger les contraintes et les conditions sous lesquelles ont dû travailler les enseignants de LVE, au cours de l'histoire. Elle avance aussi l'existence d'un lien entre la langue de référence des LVE, les praxéologies en classe de LVE et l'évolution des progrès techniques et des théories qui enrichissent l'enseignement des LVE.

Par ce travail, nous proposons de mettre en lumière un aspect des méthodologies de l'enseignement des LVE qui n'était pas forcément approfondi dans la présentation classique [3]. Notre fil conducteur sera en effet

1. Dans l'usage usuel en didactique des LVE, le terme *méthodologie* correspond grosso-modo à ce que, en TAD, on peut nommer une *organisation didactique disciplinaire* (relative à une discipline donnée : anglais, espagnol, etc.), ayant donc en particulier des composantes (en termes de conditions et de contraintes) aux niveaux supérieurs de l'échelle de codétermination didactique : composante pédagogique, scolaire, sociétale-sociale, civilisationnelle même.

2. La langue de référence est ici ce qu'on peut appeler ailleurs la langue cible. En termes de TAD, il s'agit du « savoir à enseigner », dont la désignation est toujours et nécessairement floue. Pour le dire autrement, il s'agit du système complexe de praxéologies linguistiques dont l'enseignement donné cherche à enrichir l'équipement praxéologique de l'élève, par le moyen et à travers le filtre des praxéologies didactiques précisées par ce qu'on a appelé plus haut la méthodologie d'enseignement choisie.

3. Ainsi en va-t-il notamment avec l'ouvrage fondateur de Christian Puren (1988) sur lequel, comme on le verra plus loin, toute notre étude s'appuie.

les manifestations pour les élèves de la mise en œuvre didactique de ces méthodologies par le professeur.

2. Ancrage théorique

2.1. De la TD à la TAD

Notre recherche se fonde sur la *théorie de la transposition didactique* (TD) élaborée par Yves Chevallard (1991), théorie qui a évolué en *théorie anthropologique du didactique* (TAD) (Chevallard, 1997) pour étudier notamment les pratiques des enseignants.

Rappelons que la transposition didactique est une théorie qui s'intéresse au savoir. Dans une première étape, externe à l'école, le savoir savant de la communauté scientifique est transposé en savoir à enseigner par la noosphère dans les textes officiels et dans les manuels scolaires. Dans une seconde étape, interne à l'institution, le savoir à enseigner subit une autre transformation pour devenir le savoir enseigné à travers la parole du maître.

Pour étudier les pratiques des enseignants, Chevallard fait évoluer sa théorie : il donne naissance à la TAD et introduit la notion de praxéologie, terme désignant une entité qui se décompose en une *praxis* (le type de tâches et la technique) et un *logos* (la technologie et la théorie). Le type de tâches est désigné par un verbe d'action et un type d'objet. Une praxéologie relative à un type de tâches T est, en principe, associée à une technique τ qui précise la manière d'accomplir les tâches de ce type. Concernant le bloc du *logos*, la technologie de la technique τ est le discours qui justifie cette technique et a pour rôle de la rendre intelligible. La théorie intervient pour justifier la technologie.

Notre recherche se fonde également sur les évolutions récentes de la TAD, avec notamment les notions *de conditions et de contraintes* de la diffusion sociale des praxéologies, telles qu'elles sont représentées en une *échelle des niveaux de codétermination didactique* comprenant les niveaux de la civilisation, de la société, de l'école, de la pédagogie et de la discipline (à enseigner). Le travail que nous présentons consiste en une reformulation, au sein de la TAD, de travaux de didacticiens des LVE sur l'histoire des méthodologies de l'enseignement des langues.

2.2. La langue de référence dans les méthodologies des LVE : péjoration de l'écrit ou de l'oral ?

Nous avons recherché (Accardi, 2000) la langue de référence de l'enseignement des LVE à partir des travaux de Christian Puren (1988). Dans cette recherche, nous montrions (Accardi, 2000, p. 23) que la langue de référence est celle qui existe à l'extérieur de l'institution scolaire : c'est le savoir à enseigner qui sert de modèle pour construire la discipline à enseigner, la langue sur laquelle s'appuie la conception des manuels scolaires, celle qui est enseignée dans la classe et à laquelle se réfère chaque méthodologie de l'enseignement des LVE. Cette langue de référence a pu renvoyer, selon les méthodologies, au bas latin, à la langue littéraire du latin classique, à la langue orale de la vie de tous les jours, à la langue écrite, à une langue orale avec les normes de la langue écrite ou bien à la langue orale dite « authentique » du discours de l'autochtone ou encore à la langue orale en interaction contextualisée. Cette langue de référence change et évolue au fil du temps, très souvent pour des raisons politiques, historiques, etc.

Marianna Bosch et Yves Chevallard (1999), travaillant sur l'enseignement des mathématiques, ont souligné le phénomène « occidental » de la péjoration de l'écrit (par contraste avec la parole vive), l'écriture n'existant « que parce qu'existe la langue (parlée), dont elle n'est que la servante souvent infidèle et quelque peu méprisée ». Cherchant la langue de référence en LVE, nous avons montré (Accardi, 2000) que, selon les méthodologies, il y a péjoration de l'écrit ou péjoration de l'oral. Ainsi, dans la méthodologie traditionnelle (MT), influencée par l'enseignement du latin classique à la Renaissance, la langue littéraire s'institue comme la langue de référence de cette méthodologie. La langue écrite est valorisée, elle occupe la première place. De 1902 à 1925, dans la méthodologie directe (MD), cette langue écrite est péjorée, car la langue courante à usage journalier se substitue à la langue écrite de référence, afin de rénover l'enseignement des LVE après la défaite française de 1870 face à l'Allemagne. Nous nous trouvons dans une situation où l'écrit perd sa primauté.

Après la guerre de 1914-1918, la France marque un net repli vers les valeurs traditionnelles de formation intellectuelles et culturelles avec la méthodologie active (MA), qui s'impose de 1925 à 1960 environ. La langue de référence est alors la langue orale ; mais la référence orale annoncée est en vérité une référence orale *de l’écrit* et non une référence orale de la langue parlée. C. Puren (1988) explique en effet que, en classe, le commentaire de textes écrits utilise le dialogue oral permanent ; la MA considère l’oral comme « un mode pédagogique d’assimilation des formes écrites, lesquelles restent considérées comme les seules autorisées face à une langue parlée tenue comme fugace, imprécise et changeante » (p. 160). Dans la MA, le texte écrit (souvent littéraire) sert d’appui aux productions orales des élèves, pour qui il constitue un modèle. Un changement de référence s’est installé dans le choix des textes, qui, auparavant, traitaient de la vie quotidienne : ainsi que nous avons pu l’écrire, dans cette méthodologie, « la référence orale annoncée est en réalité une référence orale de l’écrit et non une réelle référence orale ».

Entre 1960 à 1980, apparaît la méthodologie audio-visuelle (MAV), qui fait suite à la défaite de la France en 1940. Cette méthodologie insuffle un désir de renouveau des LVE et veut restaurer le prestige du français langue étrangère par l’intermédiaire du Centre de recherche et d’étude pour la diffusion du français (CREDIF) et du Bureau pour l’enseignement de la langue et de la culture française à l’étranger (BELC). Elle prend pour langue de référence la langue orale en interaction non contextualisée. La MAV choisit d’associer le son et l’image pour remplacer le support écrit à nouveau péjoré. La langue orale retrouve sa primauté comme dans la MD de 1902. Pour finir, de 1980 à 2001, la langue de référence est toujours la langue orale, mais une langue orale en interaction contextualisée dans l’approche notionnelle, fonctionnelle et communicative (ANFC).

2.3. Le savoir de référence des LVE : un savoir multi-référentiel

Le savoir savant est à l’origine du savoir enseigné en mathématiques (Chevallard, 1991). Mais qu’en est-il du savoir de référence des LVE ? L’étude des contenus des manuels scolaires d’espagnol (Accardi, 2000) montre que le savoir d’origine des LVE est un savoir multi-référentiel constitué :

- des savoirs savants dont font partie la grammaire traditionnelle, la linguistique, le savoir littéraire, artistique, historique, géographique, anthropologique, etc.

- des savoirs experts qui regroupent les pratiques de spécialités et celles spécifiques aux métiers, les pratiques artistiques, les pratiques conversationnelles externes à la classe, auxquelles s'ajoutent les pratiques internes à la classe comme les pratiques pédagogiques, didactiques et celles d'évaluation.

Les savoirs experts et les savoirs savants sont autant de pratiques sociales de référence. Ces savoirs n'étant pas présents dans tous les manuels ni en quantité ni de manière semblable, nous devons conclure à l'existence de transpositions didactiques nombreuses et variées des savoirs d'origine dans les manuels destinés à l'apprentissage des LVE [4].

3. Méthodologie de la recherche

Cette recherche souhaite présenter une nouvelle lecture de l'histoire des méthodologies de l'enseignement des langues du Moyen Âge jusqu'à la fin du XX^e^ siècle, à la lumière de la TAD, outil pour mettre en évidence les liens entre les praxéologies linguistiques de référence, les praxéologies didactiques et les praxéologies linguistiques effectivement enseignées [5]. Pour ce faire, nous avons retenu un corpus constitué essentiellement de l'ouvrage fondamental de C. Puren (1988), qui traite de l'histoire des méthodologies de l'enseignement des langues du Moyen Âge à 1980. Ce livre s'appuie sur des « instructions, articles, ouvrages, tables rondes et autres productions des responsables, pédagogues, méthodologues, formateurs, professeurs, ou tout simplement gens "éclairés" […] ainsi que sur les matériels d'enseignements : manuels, grammaires, livres d'exercices, cours avec leur livre du maître, leurs bandes enregistrés, leurs films fixes…, etc. » (Puren, 1988, p. 9). Dans cette étude, l'auteur montre qu'au fil du temps les méthodologies des langues évoluent, généralement en s'opposant les unes aux autres.

4. La notion de praxéologie, élément clé de la TAD, nous permettra une étude comparée des gestes d'études des professeurs des écoles dans un travail mené en collaboration avec Jessyca Tretola (Accardi & Tretola, 2013), afin d'y repérer similarités et divergences dans l'enseignement des LVE.

5. Quoique de façon non uniforme, notre étude se réfère aux enseignements dits scolaires (primaires et secondaires), dont la réalité et la « physionomie » ont fluctué au fil du temps et qui sont distribués aujourd'hui entre école, collège et lycée.

Pour analyser et interpréter ce corpus de textes sur l'histoire des méthodologies, nous avons élaboré une grille d'analyse constituée des catégories suivantes : les conditions et contraintes des différents niveaux de l'échelle de codétermination didactique, la langue de référence et les quatre constituants de la notion de praxéologie (types de tâches, technique, technologie, théorie).

4. Analyse et interprétation du corpus

4.1. Méthodologie traditionnelle (MT) du Moyen Âge à 1902

Au Moyen Âge, le « bas latin » s'enseignait comme une langue vivante dans la société française. C'était une dégénérescence du latin classique d'avant l'ère chrétienne. À l'école, au niveau de la discipline LVE, la langue de référence était le latin vivant. Ce latin parlé impose des conditions et contraintes en matière de pédagogie pour lire, écrire et parler : l'élève doit composer des dialogues correspondants aux différentes situations de la vie de tous les jours. La technique préconisée relève de l'apprentissage par cœur des dialogues. La justification se trouve dans le fait que l'élève doit parvenir à manier avec aisance le latin aussi bien à l'oral qu'à l'écrit.

À partir de la Renaissance intervient une modification significative dans l'enseignement du latin. En effet, l'invention de l'imprimerie et la diffusion des auteurs antiques grâce aux progrès techniques ont pour conséquence, dans la société française, le remplacement du bas latin par le latin classique. Ce changement de la langue de référence enseignée impose des contraintes renouvelées parce que le latin classique a une syntaxe étrangère et compliquée. Ainsi, au niveau de la discipline, les livres de grammaire, de simples grammaires d'usage, sont transformés en lourds traités théoriques qui occupent une grande place dans l'apprentissage. L'élève fait des compositions littéraires, qui exigent de lui de « composer des vers et des discours latins comme s'ils étaient eux-mêmes des poètes et des orateurs de la Rome antique » (Puren, 1988, p. 26). Cette technologie est justifiée par la contrainte, imposée par l'Église (qui occupe une place importance dans la société), d'introduire un objectif de formation esthétique et morale dans l'enseignement du latin classique.

Dans le second tiers du XVII^e^ siècle, au niveau de la civilisation, le latin est supplanté par le français et les autres langues nationales, devenues langues courantes de communication. Dans la société française, le changement de statut du latin impose de nouvelles conditions et contraintes dans l'enseignement de cette langue – devenue langue morte – à partir du français, désormais langue de communication parlée en France. La discipline, le latin, voit son profil évoluer car d'essentiellement littéraire, elle devient davantage grammaticale. Il s'ensuit que le type de tâches à réaliser par l'élève, qualifié par C. Puren de « composition grammaticale » pour les thèmes d'application, fait, en début d'apprentissage, le pendant à la composition littéraire des dernières années d'études secondaires. Pour ce type de tâches, la technique à utiliser comporte l'usage de grammaires et de dictionnaires. Pour justifier cette technique un objectif de formation intellectuelle est invoqué.

Au XIXe siècle, de 1829 à 1902, la MT, pour l'enseignement des langues modernes, évolue sous l'effet de conditions et de contraintes liées aux évolutions de la société française : les progrès de l'industrie, du commerce, des moyens de communication et des rapports internationaux développent une demande sociale de connaissance pratique des LVE. Au niveau de l'école, un décalage important apparaît entre les décisions des autorités et leurs applications. En 1838, l'enseignement des LVE est devenu obligatoire mais, en 1865, il y a toujours très peu d'enseignants (174 professeurs de LVE pour 61 lycées et 253 collèges communaux) et ils ne sont pas très bien formés. Enfin, au niveau pédagogique, l'élève, décrit comme un être statique et passif, a recours à l'apprentissage par cœur de la grammaire – grammaire déductive des règles aux exemples – et du vocabulaire – par des listes de mots. La répétition est la procédure considérée comme légitime.

Dans cette méthodologie, la langue de référence de l'enseignement des LVE est la forme littéraire de la langue étudiée. Elle s'appuie, en l'espèce, sur le latin classique, langue écrite littéraire qui oriente – au niveau de la discipline – le choix des trois types de tâches exigés de l'élève (compositions littéraires, compositions grammaticales et versions) :

- le premier type de tâches est la composition littéraire. Pour réaliser une telle tâche, l'élève est contraint d'« apprendre par cœur quelques dizaines de lignes de vers et de phrases passe-partout d'auteurs » (Puren, 1988, p. 31). Par cette technique de mémorisation, l'élève doit pouvoir reproduire phrases et vers, et les introduire dans ses compositions écrites littéraires – discours composés de déclamations, d'amplifications, de narrations, comme dans l'Antiquité, car la technologie postule la nécessité (condition et contrainte) de favoriser l'apprentissage de la poésie et de l'éloquence.

- le deuxième type de tâches est la composition grammaticale. La contrainte technique est d'appliquer les règles de grammaire lors des traductions du français vers la LVE. Ce procédé est légitimé par la technologie qui met en avant la mémorisation/restitution du vocabulaire et/ou des éléments grammaticaux. Il s'inscrit alors dans l'exigence d'une formation linguistique de l'élève.
- enfin la version, dernier type de tâches exigé dans la MT, soumettait l'élève à la traduction en français depuis la LVE, le contraignant à la lecture d'auteurs pour le former à une culture étrangère.

À côté de cette méthodologie traditionnelle existait en Europe, dès le XVI^e siècle, un cours traditionnel à objectif pratique (CTOP) qui s'est développé à partir du XVIII^e siècle sous la contrainte de la demande sociale. Ce CTOP est lié à un souci d'efficacité pratique et au développement d'une méthode orale. Dans la société française, un enseignement des LVE est mis en place pour des adultes autodidactes et des élèves de l'enseignement secondaire non classique – écoles militaires, écoles de commerce, écoles de jeunes filles, etc. Dans ces cours, la langue de référence est la langue orale et non plus la langue littéraire. Avec ce changement de référence, les normes sont soumises à d'autres conditions et contraintes de l'enseignement scolaire. Une pédagogie plus variée voit l'affaiblissement de l'enseignement théorique de la grammaire. Ainsi, les types de tâches proposés aux apprenants évoluent. En effet, si le principe traduction/grammaire, grammaire/traduction, etc., est maintenu, il s'y ajoute des exercices nombreux et variés comme la reprise à l'oral des exercices écrits de traduction, l'exercice de questions/réponses de conversation ou dialogue sur des situations de la vie courante, etc. La technique retenue est toujours le par cœur pour la mémorisation, qui se justifie par la visée de l'assimilation des formes linguistiques grâce à la répétition. De ce courant naîtra la méthodologie directe.

4.2. Méthodologie directe de 1902 à 1925

Au début du XX^e^ siècle, un changement repérable dans l'échelle des niveaux de codétermination intervient en didactique des LVE. Tout d'abord, au niveau de la civilisation les déplacements vers d'autres pays se font plus fréquents, imposant un besoin d'échanger et de parler d'autres langues. Pour ce qui est de la société française, la défaite française face à l'Allemagne en 1870 s'impose comme une contrainte forte impulsant la rénovation de l'enseignement des LVE. Cette condition se transforme en un impératif, défi contraignant mais nécessaire pour se relever de l'échec car il s'accompagne d'une demande sociale forte d'apprendre, en adoptant la même méthodologie que le vainqueur, et va de pair avec la contrainte de professionnaliser le corps enseignant. Le certificat d'aptitude (CA) à l'enseignement des langues est créé en 1841. Supprimé en 1850, il est rétabli en 1860. Il comprend des épreuves écrites de version et de thème, et des épreuves orales de correction de devoir d'élève, d'une version, d'un thème et enfin d'une leçon sur une œuvre littéraire au programme.

Ces conditions et contraintes sociales influencent le niveau de l'école car les instructions de 1901 et de 1902 imposent de transformer la LVE en « un outil de communication au service du développement des échanges économiques, politiques, culturels et touristiques qui s'accélèrent en ce début du XX^e^ siècle » (Puren, 1988, p. 97). Sous cette contrainte, la MD remplace la MT.

Cette nouvelle méthodologie officielle s'inscrit, aux niveaux de la pédagogie et de la discipline, en rupture épistémologique : les méthodes d'apprentissage et les supports changent. En effet, nous constatons l'abandon de la langue littéraire dans le choix des supports, de l'apprentissage par cœur du vocabulaire, de l'approche déductive en grammaire, de la lecture d'ouvrages littéraires, de la traduction, ainsi que de la vision de l'élève comme un sujet passif. Désormais considéré comme un sujet actif qui s'exprime à travers un jeu de questions/réponses avec le maître, sans passer par la langue écrite, ni par la traduction, il voit ainsi son statut scolaire évoluer.

L'apprentissage de la grammaire devient inductif car l'élève part des exemples pour trouver les règles. La pédagogie naturaliste et associationniste amène l'élève à associer le mot à l'objet, l'image ou le mime au vocabulaire sans qu'il soit permis de le traduire. Cet apprentissage par répétition du lexique de la vie de tous les jours se réalise par centres d'intérêt.

La MD institue la langue courante à usage journalier comme langue de référence. La langue littéraire est rejetée au profit de la langue orale sous la pression de la demande sociale. Elle guide le choix des types de tâches à réaliser en classe. Ainsi, désormais, l'élève est contraint de lire de façon cursive pour arriver à la lecture autonome : lire individuellement, en silence, rapidement et sans s'arrêter. La technologie légitime ces techniques parce que l'élève doit lire de nombreux ouvrages d'écrivains et les comprendre globalement, après avoir écouté la lecture à voix haute du professeur.

Un autre type de tâches est imposé à l'élève : analyser des textes littéraires. Il s'y soumet en s'appuyant sur la technique de la conversation guidée par le maître – procédure qui l'amène à interpréter les mots nouveaux et les matériaux culturels à travers l'échange dialogué. Tout se fait directement dans la langue orale et concourt au développement de la méthode interrogative. Cette maïeutique est censée donner à l'élève-lecteur le plaisir de la découverte, à chaque instant. La théorie qui valorise cette langue orale et sa prononciation est favorisée par la découverte de la phonétique.

4.3. Méthodologie active (MA) de 1925 à 1960

Après la guerre de 14-18, la société française se replie sur les valeurs traditionnelles de formation intellectuelle et culturelle au niveau de la société. Ce net repli pousse l'enseignement des LVE dans un compromis entre MT et MD, donnant naissance à la MA, parfois qualifiée d'éclectique ou mixte. Sous l'effet de conditions et de contraintes sociales, la MA est soumise à un changement de paradigme provoquant des ruptures au niveau de l'école. Celle-ci se voit obligée de changer sa langue de référence qui, de langue à usage journalier de l'autochtone, devient langue orale de l'écrit normé de la littérature, une langue orale très spécifique. À cette modification de référence s'ajoute le rejet de l'interdiction de traduire le vocabulaire, de l'analyse des textes littéraires, de l'oral sans l'intermédiaire de l'écrit.

Au niveau pédagogique, l'apprentissage s'appuie sur le besoin d'activité de l'élève, ses goûts, le vocabulaire concret à partir de centres d'intérêt et la répétition pour mémoriser. Autant de conditions et contraintes qui influencent les praxéologies didactiques proprement dites. Les types de tâches et les techniques préconisés amènent l'élève à :

- faire des commentaires de textes dans un dialogue oral permanent en s'efforçant de construire des phrases correctes et bien prononcées ;
- traduire des textes en langue étrangère (thèmes), pour privilégier un travail réfléchi ;
- expliciter les règles de grammaire à partir des textes, présenter les phénomènes grammaticaux et répéter intensivement des exemples de règles énoncées. L'élève est partagé entre un apprentissage « mécanique » et un apprentissage « raisonné » au profit de ce dernier dans « une grammaire qui demeure résolument inductive » (Puren, 1988, p. 222) ;
- comprendre le vocabulaire pour passer directement des images et mimiques au sens des mots de vocabulaire. Cependant, quand les mots sont jugés trop difficiles, le recours à la traduction est possible – il n'est plus interdit comme dans la MD.

Ces types de tâches sont réalisés en respectant le modèle de la langue écrite en LVE et de sa prononciation, car la phonétique marque de son empreinte le monde scolaire. Celle-ci souligne l'importance d'une prononciation correcte des LVE, lors du dialogue permanent en classe où le gramophone, la radio et le magnétophone, plus tardivement, sont introduits grâce aux progrès techniques.

4.4. Méthodologie audiovisuelle (MAV) de 1960 à 1980

Après la défaite de 1940 apparaît au niveau de la société française un désir de rénover l'enseignement des LVE et de restaurer le prestige de la France à travers le français langue étrangère (FLE). En 1951, le Centre d'étude du français élémentaire réalise la première étude scientifique à l'aide de statistiques sur la langue parlée. Intitulée « L'élaboration du français élémentaire » et publiée en 1954, cette étude est, en 1956, rebaptisée « Français fondamental » et sert d'appui aux cours de FLE. Trois ans plus tard, ce centre d'étude devient le CREDIF et, la même année, le BELC est créé pour la promotion du français.

Au niveau de l'école, des modifications surviennent dans la pratique de la classe de LVE. En effet, la nouvelle méthodologie, la MAV, s'inscrit dans un nouveau paradigme qui abandonne la langue orale et qui s'appuie sur l'écrit, la grammaire inductive, la réflexion sur la langue, la traduction du vocabulaire, le commentaire de texte et le thème.

Au niveau pédagogique, cette méthodologie subit, tout d'abord, l'influence de la méthodologie audio-orale, venue des États-Unis. Mais, dès 1960, en France, la linguistique prend le contrôle de la didactique du FLE ce qui dissipe l'influence primitive de la linguistique appliquée américaine. La MAV française se construit autour de l'utilisation conjointe de l'image et du son.

La langue de référence de l'enseignement des LVE devient la langue « authentique », à savoir le discours de l'autochtone. La langue parlée est enseignée dans le dialogue avec l'usage de l'image et du son : le support visuel – constitué par des vues fixes, diapositives ou films fixes, figurines en papier floqué pour tableau-feutre ou images du livre – est intégré au support sonore. Ce dernier se partage entre des enregistrements magnétiques et la voix du professeur. Ces auxiliaires pédagogiques suppléent le support écrit car ils évitent les interférences de la graphie et assurent les bases d'une bonne prononciation. La répétition intensive devient incontournable pour mémoriser la langue dans une prononciation de qualité et dans ses structures correctes, car l'erreur ne devait plus apparaître. Grâce à ces procédés, l'élève découvre de façon implicite la grammaire, sans jamais recourir à la formulation des règles dont il se saisit intuitivement. Il ne réfléchit plus sur la langue, il la manipule à l'aide d'exercices structuraux. Le vocabulaire appris se limite à celui des structures enseignées.

Au niveau de la discipline, l'élève réalise le type de tâches consistant à communiquer en interactions non contextualisées. Pour améliorer l'oral, l'élève utilise la technique de la répétition systématique et intensive des mots et du dialogue de base en respectant l'accent, le rythme et l'intonation de la LVE étudiée. Cette répétition intensive est facilitée par le laboratoire de langue, le magnétophone ou, à défaut, par la voix du professeur. Ces manipulations de la langue se font à partir d'exercices d'entraînement phonétique, de discrimination auditive, de prononciation des mots et d'exercices structuraux. La pratique de la répétition se fait par des transformations de structures où l'élève procède à des changements de genre, de forme, de personne, de temps, par des expansions (par ajout d'adjectifs ou de compléments) ou des réductions sur l'axe syntagmatique. Sur l'axe paradigmatique, il opère des substitutions de substantif, de verbe, etc.

Du point de vue technologique, la manipulation mécanique est considérée comme permettant d'intégrer et de mémoriser les structures. Cette pratique innovante est justifiée par leur caractère intensif et par la présence des laboratoires de langue. Les théories qui fondent cette méthodologie sont d'une part la psychologie béhavioriste qui voit la langue comme un ensemble d'automatismes linguistiques à acquérir par manipulations intensives – elle part du principe qu'à un stimulus linguistique correspond une réponse du même ordre –, d'autre part le structuralisme français : le structuro-globalisme des travaux de Petar Guberina (1913-2005), qui se situe dans la lignée des recherches sur l'énonciation entreprises par Charles Bally (1913-1939) et Émile Benveniste (1902-1976), etc. Cette méthodologie a bien fonctionné avec des débutants, mais a vite montré ses limites pour les niveaux intermédiaires et avancés.

Arrivé à la fin de son parcours, C. Puren explique que les années 1980 témoignent d'une évolution de la MAV (la dernière des méthodologies qu'il étudie dans son livre) vers de nouvelles démarches didactiques, « notionnelles-fonctionnelles » et « communicatives ». Robert Galisson (1980) et Évelyne Bérard (1991), pour leur compte, y voient plutôt la naissance d'une nouvelle méthodologie : l'approche notionnelle, fonctionnelle et communicative (ANFC), qui s'inscrit dans un changement de paradigme par rapport à la MAV. C'est avec cette nouvelle méthodologie que nous conclurons ce tour d'horizon des méthodologies d'enseignement des langues qui se sont succédé jusqu'à l'orée du XXI^e^ siècle.

4.5. L'approche notionnelle-fonctionnelle et communicative : 1980-2001

En 1971, un changement se profile au niveau de la civilisation européenne, car le Conseil de l'Europe (fondé en 1949) se penche sur la question de l'enseignement-apprentissage des langues. Le but est de faciliter les relations entre les populations de la Communauté européenne, dans un dessein économique, politique, culturel et pour répondre aux besoins d'un nouveau public d'apprenants et de migrants. Le Conseil entreprend l'analyse des besoins de communication minimaux et l'identification des structures grammaticales et du lexique susceptibles d'y répondre dans chaque langue.

Cette étude aboutit à la publication de « niveaux seuil » des différentes langues [6]. La société française s'affilie aux travaux du Conseil de l'Europe, notamment par la publication du « Niveau Seuil » français (1976) qui inspire la nouvelle méthodologie : l'approche notionnelle-fonctionnelle et communicative (ANFC). Celle-ci, en ce qui concerne la LVE dans le système éducatif, change la langue de référence, qui devient la langue orale en interaction contextualisée, celle qui permet de se comporter et d'agir socialement. Cette nouvelle approche préconise un changement de paradigme au niveau de la pédagogie par abandon de la langue en interaction non contextualisée (souvent ressentie comme inauthentique), de la grammaire implicite, du vocabulaire limité aux structures étudiées, des exercices intensifs de phonétique, de la psychologie béhavioriste et de la linguistique structuraliste. Les exercices structuraux sont remis en cause pour devenir de simples auxiliaires utiles et non plus essentiels. La grammaire est de nouveau explicite et réflexive et s'appuie sur la méthode raisonnée inductive. Le travail de réflexion sur la langue se fait même à partir des erreurs commises par les élèves. Le vocabulaire devient plus complet que précédemment, il est choisi en fonction de l'usage et des besoins et non des structures. Il peut être traduit en langue maternelle ou compris grâce à l'image. Le langage se spécifie selon le destinataire. Au niveau de la discipline, les praxéologies sont modifiées : les types de tâches proposés aux élèves évoluent. L'élève pratique des dialogues en situation, pour agir socialement à partir de jeux de rôles, de simulations, de jeux divers, etc. Il est ainsi formé à la compétence communicative pour tendre vers la langue orale en interaction en contexte. Pour y parvenir, la technique requise consiste à manipuler la langue dans un dialogue en situation authentique et contextualisée, empreinte de culture étrangère de la vie quotidienne, s'appuyant sur des documents authentiques. La technologie met en avant la vie de tous les jours et se réfère à l'importance accordée à l'anthropologie au niveau théorique (Accardi, 2000). D'autres théories justifient cette approche : la linguistique de l'énonciation, l'analyse du discours (importance de l'enchaînement, aptitude à engendrer des énoncés liés à ce qui précède – aussi bien dans sa propre parole que dans celle du

6. Les premiers « niveaux seuil » parus sont, pour l'anglais, *Threshold Level English* de Van Ek (1975) et, pour le français, *Un Niveau Seuil* de D. Coste (1976).

locuteur – et susceptibles d'être prolongés), la pragmatique (qui emprunte la notion d'acte de parole à la sociolinguistique), mais également la psycholinguistique et la psychologie constructiviste de Piaget. Si le cours de langue avec dialogues participe à la mise en place de situations authentiques d'interaction contextualisée, il n'exclut pas l'utilisation de la référence à la littérature et à la culture artistique, qui connaît un regain d'intérêt.

5. Bilan et perspective

Nous sommes partie des travaux de C. Puren qui, dès 1988, a étudié avec force détails les différentes méthodologies d'enseignement des LVE du Moyen Âge jusqu'aux années 1980, et qui a permis de comprendre l'évolution de ces méthodologies, ouvrant ainsi de grands champs de recherche en didactique des langues.

Grâce aux orientations les plus récentes des théories didactiques, notre recherche a pu donner une nouvelle lecture de l'évolution de ces méthodologies. Nos recherches précédentes s'étant appuyées sur la théorie de la transposition didactique, nous avons voulu mettre à l'épreuve, pour la didactique des langues, l'évolution actuelle que Chevallard lui a donnée, à partir du cas des mathématiques, et qui a conduit à la théorie anthropologique du didactique.

Cette théorie constitue un outil qui nous a permis de faire émerger des éléments importants. En effet, nous avons pu, grâce à la TAD, catégoriser et mettre en évidence l'effet des conditions et contraintes des différents niveaux de codétermination didactique sur les diverses méthodologies. Nous avons dû, par rapport aux mathématiques – terrain privilégié de l'application de la théorie de la transposition didactique et de la TAD – prendre pour savoir à enseigner la langue de référence, qui majore ou minore l'écrit ou l'oral (voir le tableau 1 de l'annexe 1), modifie les praxéologies et codétermine les types de tâches demandés dans chacune des méthodologies, les techniques convoquées et leurs justifications technologiques et théoriques dans l'enseignement des langues vivantes. L'annexe 2 résume les caractéristiques, mises en lumière par la TAD, de chaque méthodologie, permettant ainsi de visualiser l'évolution de l'enseignement des langues étrangères en France.

Aujourd'hui, la méthodologie en vigueur dans l'enseignement des langues, dans le Cadre européen commun de référence pour les langues (CECRL) publié en 2001, porte le nom de perspective actionnelle. Il sera intéressant de poursuivre cette recherche par l'étude, dans le cadre de la TAD, de cette nouvelle évolution de la didactique des langues. D'ores et déjà, nous pouvons préciser que si la perspective actionnelle met au cœur de sa démarche ce que nombre de textes officiels ou semi-officiels nomment *la tâche*, en un sens qui n'est pas incompatible avec la TAD, elle tend en même temps à occulter ce fait que l'ensemble des activités de l'élève est constitué d'un enchaînement complexe de tâches qui sont toutes susceptibles d'avoir des effets d'apprentissage réels, même si ce qui est appelé *la tâche* a un rôle structurant de l'activité. La même remarque s'applique plus généralement à toutes les méthodologies d'enseignement des LVE que nous avons passées en revue, qui conduisent nécessairement l'élève à s'engager dans des types de tâches linguistiques et microsociaux. Ces types de tâches sont parfois plus orientés vers une pratique de la langue littéraire écrite et d'autres fois plus vers la pratique de la langue orale. Elles ont sans cesse varié, mais elles étaient toujours le résultat d'activités multiples et diverses menant à elles. Ce constat permettra-t-il de contrecarrer les inquiétudes et les résistances des enseignants de LVE désorientés par la notion de perspective actionnelle et par sa mise en œuvre dans les classes ? Nous espérons que le type d'analyse mené ici à l'aide de la TAD pourra avoir à cet égard un rôle facilitateur dans le processus d'appropriation de la nouvelle méthodologie prônée actuellement par les instances officielles.

D'autres notions, consubstantielles à la perspective actionnelle, devraient être soumises au filtre de la TAD, comme par exemple la notion de stratégie, à travers les compétences sociolinguistique et pragmatique de la compétence communicative langagière, analysable comme condition et/ou contrainte de divers niveaux de l'échelle de codétermination didactique.

Nous sommes revenue, pour chacune des méthodologies étudiées, sur l'importance de la langue de référence. Cet élément, essentiel en LVE, a varié au cours de l'histoire de leur enseignement, en fonction de nombreux paramètres que nous avons mis en évidence. La perspective actionnelle n'échappe pas à cette évolution, et il sera tout à fait utile, nous semble-t-il, de préciser à la lumière de la TAD ce qu'il en est de la langue de référence et les conséquences sur les praxéologies des enseignants et des élèves.

Notre travail nous a permis de constater que si les méthodologies évoluent en même temps que les sociétés qui les produisent, les théories évoluent également en nous procurant de nouveaux outils qui permettent d'apporter de nouveaux regards : nous avons testé un de ces outils sur des méthodologies maintenant dépassées. Souhaitons que son application à la méthodologie en cours, comme nous le proposons, permette aux enseignants de LVE à la fois de mieux saisir cette dernière dans son ensemble et de pouvoir éventuellement en modifier certaines des conditions pour que l'activité professorale puisse évoluer et s'améliorer dans le futur, pour le plus grand bénéfice de la maitrise des LVE par les élèves, objet final de l'enseignement des LVE.

Références

Accardi, J. (2000). *La référence en didactique des langues, le cas de l'espagnol* (Thèse de doctorat). Université de Provence.

Accardi, J. & Tretola, J. (2013, janvier). *Généricité et spécificité des formes de l'étude en LVE à l'école.* Communication présentée au troisième colloque international de l'Association pour des recherches comparatistes en didactique (ARCD), Marseille.

Bérard, E. (1991). *L'approche communicative : théorie et pratiques*. Paris : CLE International.

Bosch, M. & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques, 19*(1), 77-124.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné* (2^{e} éd.). Grenoble : La pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1997). Les savoirs enseignés et leurs formes scolaires de transmission, un point de vue didactique. *Skholê, 7*, 45-64.

Galisson, R. (1980). *D'hier à aujourd'hui la didactique générale des langues étrangères. Du structuralisme au fonctionnalisme*. Paris : CLE International.

Puren, C. (1988). *Histoire des méthodologies de l’enseignement des langues.* Paris : Nathan.
http://www.aplv-languesmodernes.org/spip.php?article813

Annexe 1. Évolution diachronique de la langue de référence

Méthodologies	Langue de référence : l'écrit	Langue de référence : l'oral
MT Moyen Âge		bas latin
MT Renaissance	latin classique littéraire	
MT Fin XVII^{e}	latin littéraire (langue morte)	
MT XIX^{e}	langue littéraire de la LVE	
CTOP Du XVI^{e} à 1902		langue orale
MD 1902-1925		langue courante à usage quotidien
MA 1925-1960	langue orale de l'écrit littéraire	
MAV 1960-1980		langue authentique de l'autochtone
ANFC 1980-2001		langue orale en interactions contextualisées

Tableau 1. Évolution diachronique de la langue de référence.

Annexe 2. Résumé des caractéristiques mises en lumière par la TAD de chaque méthodologie

1. Méthodologie traditionnelle du Moyen Âge à 1902

1.1. Au Moyen Âge

Langue de référence : le bas latin.
Type de tâches : composer des dialogues de vie quotidienne.
Technique : en apprenant par cœur des dialogues.
Technologie : pour parler avec aisance le bas latin oral et écrit.
Théorie : aucune référence explicite.

1.2. À la Renaissance

Langue de référence : le latin classique (langue littéraire).
Type de tâches : rédiger des compositions littéraires.

Technique : en composant des vers et des discours.
Technologie : pour donner une formation esthétique et morale.
Théorie : aucune référence explicite.

1.3. À la fin du XVII^e^ siècle

Langue de référence : le latin littéraire (devenu langue morte).
Type de tâches : faire des traductions grammaticales.
Technique : en utilisant grammaires et dictionnaires.
Technologie : pour donner une formation intellectuelle.
Théorie : aucune référence explicite.

1.4. Au XIX^e^ siècle

Langue de référence : la langue littéraire de la LVE.
Type de tâches : faire une composition littéraire, traduire.
Technique : en produisant des phrases, en faisant des traductions.
Technologie : pour apprendre la poésie, l'éloquence, maîtriser la LVE, former à une culture étrangère.
Théorie : aucune référence explicite.

1.5. Du XVI^e^ siècle à 1902 : cours traditionnel à objectif pratique (CTOP)

Langue de référence : la langue orale.
Type de tâches : répondre aux questions dans un dialogue.
Technique : en mémorisant les formes linguistiques.
Technologie : pour assimiler les formes linguistiques par la répétition.
Théorie : aucune référence explicite.

2. Méthodologie directe de 1902-1925

Langue de référence : la langue courante à usage quotidien de la LVE.
Type de tâches : lire de façon cursive et autonome, analyser des textes littéraires.
Technique : en lisant en silence, en dialoguant avec le maître.
Technologie : pour comprendre un texte, extraire une interprétation des mots et de la culture dans les dialogues avec le maître.
Théorie : la phonétique.

3. Méthodologie Active de 1925-1960

Langue de référence : la langue orale de l'écrit littéraire de la LVE.
Types de tâches : commenter un texte dans un dialogue oral, faire des traductions, expliciter les règles grammaticales et en répéter les exemples.
Technique : en construisant des phrases correctes, bien prononcées dans le commentaire de texte ; en traduisant selon le modèle de la langue écrite ; en répétant les exemples sans les traduire.
Technologie : pour privilégier le travail réflexif, parvenir à une bonne prononciation grâce aux moyens techniques « audio ».
Théorie : la phonétique.

4. Méthodologie audiovisuelle de 1960-1980

Langue de référence : la langue orale «authentique» de l'autochtone.
Type de tâches : parler en interactions non contextualisées.
Technique : en manipulant des structures syntaxiques dans des exercices structuraux.
Technologie : pour répondre mécaniquement aux questions.
Théories : le structuro-globalisme et le behaviorisme.

5. Approche notionnelle fonctionnelle, communicative de 1980-2001

Langue de référence : la langue orale de la LVE en interactions contextualisées.
Type de tâches : manipuler la langue dans un dialogue en situation.
Technique : en apprenant à partir de documents authentiques, de jeux, de dialogues en situation, de saynètes, etc.
Technologie : pour reconstruire le savoir et travailler en groupe
Théories : le constructivisme, le socioconstructivisme, la pragmatique, l'analyse du discours.

Tendencies in engineering students' assertions about exam tasks

Hoda Ashjari
Linköping University, Sweden

Resumen. Este estudio se centra en la transición secundaria – universidad con el objetivo de comprender mejor las diferencias y dificultades que aparecen en el estudio de las matemáticas en el caso particular de los estudiantes de ingeniería. Se han entrevistado los estudiantes de una universidad de Suecia durante su primer curso de un grado de ingeniería, en busca de ciertos factores prevalentes tanto para aquellos que tienen éxito como los que fracasan en los exámenes de matemáticas. Un factor importante y decisivo para tener éxito con las matemáticas de la universidad consiste en ser competente en los exámenes y aprobarlos. Así, se han estudiado las tendencias en las afirmaciones de estudiantes principiantes acerca de las preguntas de examen y de las soluciones propuestas, en términos de praxeologías según la teoría antropológica de lo didáctico.

Résumé. L'objectif principal de cette étude est de mieux comprendre quelles sont les différences et les difficultés rencontrées dans l'étude des mathématiques lors de la transition entre l'enseignement secondaire et l'enseignement supérieur, dans le cas des élèves ingénieurs. Des étudiants d'une université suédoise ont été interrogés au cours de leur première année de formation d'ingénieur, afin d'étudier certains facteurs qui prévalent aussi bien pour ceux qui réussissent que pour ceux qui ne réussissent pas les examens de mathématiques. Un facteur important et indéniable pour réussir en mathématiques à l'université est d'y être compétent et de réussir aux examens. J'ai donc étudié les tendances dans les affirmations des étudiants sur les questions posées aux examens et les réponses apportés, en termes praxéologies d'après la théorie anthropologique du didactique.

Abstract. The principal focus in this study is the secondary – tertiary education transition, aiming to better understand what the discrepancies and difficulties are with respect to the study of mathematics, in particular in the case of engineering students. Students from a university in Sweden have been interviewed during their first year of an engineering program, in search of certain factors prevalent either for those who succeed or those who do not succeed in mathematics exams. An important and distinct factor in succeeding with university mathematics is to be proficient in and passing exams. Thus I have studied tendencies in beginner students' assertions, about exam items and posed solutions, with reference to praxeologies in the anthropological theory of the didactic.

IV^e congrès international sur la TAD (Toulouse, 21-26 avril 2013)
Axe 2. *L'analyse praxéologique comme outil de l'analyse et de l'ingénierie didactiques*

Ashjari, H. (2017). Tendencies in engineering students' assertions about exam tasks. Dans G. Cirade et al. (Éds), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* (pp. 207-220). https://citad4.sciencesconf.org

1. Introduction

The transition from upper secondary to university mathematics has for long been known as an issue and object of concern and research. These have in turn been in relation to students' difficulties and different teaching designs (Gueudet, 2008). One prominent manner in which this issue becomes apparent is in exams, as the students need to and often struggle to pass the mathematics exams to be successful at the university. Thus, the exams could be argued to be a potent feature in the secondary-tertiary transition problem, which needs to be studied further. In the Swedish context Bergqvist (2006) studies the requirements on students in mathematics exams at university. Bergqvist analyses exam tasks in calculus and conclude that, to pass the exams, the students are only required to imitate algorithms and memorise facts from the textbook.

2. Theory

This study is set up with the notion of mathematical organisations or *praxeologies* from the anthropological theory of the didactic, ATD, to describe the character of mathematical knowledge in a particular institution (cf. Chevallard, 1999, 2002), mathematical organisations or *praxeologies* being a way to model mathematical and didactical knowledge (Winsløw, 2012).

Praxeologies are bodies of knowledge, organised in a practical and a theoretical part. The first, the practical block $[T / \tau]$ consists of a type of tasks T, and a technique τ to carry out these tasks. Put in relation to a certain notion X in mathematics, one must first (be able to) recognise it when confronted with it, and to solve tasks involving the notion X; further, one must have available the means to accomplish the tasks, that is a certain technique τ. In this way, one tries to define both a type of tasks T, in connection to a certain area/concept, and a technique that solves a set of tasks of a certain type. This practical block of a type of tasks and a technique is considered the minimal entity of *practical knowledge*, and its two elements define each other (Winsløw, 2012). Turning to the other part of praxeology, the *theoretical block*, $[\theta / \Theta]$, it can be defined in relation to a set of practical blocks. As it is contextualised, there is a discourse about the techniques, a technology θ. The technology "explains how to apply and distinguish a whole set of techniques" (Winsløw, 2012). On top of that and "[a]t a higher level of discourse, technologies are developed, explained, related and justified in and by a theory Θ. For a given set of practical blocks, a technology, θ, and a theory, Θ together form what is called a theoretical block, [θ / Θ]":

> These [praxeologies] form the 'atoms' of mathematical practice and discourse; whenever faced with a task, the mathematician – or the student – will seek to identify it with a type of task and hence with a technique, which is then applied to solve the task. He might go on to explain and justify his choice of technique within a technology, and he might even be able to explain how this technology can be explained and justified within a theory. Of course, none of these derivatives of the task are universal or uniquely defined by the task, but in a given institution some theory may appear natural, privileged or even optimal to users. (Winsløw, 2012)

In this study I set out to identify what the beginner students note and pronounce when confronted with exam tasks and given solutions in order to evaluate the solutions. Do the students describe what kind of *tasks* they have in front of them, and/or the *techniques* required to solve them? Do they also attempt to comment on features that explain and justify the choices made, thus making conjectures about *technology*? And, lastly, do the students comment on or explain the latter, justifying it – *theory*?

3. Method

This study is part of a larger research project, aimed at investigating the transition from school to university mathematics, where engineering students at two universities in Sweden have been interviewed during their first year of university studies. The students have been selected in order to represent different programs, as well as different achievement levels, determined by their scores on a diagnostic mathematics test, which they were given as they started their engineering program, and their scores on their undergraduate mathematics courses. These students have been interviewed three times during their first year of university studies according to the table 1.

First semester	Second semester
Interview 1 During the first two months of the year. Mainly concerning the students' experiences from upper secondary mathematics.	**Interview 2** During the first month of the second semester. Concerning their mathematics studies at university so far, mathematics texts, and exam items. **Interview 3** During the last month of the first year. Looking back at their first university year and comparing it with upper secondary school.

Table 1. Student interview schema.

The first interview was conducted during the first two months of the academic year, where the interview focused on their upper secondary mathematics; what content it dealt with, how it was organised, the teacher's role, how they experienced exams, etc. Secondly, they were interviewed after they had finished their first semester at university. In this interview the students were asked to describe the mathematics courses in different ways and also asked to arrange excerpts from different Swedish mathematics (calculus) textbooks (Hellström et al., 1991; Hyltén-Cavallius et al., 1956; Lennerstad, 2002; Tengstrand, 1994) according to which one is "more mathematical", as well as assessing a couple of student solutions to typical exam questions, in both cases being prompted to argue for their ranking and scoring, respectively. In this paper I examine the interview transcripts from 20 students when asked about the exam tasks. A case study of the same twenty students indicated a difference in the students' views on what signifies a more mathematical text in relation to their achievement (Jablonka et al., 2012).

Twenty transcripts from the second interview were analysed with focus on the students' responses to the interview question where they were asked to evaluate given solutions to some older exam tasks given to the regular undergraduate calculus courses for the study programme of the particular students. Hence, due to the fact that the students were selected from different engineering programs, with differing organisation and content when it comes to the mathematics courses, the exam objects were partly altered accordingly. In short, descriptions of the exam questions used are the following ones:

A1. Examine the limit $\lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)^x}{x^{(x+1)}}$

A2. Examine the limit $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-x}$.

B1. The area given by the inequalities $1 \le y \le e^x$ and $0 \le x \le 1$ is rotated one turn around the y-axis. Calculate the volume of the rotation body.

B2. Two functions f_1 and f_2 are strictly increasing functions and defined for all real x. Let $h(x) = f_1(x) f_2(x)$. Is h strictly increasing? Proof or counter example necessary.

C. (a) Does the equation $x \sin x = 1$ have a solution on the interval [0; π/2]?

(b) Show that the equation $x \sin x = 1$ has infinitely many solutions.

The prevalent transcripts were organised with the purpose to depict a general picture of tendencies in students' assertions about the exam questions and solutions, and to thereafter map these to praxeologies. In turn, it was explored whether the students' assertions point to the practical block – tasks and techniques – and/or the theoretical block – technology and theory – furthermore relating this to the individual student's exam results in the engineering program. To delineate these assertions the student transcripts were analysed by a thorough review. From this, descriptive categories were gathered and associated with each interview excerpt. The students' statements were related to each student's combined performance on mathematics exams during their first two years. Three achievement levels were set, on the account of the students' accumulated grades on mathematics exams during the first two years of study: low, intermediate and high. On a grading scale from zero to five, low, L, was set to an average grade < 2.5, intermediate, I, 2.5 – 3.5 and high, H, > 3.5. For this step of the analysis, the students' achievement on the diagnostic test was omitted.

4. Results and discussion

The students' achievement levels on their mathematics tests were distributed as follows: five low achieving students, L, four intermediate, I, and eleven high achieving students, H.

Notably not all students actually speak about and attempt to reason about the mathematical content of the tasks. Still nine out of the eleven high achieving do, as well as all four in the intermediate group, but only one of the five lower achieving students. The students reason about the content in the worked solutions, and make conjectures about what has been done, what they would do and what they cannot determine because they do not know or remember certain aspects. This clear distribution between the performance levels indicate that the students at the lower end of the scale only have slight access to the praxeologies at hand, as they do not even enter a discussion about the mathematics and specificities of the tasks and solutions.

As an example, the solution provided for task A1 included a common technique considered not correct by the institution, that is, to take the limit of one part of the task while leaving x fixed in another part:

$$\frac{(x+1)^x}{x^{x+1}} = \frac{(x+1)^x}{x^x \cdot x} = \left(\frac{x+1}{x}\right)^x \cdot \frac{1}{x} = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \cdot \frac{1}{x} \to e \cdot \frac{1}{x} = \frac{e}{x} \to 0 \text{ as } x \to \infty$$

Nevertheless, of those students who got this task to evaluate, it was common to accept the solution as ok:

> Student_1: yes on task A I think one should be able to get three points
>
> Interviewer_1: ok how do you think
>
> Student_1: no but it is ok to follow easily what happens and that it is it is seems to be correct I think

Only one student hesitated, after first giving three points:

> Student_2: yes… I don’t know … here they in one way let this term move off to its limit before he kind of checks it … I don’t know if one is allowed to do this on that task … so that would be what took down points I can’t say if one is allowed to do this or not

Both these students were high achieving and focus on the content of the task by commenting on the technique and implicitly referring to technology endorsed by the institution.

The focus of four students, two in the lower achieving and two in the intermediate, is foremost on what the tasks at hand are worth, and not the solutions given, despite the fact that the interviewer makes it clear that they have to grade the solutions, given that each exam item is allotted zero, one, two, or three points. One possible explanation to this is that the students identify the task type and, due to that, can estimate it. However, since very few of them neither approach the solutions nor the tasks by commenting the content as described above, it seems more probable that they may not have access to the praxeologies and thus, bring the form and more general aspects into focus.

The outcomes of a previous study (Jablonka et al., 2012), looking at the students' ranking of calculus textbook extracts, according to which is more mathematical, shows a similar differentiation between the high and low achieving students. It was challenging to the lower achieving students to describe what the textbook extracts were actually about, and they rather focused on the form than the content. This was in contrast to the higher achieving students, who were able to be more specific about the texts.

Note that none of the eleven higher achieving students makes comments of this nature, that is, comments about form rather than content. Together with that, two L and one I, students point out another formalism as important in the grading, and are specific about that the solution lacks the wording "*Answer: ...*" at the end of the solution, and stress that this results in a reduction of points, even though the answer, according to the student, appears in the solution. To some extent, this connects to τ, the technique, however somewhat hastily. Further comments about technique can be illustrated by one of the following higher achieving student's comment on task C, which displays his/her limited access to techniques other than calculations, that is, giving solutions to mathematics tasks composed of text other than numbers and calculations.

> Student_3: well... I don't know what I think. It's hard with lots of texts... I think... like did I get all the words I need and like... well all the points... ain't it easier to see when you write out calculations and things like that... like get everything on there it's a lot harder/more difficult to assess/judge when it's text then there's not really any guidelines for it is there... like... really or I'm philosophizing so that if I could calculate it/figure it out then I'll do that that feels much more safe than like writing cause then it could be misinterpreted or like well but then someone thinks that no but you're not explaining it good enough and things like that so then it is more like a last resort for me it feels like

The student seems to struggle with distinguishing, accepting and putting into practice the conditions for using anything but calculations as a valid technique. In a similar vein, one of the lower achieving students refers to and describes what is required in the solution (for task A2: Examine a limit), as "*make believe mathematics*". The solution given to the student to evaluate was the following:

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-x} \quad = \quad \left|\,\textit{extend with conj.}\right|$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-\left(x^2-x\right)}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2-x}} \quad = \quad \left|\begin{array}{c}\textit{as } x \textit{ is very large}\\ \textit{the } x^2-\textit{term dominates}\\ \textit{the } x-\textit{terms}\end{array}\right|$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2}} \quad = \quad \lim_{x\to\infty}\frac{4x}{2x} \quad = \quad \underline{\underline{2}}$$

The student's statement underlines a conception of mathematics as arbitrary:

> Student_3: particularly extend with with the conjugate I would like them to show and not only do it with a line so I would have written it out *[pause]* this one on the other hand well isn't really really necessary to write/spell out [The student pointing to the part of the solution where it says that x^2 –term dominates the x-terms.] … that doesn't feel quite as necessary cause just according to me at least with this kind of lim and stuff it's a little well I don't know if I can really say it but a little make believe maths you can do a little bit as you feel like and it maybe works sometimes anyway if you're a little lucky.

One general aspect that was present in all three achievement levels, with a slight inclination on the higher achieving, is an expression for that points given in exams are dependent on the mood of the examiner, i.e. if the examiner (decides) to be nice or not, and there's a slight inclination among the higher achieving students when adding the aspect that there are arbitrary opinions that steer the marking of student solutions. Moreover some students declare that one either receives full marks or none at all, explaining that the latter occurs when there is some mistake or omission in the solution. Similarly to the first point, there is a slant towards this stance among the higher achieving students. These kinds of remarks from the students point to an awareness of that knowledge criteria are strongly institutionalized.

Student_4: yeah yeah it's monotonically increasing at *[reading]* yeah but about the scoring I've got this feeling that you either get full marks or you get nothing at all there should be a lot to it if you lose only one point in a task what I've noticed so far

----

Student_5: ok but what like from what point of view should I correct it as upper secondary or MAI [Department of Mathematics]

Interviewer: no here MAI

Student_5: then you have zero on everything

Another aspect that many students commented on was the use of graphs in the solutions, in total twelve students. However, one can mark a tangible difference in what way the students' remark on the use of graphs. That is, all three low achieving students and one intermediate student in this category explicate that the mere occurrence of a graph, without any additional conditions, is positive for the grading. As an example, of the two solutions presented on part b of task C, one student in this category clearly preferred the graphic solution to the algebraic and written elaborations of the other solution. The following graphic solution was shown (see figure 1):

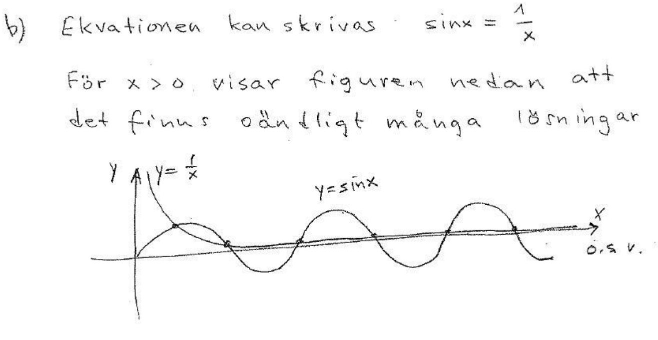


Figure 1.

The Swedish text translates to the following: "*The equation can be written* $\sin x = \frac{1}{x}$. *For x > 0 the figure shows that there are infinitely many solutions*."

The student evaluated this graphic solution higher than the non-graphical one that was shown:

> Student 6: this I think the second solution is much better […] it is more factual more easy to read you see what he is doing he has a little more equivalent to x sine equals x 1 is equivalent to that sin x it is one over x… and then you easily see how he had thought but he had set it up graphically so one sees that he has infinitely many solutions if one knows how the curves look like… so drawn so that it fits with a sine curve and one over x that tends to infinity… tends to zero I mean… and this I think is much shorter written yet he has got the essential there and that is why I would give the second solution a higher grade than the first.

Contrastingly, the bulk of six students in this category are found among the higher achieving students who impose the use of graphs with the additional condition that it should be accompanied by comments in order to be viable. Only one of the higher achieving students is satisfied with only the depiction of a graph. This aspect alludes to the technique, τ, and could also indicate features of technology, θ, and suggests that the higher achieving students to a greater extent tend to assertions about the technique, τ, and the technology, θ.

Several students, thirteen, explicitly state and develop either that it is good that there is a reference to a theorem in the solution, or that there should be such a reference. Approximately an equal portion in each achievement level belongs to this group – L 3, I 3, H 7. This type of rationale connects to the students' concept of the techniques τ relevant for the exam (and the type of tasks they recognise), that is that a technique should include a reference to the technology (theorem) that is supposed to support or validate it.

Similarly, also nearly half of the students (L 2, I 2, H 4), do not specifically declare that there should be any reference to a theorem, yet that the answer(s) are not satisfactory and needs more explaining in order to be complete. As an additional feature of this approach, some students stress that they solely find explanations and some reasoning in a solution, but no proof or proving. For example, on the graphic solution to part b of task C (cf. above) one student argues:

> Student_7: yes but I am not really… part B does not feel quite motivating that there are infinitely many solutions… there is just a function that shows

six points… but of course one understands that that there will be infinite but it does not really feel like a proof

This can be seen as an intermediate stage of the technological discourse: explaining the technique used even if it does not justify it formally. Four of the higher achieving, two of the intermediate and none of the lower achieving students, uphold this.

Moreover, four students, split evenly into low and high achieving students, state that points would be awarded for a solution where the student shows that he/she has understood, despite the fact that he/she has not proved it.

Yet another aspect in regards to which some four of the students comment that points should be deducted, is the use of approximations for e or π, which is done in the solution provided for B1:

$$\left[\textit{One graph showing } y = \mathrm{e}^x \textit{, another graph depicting the cylinder} \right]$$

$$\textit{You get a cylinder } \min\textit{us an "inner" rotation volume.}$$

$$\textit{The volum of the cylinder} = \pi \cdot 1^2 \cdot (\mathrm{e}-1) = 3.14 \cdot 1.72 = 5.40$$

$$\textit{"Inner" volume} = \pi \int_1^{\mathrm{e}} x^2 dy$$

$$y = \mathrm{e}^x \quad \textit{gives} \quad x = \ln y \quad \textit{so you get}$$

$$\pi \int_1^{\mathrm{e}} (\ln y)^2 \, \mathrm{d}y \underset{P.I.}{=} \pi \left[y \cdot (\ln y)^2 \right]_1^{\mathrm{e}} - \pi \int_1^{\mathrm{e}} y \cdot 2 \ln y \cdot \frac{1}{y} \mathrm{d}y =$$

$$\pi \cdot (\mathrm{e} - 0) - \pi \cdot \int_1^{\mathrm{e}} 2 \ln y \, \mathrm{d}y =$$

$$\pi \cdot \mathrm{e} - 2\pi \left[y \cdot \ln y - y \right]_1^{\mathrm{e}} =$$

$$3.14 \cdot 2.97 - 6.28 \cdot (\mathrm{e} - \mathrm{e} + 1) = 2.26$$

$$\textit{Volume requested} = 5.40 - 2.26 = \underline{\underline{3.14 \, v.u.}}$$

One student (I) expresses this the following way:

Student_8: it is difficult for me to say if this is correct but but I think it is very odd that one has written out the numbers like this… one should stick to different… like writing *e* and not…

Interviewer: insert values you mean

> Student_8: yes insert values so that that it remains exact because it will not stay exact any more since pi is not three point fourteen that is there are infinitely many decimals
>
> Interviewer: mhm
>
> Student_8: so it could have become very wrong along the way here

These students are evenly distributed in the achievement levels (L 1, I 1, H 2) and could be argued to deal with aspects of what associated techniques τ are acceptable in the type of tasks that appear in the exams.

There are relatively few students who remark or acknowledge this rather straightforward issue. Possibly it can be understood in connection to the students' assertions about the importance of showing that you have understood the problem and solution, however much it may lack in formality and correctness. Conceivably the students do not regard these approximations to be important nor striking as so few comment on it, while all of them reasonably should know that this is done. Nevertheless, a considerable group explicitly state that they regard calculations to be the secure way of justifying a solution, of which approximations of this kind is an obvious part.

Further, one fourth of the students pronounce uncertainty at what level of detail and precision the solutions are required to be. However this is not done by any of the lower achieving students, except for one in the intermediate group, but by all in the higher achieving. The accuracy required can be connected to the techniques, but it should be noted that even though these students raise the issue of detail and precision displaying uncertainty in the matter, it still signals that these higher achieving students are aware of the aspect and that it may come into play in solving the tasks, and thus the techniques required.

5. Conclusion

In conclusion, the analysis of the interviews indicates that there are some differences between the students' assertions/conjectures about the exam items. Lower achieving students in this study do not show that they access the praxeologies at hand, since they merely *speak* of the mathematics content, but rather focus on the form, namely requiring the expression *Answer: ...* and considering the appearance of graphs in a solution as good and sufficient. In contrast, the higher achieving students maintain that for example graphs call for comments and justifications in order to be conducive to a satisfying solution. However, the students have in common that they pronounce the role and importance of referring to and using theorems in solutions, hence suggesting their conception of techniques, τ, with these tasks. Notwithstanding, the not so negligible feature put forward by a few of the students, that credits were to be given a solution even if it was not a proof, yet showed that the student had understood the task and content.

It would be interesting to further analyse the same students', firstly, the same interview excerpts, yet with specific praxeologies for each exam question, and secondly, with similar exam tasks at a later stage in their undergraduate mathematics studies, in order to inquire into what patterns appear and how the students have developed.

References

Bergqvist, E. (2006). *Mathematics and mathematics education: two sides of the same coin. Some results on positive currents related to polynomial convexity and creative reasoning in university exams in mathematics*. (Doctoral dissertation). Umeå University, Sweden.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *19*(2), 221-266.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. Écologie & régulation. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Eds.), *Actes de la 11^e^ école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 41-56). Grenoble: La pensée sauvage.

Gueudet, G. (2008). Investigating the secondary-tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics*, *67*, 237-254.

Hellström, L., Morander, S. & Tengstrand, A. (1991). *Envariabelanalys*. Lund, Sweden: Studentlitteratur.

Hyltén-Cavallius, C. & Sandgren, L. (1956). *Matematisk analys för nybörjarstadiet vid universitet och högskolor*. Lund, Sweden: Lunds studentkårs intressebyrå.

Jablonka, E., Ashjari, H. & Bergsten, C. (2012). Recognising knowledge criteria in undergraduate mathematics education. In C. Bergsten, E.

Jablonka & M. Raman (Eds.), *Evaluation and comparison of mathematical achievement* (pp. 101-110). Linköping, Sweden: SMDF.

Lennerstad, H. (2002). *Envariabelanalys med dialoger*. Göteborg, Sweden: Bokförlaget Kärret.

Tengstrand, A. (1994). *Analys för ingenjörsutbildningar*. Lund, Sweden: Studentlitteratur.

Winsløw, C. (2015). Mathematics at university: The anthropological approach. In S. J. Cho (Ed.), *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 859-875). Springer.

Le théorème des accroissements finis comme question curriculaire

Jean-Pierre Bourgade

Institut National Polytechnique de Toulouse, France

Abstract. Beyond the difficulty to give true practical motives to introduce a theorem, the didactic transposition of scholarly knowledge in a school setting often leads to freezing a technical tool into a theorem given under minimal assumptions. Probably whole categories of exercises have no other justification than establishing the necessity of introducing a theorem *under minimal assumptions* in a curriculum. The mean value theorem represents a paradigmatic situation, showing not only the expectations of the curriculum writers, but also part of the school unconscious that manifests itself in the very notion of *rigor*.

Resumen. Más allá de la dificultad para proponer verdaderas motivaciones prácticas para la introducción de un teorema, la transposición didáctica de un saber sabio en el ámbito escolar lleva a menudo a fijar una herramienta técnica en un teorema enunciado bajo hipótesis mínimas. Ciertas categorías de ejercicios probablemente no tienen más justificación que la de establecer la necesidad de introducir en el currículo un teorema *bajo sus hipótesis mínimas*. El teorema del valor medio constituye una situación paradigmática que permite observar no solo las expectativas de los autores del currículo sino también una parte del inconsciente escolar que se manifiesta en la noción de *rigor*.

Résumé. Outre la difficulté à proposer de réelles motivations pratiques pour l'introduction d'un théorème, la transposition didactique d'un savoir savant dans le cadre scolaire conduit souvent à figer un outil technique en théorème énoncé sous des hypothèses minimales. Des catégories entières d'exercices n'ont probablement pas d'autre raison d'être que de justifier la présence au programme d'un théorème *sous ses hypothèses minimales*. Le théorème des accroissements finis constitue une situation paradigmatique pour observer non seulement les attentes des rédacteurs d'un programme d'enseignement, mais également une partie de l'inconscient d'école qui se manifeste dans la notion même de *rigueur*.

IV[e] congrès international sur la TAD (Toulouse, 21-26 avril 2013)

Axe 2. *L'analyse praxéologique comme outil de l'analyse et de l'ingénierie didactiques*

Bourgade, J.-P. (2017). Le théorème des accroissements finis comme question curriculaire. Dans G. Cirade et al. (Éds), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* (pp. 221-245). https://citad4.sciencesconf.org

1. La rigueur et l’invention

Les mathématiques sont souvent perçues comme un domaine aride où règne « la rigueur », c’est-à-dire une police de la pensée et de l’expression qui rejette les arguments invalides, les expressions floues, les calculs inexacts. Cette perception n’est pas nécessairement celle qu’en ont les mathématiciens eux-mêmes qui peuvent mettre en avant le rôle de l’imagination, de l’inventivité, du flou, du hasard dans la construction de leurs idées. La notion de théorème est, elle aussi, fortement attachée à l’idée qu’on se fait des mathématiques et les premiers théorèmes rencontrés structurent fortement l’image que l’on se fait de cette notion : le théorème de Pythagore *s’applique* à des triangles pour autant que certaines *hypothèses* soient satisfaites. En général, le théorème de Pythagore est énoncé sous ses *hypothèses minimales* (on considère un triangle rectangle, mais on ne précise pas s’il est isocèle ou non – pourtant le théorème reste vrai sous l’hypothèse plus forte d’un triangle rectangle isocèle) et tout le monde en est satisfait car cela permet de l’appliquer à un plus grand nombre de situations que si les hypothèses étaient plus difficiles à satisfaire (il est plus rare de rencontrer un triangle rectangle isocèle qu’un triangle rectangle quelconque). Une autre caractéristique des théorèmes est qu’ils sont démontrés *rigoureusement*, et que leur utilisation (correcte) permet à son tour de parvenir à des *conclusions* certaines de façon rigoureuse. Pourtant, un théorème n’est qu’un point saillant dans une branche de l’activité humaine et la réalité conduit à des adaptations qui ne se fondent pas aisément dans le moule de cette rigueur schématique. La notion de triangle rectangle n’est qu’un modèle, on peut espérer appliquer le théorème de Pythagore à des triangles à peu près rectangles et estimer l’erreur commise. Ce type de pratiques est pratiquement inexistant à l’école, y compris dans les lieux où se forment les futurs ingénieurs français (principalement les classes préparatoires aux grandes écoles, CPGE, qui accueillent des étudiants âgés de 18 à 20 ans environ avant leur accession sur concours aux écoles d’ingénieur), où la rigueur reste perçue comme un canon, contraignant pour certains, plaisant pour d’autres, mais en tous cas jamais remis en question.

À l’instar du théorème de Pythagore, le théorème des accroissements finis (TAF) est un outil central, à la fois théoriquement et technologiquement puisqu’il permet non seulement de démontrer d’autres théorèmes mais aussi de fonder des techniques de calcul approché en contrôlant leur précision. Ce type de résultat offre les conditions idéales pour observer *in vivo* la lutte qui oppose les idéaltypes de la rigueur et de l'imagination. Le TAF est actuellement au programme des CPGE scientifiques françaises, présenté sous ses hypothèses minimales. Cette situation présente cependant une délicatesse qui n'apparaît pas dans le cas du théorème de Pythagore : il est facile de trouver des triangles rectangles non isocèles, c'est-à-dire des triangles qui satisfont les hypothèses minimales du théorème de Pythagore *sans plus,* alors qu'il est pratiquement impossible de rencontrer (dans des contextes pertinents d'un point de vue pratique) des objets (en l'occurrence des fonctions) qui remplissent *sans plus* les conditions de validité minimales du TAF. Cette situation, assez courante en analyse, conduit à une tension forte entre deux contraintes liées à l'enseignement en CPGE : le désir de rigueur conduit à énoncer le théorème sous ses hypothèses minimales et à le démontrer dans ce cadre, de façon à maximiser la généralité d'application du théorème ; par ailleurs, les applications réalistes du théorème – ses raisons d'être, au sens de la théorie anthropologique du didactique (TAD) – ne font appel qu'à des conditions de validité moins larges et ne légitiment donc pas pleinement la nécessité d'énoncer le TAF sous ses hypothèses minimales. Cela conduit à deux types de pratiques opposées, qui ne font qu'exprimer de façons différentes la même tension. D'une part apparaissent des exercices « théoriques » dont l'objectif est de faire démontrer un résultat général, valable pour une classe d'objets (de fonctions) très vaste et caractérisée de façon *ad hoc* par le fait que ses objets satisfont *sans plus* les conditions minimales de validité du TAF. Ils ne font que déplacer le problème de la recherche des raisons d'être des hypothèses minimales du TAF : où sont les raisons d'être de ces exercices ? D'autre part, les exercices qui correspondent aux situations réalistes d'utilisation du TAF peuvent être traités sans faire appel aux conditions minimales de validité de ce théorème, mais la présence explicite au programme des CPGE du théorème sous ses hypothèses minimales contraint les enseignants, les étudiants, les rédacteurs de manuels à calquer leurs attentes sur le modèle suivant : « qui peut le plus peut le moins, mais il faudra bien veiller à s'assurer dans chaque cas que qui peut le plus peut effectivement le moins ». La situation est comparable à celle d'un monde où la plupart des triangles seraient rectangles isocèles, et où on persisterait à énoncer le théorème de Pythagore pour les triangles rectangles quelconques tout en demandant aux étudiants de bien vérifier en chaque cas que tel triangle rectangle isocèle est bien, en outre, un triangle rectangle (non nécessairement isocèle). Dans le cas du TAF, cette exigence est souvent vécue comme une exigence de rigueur, par les enseignants comme par les étudiants.

Une autre utilité est avancée pour justifier la présence au programme du TAF sous ses hypothèses minimales : il permet de démontrer rigoureusement d'autres théorèmes fondamentaux. De nombreuses voix se sont élevées pour critiquer ce point de vue et plusieurs propositions ont été faites pour donner d'autres démonstrations plus directes des résultats en question, sans faire appel au TAF. On arrive donc à une situation paradoxale, où quasiment rien ne plaide pour la persistance au programme d'un théorème énoncé sous ses hypothèses minimales, mais où il demeure malgré tout, défendu avec force par beaucoup d'enseignants et de noosphériens. Cette survie d'un savoir moribond montre bien qu'il n'y a pas, en matière curriculaire, de force intrinsèque de l'idée vraie, ou bien qu'à cette force s'opposent d'autres forces de réaction (dans tous les sens du terme), relevant d'un registre plus sociologique que logique.

L'objectif de cette communication est d'essayer de rendre compte de ces forces, afin de produire une explication de la persistance dans le curriculum d'un théorème faiblement motivé. L'étude historique de l'émergence du TAF vu comme un résultat théorique qui permettait de fonder l'analyse, non seulement en tant que branche des mathématiques, mais surtout en tant que champ scientifique fortement intégré au sens de la théorie des champs de Pierre Bourdieu (2001), l'observation de la transposition progressive de ce savoir savant en un savoir scolaire, permettent de comprendre la place symbolique qui est faite à la notion de rigueur dans un modèle d'enseignement centré sur le monumentalisme. En particulier, nous conjecturons que le fait que le TAF donne lieu à des séries d'exercices permettant un traitement algorithmique du raisonnement fournit à l'enseignant des moyens techniques d'évaluer « la rigueur » de ses étudiants et, en retour, *d'imposer comme légitime* une certaine vision de la rigueur.

2. Lente émergence d'un résultat « théorique »

Au XVII^e siècle, l'un des opposants les plus ardents à l'analyse naissante, Michel Rolle, élabore une technique de localisation et comptage des racines réelles de polynômes, la « méthode des cascades ». Cette méthode affirme que les racines d'un polynôme sont séparées par les racines de son polynôme dérivé (sa « cascade ») et l'itération de ce procédé permet de localiser grossièrement les racines. La praxéologie construite par M. Rolle dans son *Traité d'Algèbre* (1690) est vivement critiquée faute d'une technologie complète, ce qui conduit M. Rolle à publier une *Démonstration d'une méthode pour résoudre les égalitez de tous les degrez* (1691), démonstration purement algébrique d'un résultat qui ne porte que sur les polynômes (pour une exposition plus détaillée de la méthode des cascades voir David E. Smith, 1984, pp. 253-260 et Julius Shain, 1937).

Il faut attendre le XIX^e siècle pour voir renaître le résultat de M. Rolle sous la forme d'un résultat d'analyse. L'émergence du théorème de Rolle sous ses hypothèses minimales [1] apparaît comme une réponse à un problème différent du type de tâches considéré par M. Rolle : comment justifier aussi complètement que possible (sachant que ce possible n'était pas connu avant d'être réalisé) les pratiques des mathématiciens en analyse au moyen de raisonnements fondés sur des résultats eux-mêmes déjà démontrés ou admis pour vrais (axiomes) ? Cet aspect de l'histoire de l'analyse montre le lien consubstantiel qui se crée progressivement entre l'exigence de rigueur et la minimalité des hypothèses d'un théorème. On est pourtant encore bien loin de la rigueur pour la rigueur comme en témoigne Jules Tannery cité par Hélène Gispert-Sambaz (1982) :

> On peut raisonner fort bien et fort longtemps sans avancer d'un pas, la rigueur n'empêche pas un raisonnement d'être inutile […]. S'imagine-t-on, par exemple les inventeurs du calcul différentiel s'acharnant avant d'aller plus loin, sur les notions de dérivée et d'intégrale définie ? Ne valait-il pas mieux montrer la fécondité de ces notions, dont l'importance justifie le soin qu'on a mis à les éclaircir ? Cette révision même, qu'on a faite de notre

1. Si f est une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a, b[$, telle que $f(a) = f(b)$, alors il existe un point c situé dans l'intervalle $]a,b[$ en lequel $f'(c) = 0$. En particulier, si une fonction possède deux racines, elles sont séparées par une racine de sa dérivée, ce qui est au cœur de la méthode des cascades de Rolle.

> temps, l'aurait-on entreprise, sans les questions que l'étude des fonctions et particulièrement des séries trigonométriques a posées d'une manière inévitable ? (p. 36)

On voit que la rigueur n'a émergé en analyse que poussée, d'une manière inévitable, par l'étude de questions. Dans un deuxième temps, sans doute en lien avec l'exaspération des élèves allemands de Karl Weierstrass de n'être pas compris par leurs collègues (Gispert-Sambaz, 1982, p. 33), puis sous l'impulsion de Ulisse Dini, qui voit dans l'approche de K. Weierstrass une confirmation de ses propres doutes (Gispert-Sambaz, 1982, p. 30), et aussi de Gaston Darboux (Gispert-Sambaz, 1982, p. 67 sq.) qui constate l'indigence de la plupart des traités d'analyse français, paraissent en Europe des traités d'analyse reprenant les idées de K. Weierstrass (dus à U. Dini, Camille Jordan, Carl Harnack, Paul du Bois Reymond, Otto Stoltz, etc.). À compter de ce moment, la raison d'être de ce surcroît de « rigueur » n'est plus seulement de donner des réponses à des questions pratiques (sur les séries de Fourier, etc.), mais aussi et surtout de proposer un exposé clair et *self-consistent* de l'analyse à l'usage des nouveaux entrants dans le champ des mathématiques, ou dans le champ récemment renouvelé de l'analyse, pour lequel les nouveaux entrants peuvent être des mathématiciens déjà aguerris[2]. Si la volonté de faire école n'est pas toujours explicite, et si elle s'exprime surtout comme un désir de ménager une inter-intelligibilité pour les analystes, elle apparaît en creux chez les élèves allemands de K. Weierstrass et de façon plus explicite en Italie où la publication du traité de U. Dini fait de ce dernier le chef de file de la nouvelle école d'analyse italienne (Gispert-Sambaz, 1982, pp. 31-32). Le besoin de *faire corps* conduit à l'émergence de formes de justification communes qui autorisent la compréhension et donc aussi l'évaluation mutuelles des mathématiciens – même si cette tendance n'est pas homogène en Europe, elle est plus vive en Allemagne et en Italie qu'en France par exemple, où G. Darboux reste isolé comme le souligne H. Gispert-Sambaz (1982, pp. 67 *sq*.). Le théorème de Rolle et le TAF sont au cœur de ce processus puisque la *création* progressive du théorème de Rolle *sous ses hypothèses minimales* commence avec la démonstration du TAF au moyen du théorème de Rolle par Pierre-Ossian

2. Sur ces questions, voir P. Bourdieu (2001).

Bonnet (1844 ; voir aussi H. Gispert-Sambaz, 1982, p. 23) puis fait l'objet d'une intense discussion qui vise à effacer toute incertitude sur la démarche (imparfaite) de P.-O. Bonnet : G. Darboux, puis U. Dini améliorent la preuve de P.-O. Bonnet et le mouvement s'achève lorsque Hermann Schwarz déduit du TAF le principe de Lagrange[3] pour la première fois sans supposer la continuité de la dérivée. C'est donc par un hasard historique que le théorème de Rolle et le TAF se trouvent placés au cœur de « *la seule* exposition rigoureuse et simple du calcul différentiel » (Darboux, cité par Gispert-Sambaz, 1982, p. 24 ; c'est nous soulignons). Cette illusion (puisque c'en est une) perdure longtemps et explique largement la persistance de ces théorèmes aux programmes de l'enseignement secondaire et supérieur.

Les programmes de 1905 de terminale C (élèves de 17 ans, dominante scientifique) précisent sans ambiguïté que « le professeur laissera de côté toutes les questions subtiles que soulève une exposition *rigoureuse* de la théorie des dérivées » ainsi que le note Jean-Pierre Daubelcour (2009 ; c'est nous qui soulignons). Le programme de 1962 de cette même classe, qui cherche plus de rigueur dans l'exposé de la théorie de la dérivation, inscrit pour la première fois au programme le théorème de Rolle (admis) et le TAF (démontré à partir du théorème de Rolle et dont on déduit le principe de Lagrange). L'arrivée du TAF coïncide avec la création d'une rubrique « Analyse » dans le programme de 1962 : auparavant, l'étude des fonctions dérivables était intégrée dans la partie « Algèbre » du programme ; on peut voir ici une lointaine réplique du tremblement de terre que constitue l'émergence de l'analyse comme sous-champ autonome du champ mathématique. Pourtant la raison d'être principale de l'introduction du TAF dans les ouvrages savants du XIXe siècle, le besoin d'unifier un langage et des pratiques, se sont perdus. Ici, la structure même du champ scolaire fait qu'il n'y a aucune attente du public, parents d'élèves et élèves, à cet égard : ils font une confiance toute contractuelle au bien-fondé du savoir enseigné. On assiste alors à un glissement fonctionnel qui va conduire peu à peu à vider l'exigence de rigueur de son sens initial pour conduire à la conception (implicite) actuelle de la notion de rigueur.

3. Le principe de Lagrange affirme que toute fonction dont la dérivée est constamment positive sur un intervalle est croissante.

Ainsi, comme le souligne J.-P. Daubelcour (2009), avec l'apparition du théorème de Rolle « une phase déductive très formatrice [devient] possible […] : la démonstration du théorème des accroissements finis accompagné de son interprétation géométrique, permet la démonstration du principe de Lagrange » (p. 117). La possibilité de démontrer quelque chose devient une des raisons d'être de l'inscription du TAF au programme.

Par la suite le TAF disparaît du programme avec la réforme de 1971, dite des « mathématiques modernes », le principe de Lagrange étant admis dès la classe de 1re. Pourtant, le TAF réapparaît en 1983, mais afin d'en déduire l'inégalité des accroissements finis (IAF) et non le principe de Lagrange qui reste admis en classe de 1re. Enfin, à partir de 1986, le TAF disparaît définitivement, même si l'IAF perdure au programme jusqu'à la fin du XXe siècle. On voit que l'objectif est de recentrer le programme sur les aspects quantitatifs : « majorations, encadrements, vitesse de convergence, approximation à une précision donnée » (Ministère de l'Éducation nationale [MEN], 1986), quitte à minorer la part de justification théorique des techniques en question. Le programme de 1983 précisait déjà que « dans les énoncés et les démonstrations on continuera de se placer dans des hypothèses de bonne sécurité sans en rechercher de plus fines ». Le but n'est donc plus de « fonder l'analyse » et les exercices proposés dans les manuels correspondent à ces objectifs. Le désir fondationnel deviendra l'apanage de l'enseignement supérieur : le théorème de Rolle, le TAF ainsi que leur démonstration sont au programme des CPGE scientifiques en 1984 et leur utilisation dans la plupart des manuels reproduit l'ambiguïté essentielle du rôle que joue le TAF. On retrouve, d'une part, la tentation théoriciste avec des exercices faisant appel aux hypothèses minimales ; et, d'autre part, des exercices mettant en valeur les « aspects quantitatifs », du type « majorer, minorer, estimer une erreur ».

3. Le TAF et ses usages en CPGE

Le TAF est généralement énoncé pour des fonctions définies sur un intervalle borné de la forme $[a, b]$. On suppose qu'une certaine fonction f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Le TAF affirme qu'il existe alors un point noté c, contenu dans l'intervalle $]a, b[$, tel que $f'(c) = (f(a) - f(b))/(b - a)$. Le programme indique l'interprétation géométrique suivante : la pente moyenne d'une courbe entre ses extrémités est égale à la pente de la courbe en au moins un point ; ainsi que l'interprétation cinématique suivante : la vitesse moyenne d'un mobile entre deux instants est égale à la vitesse instantanée du mobile à un instant au moins. Les deux interprétations sont trompeuses car elles ne correspondent pas réellement aux hypothèses minimales du théorème : ainsi, les variations de vitesses d'un mobile ne peuvent être trop fortes sous peine de destruction du mobile. Le théorème sous ses hypothèses minimales n'est donc pas adapté aux tâches de modélisation. Pourtant, le TAF fait l'objet du commentaire suivant dans les programmes des CPGE Mathématiques, Physique et Sciences de l'Ingénieur (MPSI) publiés en 2003 : « Pour le théorème de Rolle, l'égalité et l'inégalité des accroissements finis, ainsi que pour la caractérisation des fonctions monotones, on suppose f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. » (MEN, 2003)

L'émergence historique du TAF sous ses hypothèses minimales permet de comprendre l'insistance du programme sur ce point : le but est de permettre « enfin » la démonstration du principe de Lagrange, admis et utilisé depuis la classe de 1re. On fait généralement deux types d'objections à un tel point de vue. La première, classique et avancée par exemple par Jean Dieudonné (1969, p. 148), Ralph Boas (1981), Thomas W. Tucker (1997), Jean-Louis Ovaert et Jean-Luc Verley (1983, p. 147), Christian Houzel (1996, p. 8), consiste à remarquer que, de toutes façons, l'*égalité* des accroissements finis n'apporte qu'une précision illusoire puisque la démonstration du TAF n'est pas constructive et ne permet pas de localiser le point c. L'IAF suffit à la démonstration du principe de Lagrange. Certains, comme T. W. Tucker (1997), prolongent la critique en remarquant qu'il est choquant de « assum[e] the nonobvious [c.-à-d. l'IAF] to prove the obvious [le principe de Lagrange] » (p. 231), critique que Henri Lombardi (1999) reprend avant de souligner que ce type d'arguments passe à côté de l'essentiel : « on ne devrait jamais démontrer le théorème des accroissements finis […] en tant que preuve d'une chose évidente, mais en tant que vérification de l'adéquation d'un modèle mathématique à la réalité qu'il veut représenter » (p. 56). Bien sûr, ce point de vue qui pourrait donner une légitimité au TAF n'est pas adopté en CPGE, où la question de la modélisation n'est jamais abordée frontalement malgré les vœux pieux que l'on trouve ici ou là dans les programmes et qui sont aussitôt contredits par l'utilisation très significative des notions d'*interprétation* et d'*application*. En outre, H. Lombardi souligne à juste titre que, du point de vue de la modélisation, l'hypothèse de dérivabilité est beaucoup trop générale (essentiellement : la vitesse d'un mobile ne peut pas être une dérivée « générique ») et qu'on pourrait donc se contenter de versions beaucoup plus faibles du TAF (Lombardi, 1999, p. 63).

4. Illustration de l'applicationnisme

La justification de la présence du TAF par la nécessité de démontrer le principe de Lagrange se réduit au fond au propos de J.-P. Daubelcour (2009) sur les « phases déductives très formatrices » : si le programme impose l'étude du TAF sous ses hypothèses minimales, c'est probablement au nom de la mise en œuvre de raisonnements « formateurs » que cette situation rend possibles. Le programme place la classe dans une problématique interventionniste : on est conduit à explorer l'ensemble $\{\Pi \,/\, \Im\,(\wp, \Pi, U\}$ des projets Π (c'est-à-dire, finalement, des études d'exercices) de l'instance *U* (les élèves) pour lesquels il est utile ou indispensable de disposer d'une praxéologie $\wp$ qui reste à préciser mais qui semble condamnée par le programme à tourner autour du TAF sous ses hypothèses minimales, ce qui pose des difficultés importantes.

D'une part, il faut trouver des exercices où le théorème sous ses hypothèses minimales est utile, voire indispensable. On assiste alors à une prolifération d'exercices où l'utilité du théorème n'est même plus à prouver puisque les situations sont créées pour éviter le problème de la recherche des raisons d'être. Ce sont tous les exercices dont l'énoncé commence par « Soit une fonction continue sur [*a*, *b*], dérivable sur]*a*, *b*[telle que... ». On trouvera une série d'exemples dans le manuel de Jean-Marie Monier (1999) qui explicite ainsi les « raisons d'être » du théorème de Rolle dans le programme des classes préparatoires :

> Pour établir une propriété du type « il existe c ∈]a, b[tel que... », la fin de la propriété faisant intervenir une dérivée, on peut essayer :
>
> – d'appliquer le théorème de Rolle ou le théorème des accroissements finis, une ou plusieurs fois […],

– de construire un réel A et une fonction auxiliaire φ en s'inspirant de la preuve du théorème des accroissements finis […]. (p. 141)

D'autre part, les exercices où le théorème pourrait s'appliquer sans qu'il soit nécessaire de l'invoquer sous ses hypothèses minimales sont peu ou prou exclus *a priori* du fait qu'ils ne font pas apparaître comme particulièrement utile ni indispensable l'utilisation du théorème *sous ses hypothèses minimales*. Or les situations concrètes qui donnent ses raisons d'être à un résultat comme l'IAF (étude de systèmes dynamiques par exemple) tombent dans cette catégorie. Bien entendu, en pratique, on contourne la difficulté en étudiant ce type d'exercices malgré tout, mais l'injonction du commentaire du programme de MPSI conduit à faire comme si le théorème, sous ses hypothèses minimales, était utile ou indispensable dans des cas où il ne l'est peut-être pas.

Il apparaît donc qu'un théorème comme le théorème de Rolle, autrefois fonctionnellement motivé, a perdu ses raisons d'être pratiques pour devenir un lemme qui trouve son insertion naturelle dans une construction axiomatique possible de l'analyse moderne, puis un point de départ pour de possibles « phases déductives formatrices » pour les étudiants. Il reste à préciser la fonction de ce rôle que jouent actuellement le TAF et le théorème de Rolle en CPGE. L'analyse menée par Yves Chevallard (1991) dans un contexte différent peut donner une piste :

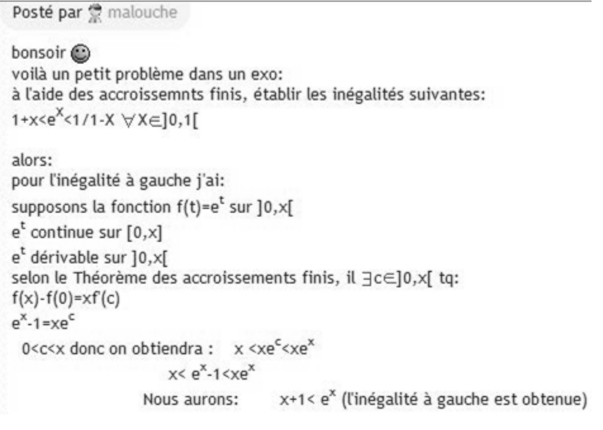
… il existe un contrat-type à propos du « comment travailler ? ». L'élève est en effet censé « apprendre ses leçons et faire ses exercices » […] le professeur sera, lui, en principe inattaquable dès lors qu'il aura mis entre les mains de l'élève ce qui permettra à celui-ci d'accomplir son devoir d'élève : des leçons à apprendre, des exercices à faire. (pp. 176-177)

Si on entre dans les détails :

… il existe des cas où apprenabilité et faisabilité sont *ultra-légitimes* : il s'agit des leçons pour lesquelles « apprendre » signifie « apprendre un texte », par exemple « apprendre des définitions » ; et des exercices pour lesquels « faire » signifie « faire usage d'un algorithme (de calcul) ». (Chevallard, 1991, p. 177)

À l'instar de la notion de distance en classe de 4^{e} dans la réforme des mathématiques modernes – élèves de 13-14 ans – mais aussi des développements limités, ou des définitions axiomatisées des normes, des produits scalaires, ou encore des définitions « epsiloniques » des limites dans l'enseignement supérieur, les théorèmes comme le théorème de Rolle et le TAF constituent des morceaux de choix. En effet, ils proposent un texte à apprendre précisément (l'énoncé du théorème et en particulier ses hypothèses, forcément minimales puisqu'un accord intersubjectif doit se faire sur ce qui est à apprendre), à savoir restituer, par exemple dans le cadre d'une « question de cours ». Ils donnent également l'occasion d'une pratique algorithmique qu'illustrent bien les conseils de J.-M. Monier cités précédemment : dans un sens étendu du mot, il y a calcul dès lors qu'on doit appliquer le théorème de Rolle ou le TAF puisqu'une certaine procédure réglée, assortie d'étapes systématiques (vérifier que la fonction est bien continue sur un segment, dérivable à l'intérieur du segment, vérifier l'égalité des valeurs de la fonction aux bornes du segment – pour le théorème de Rolle –, calculer le taux d'accroissement de la fonction aux bornes de l'intervalle – pour le TAF) est nécessaire pour appliquer le théorème, si bien que même si le résultat visé n'est pas atteint, l'expert pourra reconnaître le respect scrupuleux d'un algorithme chez un élève s'étant conformé au contrat, ou au contraire s'indigner que tel élève n'ait « même pas su faire ça » alors qu'il « suffit d'apprendre par cœur ».

Les conséquences les plus évidentes de ce phénomène sont lisibles dans les copies d'étudiants ou sur les forums (voir figure 1 pour un exemple [4]).


Posté par malouche

bonsoir
voilà un petit problème dans un exo:
à l'aide des accroissemnts finis, établir les inégalités suivantes:
$1+x<e^X<1/1-X$ $\forall X\in]0,1[$

alors:
pour l'inégalité à gauche j'ai:
supposons la fonction $f(t)=e^t$ sur $]0,x[$
e^t continue sur $[0,x]$
e^t dérivable sur $]0,x[$
selon le Théorème des accroissements finis, il $\exists c\in]0,x[$ tq:
$f(x)-f(0)=xf'(c)$
$e^x-1=xe^c$
$0<c<x$ donc on obtiendra : $x<xe^c<xe^x$
$x<e^x-1<xe^x$
Nous aurons: $x+1<e^x$ (l'inégalité à gauche est obtenue)

Figure 1. Exemple d'utilisation du TAF.

4. Exemple accessible à l'adresse http://www.ilemaths.net/forum-sujet-478832.html.

La sacralisation des conditions de validité du théorème est patente : il est indispensable de préciser que la fonction exponentielle est dérivable sur l'ouvert]0, 1[. Quelle fonction remplit une telle insistance dans la rédaction d'une solution (dont on peut supposer qu'elle sera reproduite dans un devoir à rendre, en examen, etc.) ? L'objectif inconscient est probablement d'envoyer un signal au lecteur du forum tout comme, le cas échéant, à l'enseignant-évaluateur : « Je connais les hypothèses du théorème et vous ne pouvez donc pas me sanctionner sur ce point ». Voici donc une première conséquence : les étudiants sont conduits à écrire, à souligner, à mettre en avant des propos qui n'ont pas de pertinence en soi. Par ailleurs, soulignons sur cet exemple l'algorithmisation en œuvre dans la présentation du raisonnement : l'ordre et la nature des étapes sont parfaitement codifiés.

Si l'on se demande d'où peut venir une telle propension des étudiants, on trouvera la réponse dans l'exemple de corrections d'exercices[5] donné en figure 2.

Soit $f(y) = \ln(y)$. La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $f'(y) = \frac{1}{y}$, qui est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$. Soit $x > 0$. On applique le théorème des accroissements finis sur $[x, x+1]$ (f y est continue, et dérivable sur $]x, x+1[$). Il existe $c \in]x, x+1[$ tel que $f(x+1) - f(x) = (x+1-x)f'(c) = f'(c)$. Donc

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}.$$

Figure 2. Un exemple de correction d'exercice par un enseignant.

Dans l'esprit même de l'enseignant – et donc probablement dans l'impensé professoral en général puisque ce qui est visé ici n'est pas la pratique de tel ou tel professeur, mais plutôt ce qui s'exprime à travers elle d'un *habitus* professionnel –, l'important, ce sont « les hypothèses », qu'il s'agit de bien « vérifier » avant « d'appliquer » le théorème. Pourquoi un enseignant, connaisseur et praticien des mathématiques, se sent-il obligé de préciser que la fonction logarithme est dérivable sur l'ouvert $]x, x + 1[$? Pourquoi ne se contente-t-il pas de dire qu'elle est indéfiniment dérivable sur $]0, +\infty[$ et qu'elle vérifie donc la propriété des accroissements finis ? Sans doute parce qu'il n'existe rien de tel qu'une propriété des accroissements finis dans la culture scolaire. Ce qui existe, et fortement, c'est un théorème, assorti de ses « hypothèses ». Nous avons vu comment le théorème s'est peu à peu figé

5. http://armana.perso.math.cnrs.fr/enseignement-archives/200708-lm110/lm110-td4-correction.pdf.

avec ses hypothèses minimales : à ce stade, il devient indispensable d'invoquer ces hypothèses au moment d'utiliser le théorème.

Il est difficile de ne pas voir ici une illustration de « l'enfermement dans les questions évaluables » qu'ont mis en évidence Verónica E. Parra et María R. Otero (2011) dans le cadre des universités argentines. On peut en effet se demander si l'une des raisons d'être principales de la présence du TAF et des exercices que nous venons d'évoquer n'est pas qu'ils constituent une réponse à la question suivante : « comment évaluer la capacité des étudiants à appliquer un théorème donné ? ». Comme le notent Berta Barquero, Marianna Bosch et Josep Gascón (2007), « la necesidad de evaluar la eficacia de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en las instituciones didácticas […] tiende a provocar una diferenciación y autonomización interna del corpus enseñado, así como una mayor algoritmización del mismo con la consiguiente pérdida de sentido funcional del saber enseñado ». Ainsi, l'IAF disparaît au bénéfice du TAF qui se prête mieux à une algorithmisation et autorise la fabrication d'un type d'exercices *ad hoc* qui permet d'évaluer en retour la maîtrise de l'algorithme.

L'esprit applicationniste joue d'ailleurs un rôle important de ce point de vue puisqu'il représente une réalisation du processus d'algorithmisation de la pratique mathématique elle-même. En effet, comme tous les formalismes, il conduit à ignorer les raisons d'être des théorèmes introduits dans un curriculum en créant de façon artificielle des « situations de monopole technico-technologique » (là où plusieurs techniques pourraient être efficaces, il n'en maintient qu'une seule ; là où plusieurs justifications des techniques seraient envisageables, une seule survit) afin de promouvoir une vision algorithmique de la pratique mathématique : à toute situation problématique correspond une technique qu'il convient (et qu'on postule qu'il est possible) d'identifier par simple exploration systématique du bagage technique acquis en cours, puis qu'il convient d'appliquer en respectant un protocole fixé une fois pour toutes (vérifier que les conditions de validité du théorème sont respectées, etc.) avant de tirer la conclusion attendue et souvent explicitée dans l'énoncé même du problème. On notera que cette algorithmisation contribue à favoriser une approche rétrocognitive de l'enseignement.

Même si nous ne l'utilisons pas dans le contexte de la modélisation mathématique (pour les sciences expérimentales), le concept d'applicationnisme tel que nous le détaillons ici n'est probablement qu'un cas particulier de celui qu'ont proposé B. Barquero, M. Bosch et J. Gascón (2011) – un cas d'applicationnisme interne par opposition à l'applicationnisme externe qui mettrait en jeu une autre discipline à laquelle on « appliquerait » les mathématiques. Les caractéristiques de l'applicationnisme sont vérifiées ici aussi : « Las matemáticas se mantienen independientes de las otras disciplinas » (ce qui ferait office ici « d'autre discipline » c'est, par exemple dans le cas du théorème de Rolle, la question de la localisation des racines d'un polynôme) ; « La enseñanza de las matemáticas sigue la lógica deductivista » ; « proliferación de cuestiones aisladas » ; et surtout « La enseñanza de las herramientas matemáticas básicas siempre es anterior a su aplicación » (p. 558).

5. Évaluer le sacré

Paradoxalement, c'est lorsqu'il s'éloigne le plus d'une certaine vérité épistémologique concernant les praxéologies mathématiques effectives que l'« applicationnisme » contribue à renforcer une image largement partagée de ce que sont censés être le savoir et la pratique mathématiques. Par un évitement systématique de toutes les situations de modélisation (intra- ou extra-mathématique), l'enseignement classique des mathématiques organise une amnésie collective des laïcs comme des clercs (de la société, des enseignants, des étudiants, et même des chercheurs en mathématiques qui, selon une des ruses les plus fréquentes de l'intelligence, véhiculent des représentations de leur activité qui peuvent être largement en conflit avec la réalité de leur pratique) à propos de ce que faire des mathématiques veut dire : il ne s'agit plus de chercher à répondre « *by any means necessary* » à des questions qui se posent, et donc notamment, mais entre autres, par des moyens mathématiques, mais « d'apprendre les mathématiques », souvent au moyen d'un entraînement épuisant et privé de sens.

Ce qui naît alors, c'est une illusion sur ce qui fait le cœur de la pratique mathématique : la « rigueur mathématique » (Chevallard, 2011). À l'opposé des incertitudes liées à la pratique de la modélisation, dans laquelle on n'est jamais sûr d'avoir trouvé le bon modèle, ou plutôt dans laquelle on est assuré de n'avoir construit qu'un modèle, la pratique enseignante fondée sur la répétition d'exercices semblables articulés sur l'application de théorèmes, de techniques, etc., stéréotypés, donne corps au mythe d'une rigueur mathématique qui ferait consensus et qui se résumerait à :

– l'univocité des techniques mises en œuvre et l'unicité du résultat obtenu par leur application,

– la nécessité, au-delà de l'emploi de certaines techniques, d'organiser l'utilisation de ces techniques dans un discours lui-même fortement codifié, la codification du discours étant un des éléments indispensables pour garantir la rigueur du « raisonnement »,

– la spécificité du raisonnement mathématique (distingué du raisonnement du physicien, du chimiste, du sociologue, etc.), dépourvu d'ambiguïté, susceptible de vérifications quasi-automatiques,

– la transparence, la naturalité, l'intemporalité et l'ubiquité des principes de codification du raisonnement mathématique rigoureux.

On peut opposer à ces principes :

– qu'une même tâche mathématique (y compris un calcul) peut être réalisée de multiples façons (par exemple, un étudiant de terminale pourrait établir l'inégalité $e^x \geq x + 1$ en étudiant la fonction $f(x) = e^x - x - 1$, et donc sans faire appel au TAF),

– que, contre une certaine fétichisation du langage mathématique, il est possible de proposer des démonstrations valables en langue vulgaire, voire au moyen de dessins, comme le fait Roger B. Nelsen (1993),

– que tout raisonnement, toute pensée, toute expression est par essence potentiellement ambiguë et que, comme le souligne Ludwig Wittgenstein (2005), toute règle est en réalité interprétée et on ne saurait, sans risque de régression à l'infini, proposer de règle pour l'usage de la règle,

– que les canons mêmes de la rigueur telle que nous la connaissons sont très variables selon les époques (y compris chez Augustin Cauchy), les lieux, et même les moments (voir le relâchement de l'enseignant redevenu mathématicien qui s'autorise évidemment les raccourcis mêmes qu'il interdit à ses étudiants).

Néanmoins, cette vision de la rigueur mathématique et sa sacralisation sont sans doute à compter au nombre des contraintes majeures qui pèsent sur la possibilité d'un changement de paradigme scolaire. On peut y voir une des raisons d'être principales de la survie du théorème de Rolle dans le curriculum, auprès des définitions de la convergence (des suites, etc.), des définitions axiomatiques diverses (norme, produit scalaire, etc.), des théorèmes de convergence (des suites, des séries, des intégrales généralisées), etc. : il propose une situation idéaltypique où peut s'exprimer la virtuosité du mathématicien rigoureux : connaissance (par cœur) de définitions (ou d'hypothèses, etc.), vérification d'hypothèses (ou d'axiomes), application (à une situation particulière), algorithmisation possible de l'application (dans un cadre relativement large d'exercices possibles), etc. L'algorithmisation va de pair avec la possible codification de la rédaction (avec des étapes imposées, etc.) qui autorise en retour une évaluation facilitée du sacré : la rigueur qui est censée être l'essence de la pratique mathématique est à la fois l'objet d'une sacralisation (Chevallard, 2011), ce qui la rend impossible à évaluer car on ne peut évaluer que le profane, et le prototype de la compétence à acquérir – et donc à pouvoir être évaluée. Des exercices comme ceux qui abondent autour du théorème de Rolle permettent ce miracle en offrant des lieux restreints où la pratique peut être (presque) entièrement codifiée, autorisant par là même une évaluation de « la rigueur » *via* l'assimilation de la rigueur à la codification (dans les rapports des jurys des Concours Communs Polytechniques [6], l'attente de rigueur est souvent reliée explicitement d'une part, à la « vérification des hypothèses » et, d'autre part, aux « qualités de rédaction » ; on retrouve ces attentes dans la bouche des enseignants si l'on en croit par exemple cette contribution à un forum [7] sur internet : « Manquer de rigueur pour ma prof de maths c'est mal rédiger et ne pas assez développer son raisonnement »).

Du point de vue de la TAD, la construction de cours à travers des organisations didactiques *classiques*, selon la terminologie introduite par J. Gascón (2001) et M. Bosch et J. Gascón (2001), repose sur une valorisation exclusive des moments technologico-théorique et du travail de

6. Consultables à l'adresse suivante : http://ccp.scei-concours.fr/sccp.php?page=cpge/rapport/rapport_accueil_cpge.html&onglet=rapports.

7. Consulter : http://forums.futura-sciences.com/mathematiques-superieur/62830-gagner-rigueur-maths.html.

la technique, à l'exclusion de tout moment exploratoire notamment, et au prix d'une « trivialización de la actividad de resolución de problemas » et conduit à considérer que « la enseñanza de las matemáticas es un proceso mecánico totalmente controlable por el profesor » (Bosch & Gascón, 2001). L'absence de moment exploratoire conduit à un *évitement* des questions liées à l'évaluation des techniques utilisées dans la réalisation des types de tâches visés et en particulier à négliger la question fondamentale de la multiplicité possible des techniques. L'exemple de la figure 1 montre bien ce refus par la mention explicite « en utilisant le théorème des accroissements finis » qui, loin de constituer une indication en vue d'aider les étudiants, représente au contraire un signe fort d'*interdiction* de toute exploration du champ des techniques possibles. Par ailleurs, la *portée* des techniques n'est pas davantage étudiée et l'insistance sur la minimalité des hypothèses relève d'un discours de type sécuritaire (« *on ne sait jamais*, il vaut mieux disposer d'un théorème de grande portée… ») qui contourne le problème en posant l'équivalence entre conditions minimales et portée maximale (ce qui peut être vrai d'un point de vue logique, mais pas d'un point de vue pratique). La monumentalisation de la rigueur conduit ainsi à faire taire les questions qui sont pourtant au cœur de la pratique mathématique, si bien que, lors même qu'on prétend évaluer le respect de la rigueur, on n'évalue au fond qu'un type de calculs dénué de raisons d'être extra-scolaires.

6. Évaluer la rigueur : un rite d'institution

On est alors dans une situation paradoxale : la survalorisation symbolique de la rigueur conduit à lui ôter toute fonctionnalité. La rigueur est aimée, pratiquée, codifiée pour elle-même, en tant que « cœur de métier », alors que les mathématiques n'ont justement pas de cœur de métier mais sont intégrées de manière fonctionnelle à la pratique de multiples disciplines, notamment si l'on considère avec B. Barquero, M. Bosch et J. Gascón (2011) que « la modélización matemática debe formar parte integrante de cualquier proceso de estudio de matemáticas » puisque « la enseñanza de la modelización matemática se conviert[e] en un "sinónimo" de la enseñanza funcional de las matemáticas » (p. 554). Comme un rituel qui perdure bien que le sens des gestes se soit perdu pour les fidèles, la rigueur continue d'être « enseignée » sans que les raisons d'être de la rigueur elle-même ne soient jamais données.

Les raisons habituellement fournies aux étudiants récalcitrants se résument le plus souvent à « la rigueur en mathématiques est indispensable pour une raison toute simple : elle seule permet d'être sûr des résultats établis », comme le dit Daniel Perrin (1997), à quoi on répondra avec T. W. Tucker (1997) que Leonhard Euler se débrouillait très bien sans la « rigueur » contemporaine, ou avec William P. Thurston (1995) que « la confiance ne vient pas de mathématiciens qui vérifient formellement les arguments formels, elle vient de mathématiciens qui étudient soigneusement et de façon critique les idées mathématiques ». L'acquisition de cette rigueur évaluable et ineffable à la fois constitue un vrai *rite d'institution* au sens que P. Bourdieu (1982) donne à ces mots : seul celui ou celle qui parvient à maîtriser le code, au prix d'une conversion d'habitus, peut être institué mathématicien (« nul n'entre ici s'il n'est rigoureux »). Se crée ainsi une frontière entre ceux et celles qui le sont (rigoureux), et les autres ; cette frontière, difficilement franchissable, prime toutes les autres différences et devient le critère par excellence de l'excellence, c'est-à-dire de la conformité à l'image que les mathématiciens se font de la pratique mathématique. En particulier, en tant que rite d'institution, l'évaluation (par examen, concours, etc.) de la « rigueur » *naturalise* un arbitraire culturel et *crée* une opposition entre ceux qui possèdent et ceux à qui manque la disposition à la rigueur (Bourdieu, 1982). Ainsi des élèves peu enclins à ajuster leur habitus aux exigences du champ scolaire, mais très inventifs, qui parviennent à trouver des réponses sans pouvoir les justifier pleinement (selon les canons en vigueur), se voient refuser l'accès à l'institution accordé à des étudiants moins riches d'idées mais plus conformes aux attentes.

Il y aurait par ailleurs tout un travail à faire sur le rôle que jouent les indications données dans les énoncés d'examens. En première analyse, on peut penser que leur présence est liée à des contraintes écologiques : besoin de la part des professeurs de présenter des sujets d'examen « intéressants », « astucieux », « originaux » (ce qui conduit souvent aux limites du hors programme et, comme nous l'avons vu, relève d'un désir de « motiver » l'enseignement plus par l'invocation d'une esthétique du sacré que par la mise en situation[8], forcément profane) et nécessité de respecter le contrat

8. Au sens de la théorie des situations didactiques.

didactique en ne mettant pas les étudiants face à des types de tâches inédits un jour d'examen. L'*indication* joue probablement aussi un rôle symbolique en cela qu'elle dit sans le dire ce qu'est la distribution objective des rôles. Au professeur la maîtrise (noble) du technologico-théorique qui autorise le surplomb nécessaire à la construction d'un sujet « original », à lui les choix stratégiques (choix d'une approche, ici « en utilisant le TAF »), à l'étudiant la maîtrise (vulgaire) de la pratique de techniques qui lui permettront de traiter le sujet « original » une fois celui-ci abaissé de son piédestal au moyen d'une *indication*, véritable passe-droit qui autorise le vulgaire à accéder momentanément aux beautés aristocratiques, mais sur un mode tel qu'il n'y accède pas : à l'instar des romans populaires qui donnent à leurs lecteurs un accès provisoire et fictif aux salons de la bourgeoisie, l'indication réalise la prouesse de donner à voir tout en refusant de donner accès, renforçant par là-même les représentations que les agents (ici, les étudiants et les professeurs) se font de leurs positions relatives, mais aussi de l'activité mathématique.

Soulignons enfin le caractère *ineffable, intransmissible, peu objectivable* de ce qui fait pourtant l'objet de l'évaluation principale : la rigueur est indéfinissable, les attentes à son égard peuvent être très différentes d'un exercice à l'autre, d'un enseignant à l'autre, etc., mais son absence fait pourtant l'objet de sanctions sans appel. Internet regorge de forums où des étudiants échangent sur leurs difficultés en mathématiques et la lecture des contributions suivantes, qui portent sur la quête de l'inaccessible rigueur, donnent un éclairage sur ce point : nous en citerons trois ici, notés dans la suite F1, F2 et F3[9]. On y lit déjà la confirmation du lien entre manque de rigueur et échec : « mon prof me reproche de ne pas avoir assez de rigueur, ce qui explique mon petit 12 de moyenne » (F3), « mon problème vient d'un manque de rigueur (et donc de cohérence) et c'est très pénalisant puisque même ce que je sais faire ou ce que j'ai compris ne me rapporte pas de points de ce fait... » (F2), « Lors de mes controles [*sic*] de maths je perd [*sic*] vraiment beaucoup de points car je n'ai pas assez de “rigueur” » (F1). On y trouve ensuite l'incompréhension de ce qu'est ce petit rien qui fait tout : « je

9. F1 : http://fr.answers.yahoo.com/question/index?qid=20081107110555AAgvoVl ; F2 : http://forums.futura-sciences.com/mathematiques-superieur/62830-gagner-rigueur-maths.html ; F3 : http://forums.futura-sciences.com/physique/56365-palier-a-un-manque-de-rigueur.html.

n'ai pas assez de “rigueur”, mais qu'est ce que c'est exactement ?? » (F1), « Je voulais donc savoir si vous sauriez (ou auriez quelques idées) comment je pourrais faire pour améliorer ma rigueur/gagner en rigueur et donc progresser ? » (F2), et enfin l'espoir que cette épineuse question puisse, comme les autres, faire l'objet d'un traitement systématique, voire automatique : « Y' as pas des trucs tout bête [*sic*] ? ou alors des automatismes a [*sic*] acquérir ? » (F3), « Des techniques, des méthodes, des astuces, des façons de travailler/réviser...Bref, comment faire quoi. » (F2). Mais surtout, de manière frappante, domine le sentiment que la réponse ne viendra pas de l'école mais s'apprend sur le tas, au petit bonheur : « j'aimerais travailler cette “rigueur” sachant que personne ne peut m'aider chez moi et que je fais deja [*sic*] plein d'exos. Vous aurez [*sic*] des conseils ?? » (F1), « la rigueur se gagne peu à peu avec l'âge et avec l'expérience dans n'importe quel domaine » (F1), « J'ai moi aussi quelques problemes [*sic*] de rigueur… Ce que j'ai trouvé de mieux, à faire, c'est [...] » (F2), « Un "truc" qui marche pas mal [...] » (F3), « J'avais le meme [*sic*] problème que toi et j'ai "trouvé" un truc tout con [...] » (F3).

On observe là une rupture flagrante du contrat-type officiel : parce qu'il ne fournit pas les instruments permettant d'apprendre la rigueur, l'enseignant – et à travers lui, le système d'enseignement dans sa globalité – a toutes les chances de laisser les choses en l'état. La rigueur finit par gagner des titres de noblesses en apparaissant comme une qualité intrinsèque, propre à chacun, et dont certains sont dépourvus – à l'opposé des qualités qui peuvent s'acquérir par le labeur, comme « apprendre ses tables », etc. ; ce qui reconstitue en un lieu où on ne l'attendait pas, le système d'oppositions développé par Pierre Bourdieu et Monique de Saint Martin (1975) : noble/ignoble // pur/impur // théorique/appliqué // brillant/scolaire // sacré/profane, etc., au principe des classements scolaires. Le système d'enseignement « permet de réaliser une opération de classement scolaire tout en la masquant : il sert à la fois de relais et d'écran entre le classement d'entrée, qui est ouvertement social, et le classement de sortie, qui se veut exclusivement scolaire ». Le « vague et le flou même des qualificatifs » utilisés dans les évaluations (« peu précis », « trop vague », « pas rigoureux »), au mieux tautologiques et qui au pire montrent en creux que quelque chose manque qu'il est pourtant impossible de définir précisément,

« ne véhiculant à peu près aucune information […] suffisent à témoigner que les qualités qu'ils désignent demeureraient imperceptibles et indiscernables pour qui ne posséderait déjà, à l'état pratique, les systèmes de classement qui sont inscrits dans le langage ordinaire » (Bourdieu & de Saint-Martin, 1975, p. 76). Ainsi, même dans une discipline apparemment dégagée des contingences sociales et qui offre par ailleurs un profil moins sélectif socialement que d'autres disciplines (notamment littéraires), le social n'est pas totalement absent et, refoulé dans ce qui n'est pas formalisable, le style, il est évalué par les enseignants qui, pensant rendre des verdicts objectifs sur des questions techniques, ne font peut-être, eux aussi, que sanctionner des différences d'habitus.

La question du style recoupe celle du goût : l'étudiant conforme aux attentes est d'autant plus conforme qu'il aime se conformer. Les « bons étudiants » aiment généralement les mathématiques lorsqu'ils y excellent. Chez les enseignants, le désir de « faire aimer les mathématiques », outre qu'il est contraire au principe de laïcité comme le signale Yves Chevallard (2005), s'oppose de deux façons à l'apprentissage :

> – Les professeurs sont conduits à « motiver » l'introduction d'une notion à partir d'exemples « motivants » (« beaux », surprenants, spectaculaires, etc.) ; ce type de motivation interdit toute rencontre avec l'*outil* mathématique et ses raisons d'être,
> – Ce type d'approches introduit au cœur de la classe un principe de vision et de division fondé sur le goût, c'est-à-dire sur des catégories sociales d'aperception du « mathématiquement beau », principe que toutes les tentatives de rationalisation de l'évaluation (barèmes détaillés jusqu'à l'absurde, etc.) ne font que refouler sur le mode de la dénégation, interdisant par là-même son objectivation et sa neutralisation relative.

Il est à noter que les étudiants ne remettent jamais en question la pertinence de l'exigence de rigueur, ni même la justesse des jugements de goût que l'enseignant ou les autres étudiants peuvent émettre à propos d'un objet mathématique : le refus de l'exigence de rigueur ne peut se faire que ponctuellement, l'allégeance étant une condition *sine qua non* de la participation au jeu – sauf à se mettre hors-jeu. L'adhésion volontaire à un système de classement dont ils sont les victimes objectives est le résultat d'une violence symbolique institutionnelle au sens que donnent à ces mots

Pierre Bourdieu et Jean-Claude Passeron (1970) : il y a violence symbolique lorsqu'un arbitraire culturel est imposé comme légitime. On peut relire à cette lumière la lente histoire de l'émergence de la rigueur telle que nous la connaissons : d'abord *outil mathématique* et techniquement fonctionnelle, elle se transpose en un *outil de classement*, la similitude formelle (présence de symboles comme les quantificateurs, usage de tournures stylistiques récurrentes, etc.) entre les deux outils permettant la légitimation du second en déplaçant sur lui la valorisation symbolique dont le premier fait l'objet.

Remerciements

L'auteur souhaite ici exprimer tout sa gratitude envers Gisèle Cirade qui a su créer les conditions pour faire qu'une « question de prof » devienne une question professionnelle. L'aide d'André Pressiat a été très importante dans l'élaboration de ce travail : qu'il soit remercié ici pour sa patience et sa gentillesse infinies.

Références

Barquero, B., Bosch, M. & Gascón, J. (2007). La modelización matemática como instrumento de articulación de las matemáticas del primer ciclo universitario de ciencias: Estudio de la dinámica de poblaciones. Dans L. Ruiz-Higueras, A. Estepa & F. J. García (Éds), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD)* (pp. 573-594). Jaén, Espagne : Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Barquero, B., Bosch, M. & Gascón, J. (2011). Ecología de la modelización matemática: Los recorridos de estudio e investigación. Dans M. Bosch et al. (Éds), *Un panorama de la TAD* (pp. 553-577). Barcelone, Espagne : CRM.

Boas, R. (1981). Who needs those mean-value theorems, anyway ? *The Two-Year College Mathematics Journal, 12*(3), 178-181.

Bonnet, P.-O. (1844). Démonstration simple du théorème de Fourier. *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1re série, tome 3, 119-121. http://archive.numdam.org/ARCHIVE/NAM/NAM_1844_1_3_/NAM_1844_1_3__119_1/NAM_1844_1_3__119_1.pdf

Bosch, M. & Gascón, J. (2001). *Las prácticas docentes del profesor de matemáticas.* http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/almeria/Practicas_docentes.PDF

Bourdieu, P. (1982). Les rites comme actes d'institution. *Actes de la recherche en sciences sociales*, *43*, 58-63.

Bourdieu, P. (2001). *Science de la science et réflexivité*. Paris : Raisons d'agir.

Bourdieu, P. & de Saint-Martin, M. (1975). Les catégories de l'entendement professoral. *Actes de la recherche en sciences sociales*, *1*(3), 68-93.

Bourdieu, P. & Passeron, J.-C. (1970). *La reproduction : éléments d'une théorie du système d'enseignement*. Paris : Éditions de Minuit.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné* (2e éd.). Grenoble : La pensée sauvage.

Chevallard, Y. (2005). La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire : transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire. Dans C. Ducourtioux & P.-L. Hennequin (Éds), *La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire* (pp. 239-263). Paris : APMEP et Animath.

Chevallard, Y. (2011). *Journal du Séminaire TAD/IDD de l'année 2010-2011*. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/journal-tad-idd-2010-2011-4.pdf

Daubelcour, J. P. (2009). *Évolution des programmes d'analyse et de géométrie au vingtième siècle en terminale scientifique*. http://jpdaubelcour.pagesperso-orange.fr/histoire20.html

Dieudonné, J. (1969). *Foundations of Modern Analysis*. New-York et Londres : Academic Press.

Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matematicas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *4*(2), 129-159.

Gispert-Sambaz, H. (1982). *Camille Jordan et les fondements de l'analyse* (Thèse de 3e cycle). http://www.maths.ed.ac.uk/~aar/jordan/gispert.pdf

Houzel, C. (1996). *Analyse mathématique, Cours et exercices, 1er cycle des Universités* (collection Sciences Sup). Paris : Belin.

Lombardi, H. (1999). À propos du théorème des accroissements finis. *Repères IREM*, *34*, 55-69.

Ministère de l'Éducation nationale. (1986). Programme de mathématiques de la classe de Terminale C. *Bulletin Officiel n^o 31 du 11 septembre 1986.*

Ministère de l'Éducation nationale. (2003). Programmes des CPGE mathématiques classe de première année MPSI. *Bulletin Officiel hors série n^o 5 du 28 août 2003*, *Annexe 1*, 1154-55.

Monier, J.-M. (1999). *Analyse I, Cours et 300 exercices corrigés, 1re année MPSI, PCSI, PTSI*. Paris : Dunod.

Nelsen, R. B. (1993). *Proofs without words, exercises in visual thinking*. Washington : The Mathematical Association of America.

Ovaert, J.-L. & Verley, J.-L. (1983). *Analyse Vol. 1*, collection Léonard Épistemon. Paris : Cédic/Fernand Nathan.

Parra, V. E. & Otero, M. R. (2011). Praxeologías didácticas en la universidad y el fenómeno del «encierro»: Un estudio de caso relativo al límite y continuidad de funciones. Dans M. Bosch et al. (Éds), *Un panorama de la TAD* (pp. 719-741). Barcelone, Espagne : CRM.

Perrin, D. (1997). *Rigueur et formalisme(s)*. Dans M. Bailleul, C. Comiti, J.-L. Dorier, J.-B. Lagrange, B. Parzysz, M.-H. Salin (Éds), *Actes de la IX^e école d'été de didactique des mathématiques* (Houlgate, 19-27 août 1997) (pp. 281-283). Caen : ARDM et IUFM.

Rolle, M. (1690). *Traité d'algèbre ou principes généraux pour résoudre les questions de mathématique*. Paris : Estienne Michallet.

Shain, J. (1937). The method of cascades. *The American Mathematical Monthly*, *44*(1), 24-29.

Smith, D. E. (1984). *A source book in mathematics*. New York, NY : Dover. (Édition originale 1929)

Thurston, W. P. (1995). Preuve et progrès en mathématiques. *Repères IREM, 21*, 7-26.

Tucker, T. W. (1997). Rethinking rigor in calculus: The role of the mean value theorem. *The American Mathematical Monthly, 104*(3), 231-240.

Wittgenstein, L. (2005). *Recherches philosophiques.* Paris : Gallimard.

La théorie anthropologique du didactique comme outil d'analyse des pratiques enseignantes en éducation physique et sportive : étude des savoirs mobilisés *in situ* par deux enseignants en gymnastique

Fabienne Brière-Guenoun
CIRCEFT (EA 4384), Université Paris 12, France

Chantal Amade-Escot
UMR EFTS (MA 122), Université Toulouse 2 – Le Mirail, France

Abstract. The Knowledge used by two Physical Education teachers and their activation processes are studied from the analysis of their professional acts as defined in the anthropological theory of the didactic. The Knowledge that they mobilize combine various expert and scientific references in a singular conversion process. The discussion considers how to use theoretical tools of TAD in the context of teaching practices in physical education.

Resumen. El conocimiento movilizado por dos profesores de educación física y sus procesos de activación en la escuela se estudian a partir del análisis de sus actuaciones profesionales, tal como se definen en la teoría antropológica de lo didáctico. Los conocimientos que utilizan combinan varias referencias expertas y sabias según un proceso de conversión particular. Se discuten las modalidades de utilización de las herramientas teóricas de la TAD en el contexto de las prácticas docentes en educación física.

Résumé. Les savoirs mobilisés par deux enseignants d'éducation physique et sportive et les processus de leur activation en milieu scolaire sont étudiés à partir de l'analyse de leurs gestes professionnels tels que définis dans la théorie anthropologique du didactique. Les savoirs qu'ils exploitent combinent diverses références expertes et savantes selon un processus de reconversion singulier. La discussion interroge les modalités d'utilisation des outils théoriques de la TAD dans le contexte des pratiques d'enseignement en éducation physique et sportive.

IV^e congrès international sur la TAD (Toulouse, 21-26 avril 2013)
Axe 2. *L'analyse praxéologique comme outil de l'analyse et de l'ingénierie didactiques*

Brière-Guenoun, F. & Amade-Escot, C. (2017). La théorie anthropologique du didactique comme outil d'analyse des pratiques enseignantes en éducation physique et sportive : étude des savoirs mobilisés *in situ* par deux enseignants en gymnastique. Dans G. Cirade et al. (Éds), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* (pp. 247-275). https://citad4.sciencesconf.org

1. Introduction

Les savoirs professionnels des enseignants, nommés selon les paradigmes savoirs d'action suivant Jean-Marie Barbier (1996, 2007), savoirs d'expérience, savoirs pragmatiques suivant Maurice Tardif (1993) dépendent étroitement des contraintes de la professionnalisation. Des recherches récentes mettent en avant le rôle formateur des dispositifs favorisant la circulation comme celle de Claude Lessard (2008), la reconfiguration telle celle de Marguerite Altet (2008) ou la problématisation comme en témoigne celle d'Olivier Maulini et Philippe Perrenoud (2008) de savoirs d'origines multiples, à partir d'expériences pratiques. L'ensemble de ces travaux met en évidence le caractère tacite, expérientiel, incorporé, contextualisé des savoirs professionnels des enseignants. S'interroger sur les mécanismes expliquant la mobilisation effective de savoirs par le professeur nous semble essentiel pour projeter l'actualisation de ces savoirs en formation initiale ou continue.

Dans cette perspective, l'enjeu de cette recherche est d'identifier la nature, la structuration, les fonctions et les modalités d'activation des savoirs de deux enseignants d'éducation physique et sportive (EPS) en prenant appui sur l'étude de leurs pratiques ordinaires en suivant Alain Mercier, Maria-Louisa Schubauer-Leoni et Gérard Sensevy (2002). Les savoirs mobilisés par le professeur dans les interactions didactiques sont envisagés en référence à la théorie anthropologique du didactique (TAD) due à Yves Chevallard (1989, 1992, 1996) qui, parce qu'elle s'intéresse à la production mais aussi au contexte d'utilisation de ces savoirs, permet d'envisager leur caractère situé et incorporé dans les pratiques. Inscrite dans un projet de didactique comparée, notre étude vise à déceler le caractère généralisable de l'activation des savoirs par le professeur d'éducation physique et sportive (EPS) à travers la mise au jour de « processus mobilisateurs et organisationnels », selon Marc Bru (2002), singuliers.

2. Cadre théorique : des gestes de direction d'étude aux savoirs mobilisés par le professeur

L'étude des savoirs mobilisés par le professeur dans les interactions didactiques repose sur l'analyse des praxéologies didactiques et disciplinaires, praxéologies que l'on peut voir comme des interfaces entre les pratiques et les théories qui les sous-tendent. Elles sont révélées par les gestes « de conception et d'organisation des dispositifs d'étude » et « d'aide à l'étude » selon Y. Chevallard (1997,1999).

2.1. Le caractère spécifique des gestes du professeur

Les gestes professionnels désignent une construction circonstanciée, dont la spécificité – le style au sens d'Yves Clot (1999) – s'ancre sur un ensemble de caractéristiques communes et partagées par l'ensemble de la profession – le genre au sens de Y. Clot (1999). Les gestes du professeur s'expriment dans l'accomplissement de tâches didactiques coopératives impliquant plusieurs acteurs (élèves et enseignant) et orientées par l'étude, la mise à l'étude d'objets de savoirs déterminés (Chevallard, 1997). Le système des gestes du professeur et celui des élèves se déterminent donc mutuellement en fonction de leurs rôles respectifs (ou de leurs *topos*) liés aux modalités d'étude. Dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (TAD), ces gestes désignent l'ensemble des moyens généralement employés par le professeur pour organiser et faciliter l'étude d'un sujet en position d'élève comme en témoignent les travaux d'Yves Chevallard (1999), de Chantal Amade-Escot (2007) et d'autres. Ils sont de deux types : (a) des « gestes de conception et d'organisation des dispositifs d'étude », relatifs à la détermination des tâches d'apprentissage en lien avec les organisations disciplinaires à étudier ; (b) des « gestes d'aide à l'étude », dans lesquels l'enseignant met en place des techniques didactiques déterminées en vue de conduire la reconstruction (ou transposition) dans la classe des objets d'enseignement retenus (Chevallard, 1997).

Dans notre étude, les gestes, liés à l'organisation, la conception et la régulation des dispositifs d'apprentissage, révèlent les façons dont chaque enseignant analyse les savoirs mis à l'étude.

2.2. Les praxéologies comme interface entre les gestes et les savoirs

Selon Y. Chevallard (1996), toute pratique peut être associée à un système de tâches, dont la réalisation est permise par la maîtrise d'une « technique », désignant, selon le sens anthropologique donné par Marcel Mauss (1950) à propos des techniques du corps, une manière de faire. Ce système plus ou moins intégré de types de tâches et de techniques, nommé « bloc practico-technique » peut être assimilé à ce que l'on nomme couramment « un savoir-faire » (Chevallard, 1999). La technologie désigne un « discours rationnel » – le *logos* – sur la pratique et remplit des fonctions de justification, d'explication voire de production des techniques. Le discours technologique contient des assertions plus ou moins explicites, nécessitant à leur tour un niveau supérieur de justification, explication, production, celui de la théorie (Chevallard, 1999), dont le caractère peut être abstrait. Finalement, il existe un système « technologico-théorique », identifié comme un savoir.

Les pratiques enseignantes se caractérisent par deux types de praxéologies (ou d'objets) : (a) les « praxéologies disciplinaires » (gymniques ici), renvoyant aux manières de mettre à l'étude les objets d'enseignement dans une classe et aboutissant à la création d'objets d'enseignement spécifiquement redéfinis dans l'institution qui les accueille ; (b) les « praxéologies didactiques », qui concernent les procédés mis en œuvre par le professeur pour diriger l'étude des élèves, c'est-à-dire pour « conduire la reconstruction, ou transposition, dans la classe » des objets d'enseignement retenus (Chevallard, 1997, 1999). Cette double détermination praxéologique permet d'analyser les pratiques et leurs ancrages théoriques, tant du point de vue des choix disciplinaires effectués que des modalités d'enseignement proposées *in situ*.

Dans le cadre de notre étude, les savoirs de l'enseignant s'expriment par des tâches et des techniques gymniques (*praxis*) relayées et en interaction avec des tâches et techniques didactiques, qui elles-mêmes révèlent des théories et des technologies gymniques et didactiques en interaction. La technique s'actualise dans une tâche et renvoie, dans le cas du franchissement par redressement en gymnastique, à une réalisation jugée efficace par les experts ou à une façon de faire moins reconnue, qui reposerait sur des principes d'action efficaces (la technique étant entendue ici dans son acceptation large). La technologie, qui désigne une forme intermédiaire de modélisation d'un ensemble de techniques, ou de savoir-faire rattachés à la pratique sociale de référence, serait un ensemble de techniques de réalisation qui s'articulent autour des mêmes principes de réussite. Elle représente en quelque sorte un fil conducteur pour créer du sens dans la compréhension des mécanismes qui les fondent. La théorie renvoie aux savoirs et aux options théoriques rattachées à ces technologies.

Par ailleurs, les phénomènes transpositifs en milieu scolaire reposent sur différents registres de savoirs comme l'a explicité Samuel Johsua (1996) : (a) les « savoirs savants », liés à des communautés à qui la société a délégué le droit de dire le vrai ; (b) les « savoirs experts », développés par des communautés plus restreintes au sein d'institutions non savantes ; (c) les « savoirs personnels », propres à un seul ou quelques individus seulement. Dans le cursus des sciences et techniques des activités physiques et sportives (STAPS), les savoirs enseignés se caractérisent par leur pluridisciplinarité ainsi que par la place centrale accordée aux « savoirs technologiques » selon l'expression de Daniel Bouthier et Alain Durey (1994). Pour rendre compte des savoirs mobilisés par le professeur dans l'action en EPS, nous avons spécifié les catégories de savoirs proposées par S. Joshua (1996) en nous inspirant des distinctions établies par Yvon Léziart (1997) dans le champ des STAPS mais aussi des cadres implicites à l'œuvre dans l'architecture des cursus STAPS. Ainsi, les catégories adoptées dans cette étude distinguent : (a) des savoirs scientifiques contributoires des sciences du sport et des savoirs de l'éducation, qui relèvent de « savoirs savants » en ce qu'ils sont légitimés par des communautés scientifiques ; (b) des savoirs techniques issus des ouvrages spécialisés et des savoirs didactiques en usage tels qu'ils sont diffusés dans la littérature professionnelle des enseignants d'EPS, appartenant à la catégorie des « savoirs experts ». Ces catégories, relativement perméables à leurs frontières, sont organisées, comme le souligne S. Joshua, sur un continuum.

Finalement, les registres savants et experts contribuent à définir les fondements théorico-technologiques des praxéologies qui, en raison de leur articulation aux blocs pratiques, révèlent les savoirs effectivement mobilisés par le professeur et les liens qu'il établit entre eux.

2.3. Problématique : des gestes aux savoirs mobilisés dans l'interaction didactique

L'analyse des tâches proposées ne peut se faire sans les référer aux comportements des élèves à partir desquels l'enseignant intervient et reconfigure les dispositifs initialement conçus. Aussi, nous postulons que la façon dont l'enseignant détermine et oriente, dans ses gestes, l'acquisition des contenus d'enseignement par les élèves représente un moyen d'accéder réellement aux savoirs qu'il mobilise *in situ*. Les savoirs du professeur étant énactés dans l'action conjointe avec leurs élèves, leur mise au jour relève d'une analyse ascendante qui prend appui sur les gestes spécifiques de chaque enseignant selon les travaux de Fabienne Brière-Guenoun et Chantal Amade-Escot (2010). La formalisation praxéologique de Y. Chevallard (1996, 1997, 1999), en mettant en relation les systèmes pratique et théorique, permet de questionner à la fois ce qui est mis à l'étude par le professeur et comment, dans le cadre d'interactions concrètes avec les élèves, il met en œuvre cette étude. Appréhender l'activité du professeur suppose alors d'étudier les deux types de praxéologies (disciplinaire et didactique) et leur solidarité constitutive afin de mettre en relation les objets enseignés et les façons dont ils sont mis à l'étude.

Dans notre recherche, c'est donc à partir de l'analyse des éléments théorico-technologiques des praxéologies didactiques et gymniques activées par le professeur dans l'action (Chevallard, 1997, 1999, 2002), eux-mêmes révélés par ses gestes de direction d'étude, que sont identifiés les savoirs en regard de trois de leurs caractéristiques : les registres de savoirs, les fonctions et leurs contextes d'utilisation.

3. Méthode

3.1. Contexte et participants à l'étude

Les deux enseignants d'EPS retenus pour cette recherche ont trois et dix ans d'expérience professionnelle. Le moins expérimenté, nommé Mickaël, enseigne en classe de 4^{e} en milieu semi-urbain et le plus expérimenté, nommé Damien, en classe de 6^{e} d'un établissement labellisé ZEP (zone d'éducation prioritaire). Les observations portent sur les quatre premières leçons de cycles de gymnastique au collège, et plus particulièrement sur les tâches associées au thème du « franchissement par redressement » au saut de cheval.

3.2. Analyse a priori du thème d'étude

L'existence de ce thème d'étude dans les pratiques enseignantes, qui répond par ailleurs aux enjeux de l'activité culturelle dont elle est une forme d'expression comme l'indique Paul Goirand (1998), en assure la légitimité du point de vue des aspects didactiques de la recherche.

Description du thème d'étude. Le thème d'étude – le franchissement par redressement – s'organise autour de la coordination de deux envols décrits dans la figure 1 : (a) le premier envol, qui permet de prendre appui avec les mains sur le cheval avec une élévation suffisante du bassin ; (b) le deuxième envol initié à partir de l'appui manuel, qui consiste à repousser le cheval pour se réceptionner en position verticale équilibrée. La tâche générique présentée ici peut être modifiée en jouant sur l'aménagement matériel (type d'obstacle, hauteur de l'obstacle, surface d'impulsion, aire de réception, etc…) ou sur les formes de franchissement autorisées (saut groupé, saut écart, franchissement sur le côté, etc.).

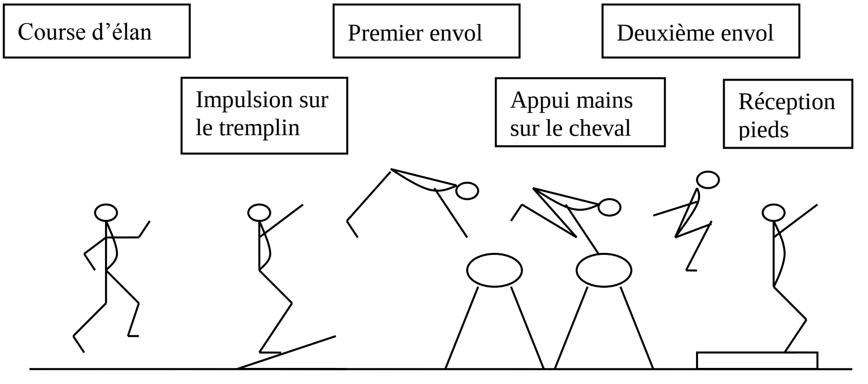


Figure 1. Schéma de la tâche générique mettant en jeu le franchissement par redressement.

Analyse a priori *du thème d'étude et modèles technologiques en gymnastique*. L'analyse *a priori* réalisée par le didacticien permet de prévoir les conduites probables des élèves sur le dispositif en relation avec les objets de savoir sollicités. En nous appuyant sur les travaux de Jean-François Robin (2003) portant sur l'étude des savoirs de référence développés par quatre leaders de théories gymniques scolaires, nous avons dégagé deux modélisations expertes (issues de la littérature professionnelle) essentielles pour étudier le franchissement par redressement, appartenant respectivement au « registre technique » et au « registre des savoirs sur les pratiques didactiques en usage ».

Ainsi, l'analyse *a priori* de ce thème d'étude peut être référée à une technologie (au sens de Y. Chevallard) centrée sur les conditions formelles d'efficacité du geste ou à une technologie valorisant la logique de l'action. Le premier type d'analyses expertes s'inscrit dans la continuité des travaux de Roland Carrasco (1975) et définit les éléments gymniques d'un point de vue interne en relation avec une classification des actions impliquées (comme le gainage, la répulsion des bras, etc.). Pour Claude Piard (1990), le franchissement par redressement se découpe en trois phases fondamentales : la liaison course-appel, la liaison appel-appui et le franchissement-réception. Selon J.-F. Robin (2003), ce type de modélisation s'appuie sur des savoirs relevant du registre de la mécanique, de la psychologie piagétienne, et aussi, dans le cas de C. Piard, sur l'anatomie fonctionnelle. Le deuxième type de modélisation repose sur les travaux de P. Goirand (1990, 1998) et valorise les notions de risques et de virtuosité en relation avec les aspects émotionnels caractérisant cette activité. Cet auteur définit trois étapes dans la construction du franchissement en fonction de trois indicateurs : la logique de l'approche du cheval, la logique de l'impulsion pour franchir et la logique de vol. Ces étapes se déclinent elles-mêmes en conduites typiques, marquant des niveaux de réalisation dont la définition est articulée aux aspects fonctionnels et non descriptifs du geste. Pour J.-F. Robin (2003), les analyses de P. Goirand s'appuient sur des références culturelles issues de la sociologie, de la psychologie, des neurosciences et de la biomécanique et privilégient l'activité adaptative de l'élève gymnaste.

C'est à partir de ces deux technologies expertes que seront analysés les gestes effectifs des enseignants et les fondements théorico-technologiques des praxéologies gymniques qu'ils activent.

3.3. Dispositif méthodologique

La méthodologie adoptée couple l'enregistrement filmé des interactions didactiques sur les tâches associées au thème du « franchissement par redressement » au saut de cheval au cours des quatre premières leçons de cycles de gymnastique au collège et sur des entretiens d'autoscopie, de type « auto-confrontations » (Clot, 1999) menés après chaque leçon. Ces entretiens, inspirés des méthodes développées en ergonomie, sont spécifiés au regard des enjeux didactiques de la recherche et s'appuient sur un guide de relance portant sur les intentions didactiques, les objets de savoir enjeux des dispositifs proposés, l'organisation de la leçon, l'interprétation des conduites des élèves, les régulations effectuées ou non et les pistes d'intervention envisagées. Les entretiens d'auto-confrontation (EAC), dont le statut est celui des entretiens post tels que définis par Maria-Louisa Schubauer-Leoni et Francia Leutenegger (2002), sont donc considérés comme technique d'accès contrôlée par le chercheur aux raisons qui orientent les gestes de l'enseignant.

Le corpus principal est complété par un corpus secondaire constitué de deux entretiens : un entretien *ante*, de type semi-directif, réalisé en début de cycle, centré sur les éléments contextuels qui orienteront les décisions d'enseignement pour l'ensemble du cycle ; un entretien *post*, réalisé à l'issue du cycle, portant sur les conceptions et savoirs qui guident l'activité de l'enseignant. Pour ces deux types d'entretiens, un « codage thématique », selon la terminologie de A. Michael Huberman et Matthew B. Miles (1991), reprenant chaque verbalisation et s'appuyant sur le guide de questionnement, a été réalisé.

3.4. Traitement des données

La transcription simultanée des enregistrements filmés et des entretiens du corpus principal a permis d'identifier différentes unités temporelles (des plus générales aux plus fines) :

- des sous-moments de l'étude, terme qui reprend en le spécifiant pour la recherche celui de « moments didactiques » (Chevallard, 2002) et qui permet de repérer l'organisation structurelle et fonctionnelle de la séance ;
- des épisodes, c'est-à-dire des « séries d'interactions relatives au contenu d'enseignement, organisées autour d'une nouvelle tâche » (Amade-Escot, 1996) ;
- des unités d'analyse interactives, qui caractérisent l'activité de l'enseignant en réponse à celle des élèves et des unités thématiques, définissant les verbalisations de l'enseignant lors des EAC.

Les différents indices recueillis en fonction des traces concernent les objets de savoir manipulés dans les dispositifs mis à l'étude, les interprétations de l'enseignant sur les conduites motrices des élèves (dans ses retours verbaux auprès des élèves et dans ses interprétations au cours des EAC), les modalités d'intervention. Ils visent à décrypter les systèmes tâches-techniques des praxéologies gymniques à partir desquels sont reconstruits leurs fondements théorico-technologiques. Les éléments pris en compte pour identifier les praxéologies didactiques relèvent de l'organisation spatio-temporelle des leçons, de la gestion des tâches et des techniques didactiques exploitées par l'enseignant pour conduire les séances. Le traitement des enregistrements filmés et des EAC est ensuite mis en relation avec les intentions didactiques de l'enseignant (entretien *ante*-cycle). L'entretien *post*-cycle, enfin, a pour fonction de confirmer ou d'infirmer les analyses relevant du croisement des corpus précédents.

En renseignant les trois instances du système didactique (les acteurs et les œuvres), les diverses traces ont permis de reconstruire les praxéologies activées par les enseignants à partir de l'observation de leurs gestes puis d'inférer dans un second temps les savoirs qu'ils mobilisent *in situ* en lien avec les registres de savoirs définis dans le cadre théorique.

4. Résultats

La présentation des résultats respecte les différentes étapes ayant permis d'accéder aux savoirs activés *in situ* par chacun des deux enseignants à partir d'une analyse comparative des principaux éléments structurant leur intervention : le contexte du cycle et les intentions des enseignants, l'organisation structurelle et fonctionnelle des différents moments de l'étude, les gestes de conception et d'aide à l'étude, les fondements théorico-technologiques des praxéologies activées et enfin les principales caractéristiques des savoirs mobilisés dans l'action.

4.1. Contexte et intentions didactiques des enseignants

L'analyse de l'entretien *ante*-cycle met en évidence les modalités organisationnelles du cycle et les intentions didactiques de chacun des enseignants.

Le cycle de Mickaël s'organise autour de la mise en place de deux ateliers : un atelier sol, où les élèves sont relativement autonomes, et un atelier cheval, sur lequel l'enseignant est très présent. Ce choix s'explique par une volonté de gérer la sécurité à l'atelier saut de cheval, considéré comme « dangereux et acrobatique » (entretien *ante*) et de favoriser la construction des apprentissages des élèves tout en prenant en compte leurs caractéristiques affectives et comportementales.

Damien choisit de mettre en place quatre ateliers pour le cycle, dont deux ateliers centrés sur « la prise de risque » (le *salto* avant avec trampoline et le franchissement par redressement au cheval), avec une focalisation et une présence plus marquées sur l’un ou l’autre selon les séances. Il valorise des objectifs d’entraide, de solidarité et d’autonomie, conformément aux axes déterminés dans les projets d’établissement et d’EPS (entretien *ante*). La référence au « caractère acrobatique et esthétique de l’activité gymnique » (entretien *ante*) est intégrée au fonctionnement adopté pour le cycle.

Alors que les préoccupations de Mickaël privilégient le caractère acrobatique de la gymnastique, induisant une focalisation sur les aspects sécuritaires, elles sont davantage centrées sur les relations entre élèves pour Damien.

4.2. Des sous-moments de l’étude relativement stables

Il s’agit de repérer les « structures » et les « fonctions » des praxéologies didactiques au cours des quatre séances afin d’identifier les « moments didactiques » tels qu’ils ont été définis par Y. Chevallard (1999, 2002). « Les moments didactiques sont avant tout une “réalité fonctionnelle” », qui ne coïncide pas forcément avec la chronologie de l’étude (Chevallard, 2002, p. 13). Nous avons introduit le terme de « sous-moment » pour opérer un découpage plus fin des moments et repérer des indicateurs relatifs aux différentes fonctions assumées au sein des moments didactiques. L’analyse structurelle de chaque séance, rapportée aux fonctions de chaque « sous-moment » est décrite dans le tableau 1 : elle révèle le mode de partage des responsabilités entre enseignant et élèves et la logique de fonctionnement de l’enseignant.

Sous-moments	Fonctions des sous-moments de l’étude	
	Mickaël	Damien
Sous-moment I : regroupement collectif près du tableau	Présentation des objets de travail et de l’organisation de la séance	
Sous-moment II : échauffement	Délégué aux élèves	Géré par l’enseignant en lien avec un thème d’étude transversal
Sous-moment III :	Présentation des tâches sur	Présentation des tâches

mise en place de la rotation	l'atelier et organisation de l'engagement des élèves dans la tâche	sur l'atelier et organisation de l'engagement des élèves dans la tâche (seulement en séance 1)
Sous-moment IV : premiers passages des élèves sur la tâche	Familiarisation des élèves avec la tâche demandée	
Sous-moment V : évolutions spécifiques (différenciées) du dispositif initial	Conduire l'étude des objets d'étude en accompagnant les élèves dans les apprentissages	Inexistant
Sous-moment VI : bilan collectif de séance	Inexistant	Bilan des aspects importants de la séance et instauration d'un temps collectif d'échanges

Tableau 1. Comparaison de structures et fonctions des moments didactiques pour Mickaël et Damien.

La structure de séance adoptée par les deux enseignants lors des quatre leçons observées (tableau 1) est identique en début de leçon mais varie au niveau du guidage des apprentissages des élèves. Un premier temps est consacré à définir la tâche en relation avec l'activité attendue et les objets de savoir enjeux de l'apprentissage. Il se différencie en deux sous-moments : un moment de regroupement de la classe entière (sous-moment I) et un moment spécifique à chaque groupe en début de rotation (sous-moment II). Puis l'enseignant met en place ou délègue l'échauffement aux élèves (sous-moment III). Il organise ensuite les premiers passages des élèves sur la tâche afin de s'assurer que chaque élève entre bien dans la tâche demandée (sous-moment IV). Un cinquième temps est consacré à des régulations plus fines, organisées spécifiquement pour chaque rotation (sous-moment V) : il n'existe que pour Mickaël. Enfin, le dernier temps, présent uniquement pour Damien, consiste à réaliser le bilan collectif de la séance (sous-moment VI).

Ainsi, il apparaît que trois des moments identifiés par Y. Chevallard (1999a) – la première rencontre avec le savoir, l'élaboration d'une technique en lien avec l'exploration du type de tâches et le travail de la technique – se distribuent au cours de chaque séance et non pas en fonction des séances. Et de façon très ponctuelle et non chronologique, certains épisodes de ces sous-moments recoupent le moment de « l'institutionnalisation » proposé par Y. Chevallard. La part respective attribuée à chacun de ces moments tend à s'inverser au fur et à mesure des séances : si l'enseignant consacre davantage de temps à la première rencontre avec le savoir durant la première séance, le temps attribué à l'élaboration et au travail de la technique est de plus en plus important de la séance 2 à la séance 4, ce qui rejoint les constats effectués par Annie Garnier (2003).

Une analyse plus détaillée des sous-moments de chaque séance révèle les techniques didactiques exploitées et le mode de partage des responsabilités entre enseignant et élèves vis-à-vis des enjeux de savoir (pour un développement, voir Brière-Guenoun, 2005). Mickaël prend en charge les interprétations des conduites des élèves, les interventions sur le milieu, la différenciation de la tâche en fonction des élèves et leur délègue la responsabilité de l'échauffement et du travail en fin de rotation. Les responsabilités sont davantage distribuées entre élèves et enseignant dans le cas de Damien, en particulier pour ce qui a trait au choix du niveau de franchissement. Damien prend en charge certaines interprétations des conduites des élèves, la responsabilité de l'échauffement, l'aménagement initial du dispositif, la gestion des groupes alors qu'il donne aux élèves la responsabilité du travail sur l'atelier, de certaines interventions sur le milieu (distance tremplin-cheval) et de certaines démonstrations.

En résumé les différents sous-moments de l'étude correspondent, chez Mickaël, à une volonté de faire avancer le temps didactique tout en respectant un cadre sécuritaire alors qu'ils répondent pour Damien à une préoccupation d'engagement des élèves dans un cadre de respect mutuel.

4.3. Les gestes de conception des dispositifs et les gestes d'aide à l'étude

L'analyse des sous-moments de l'étude a mis en évidence l'existence de dispositifs d'apprentissage variés, dont l'étude plus approfondie permet d'accéder aux logiques gymnique et didactique ayant présidé à leur élaboration. L'étude approfondie des gestes de l'enseignant vise à déceler les fondements théorico-technologiques des praxéologies didactiques et gymniques activées par chaque enseignant.

L'étude des « gestes de conception et d'organisation des dispositifs » (Chevallard, 1999) est ainsi réalisée afin de nous renseigner sur les savoirs gymniques mobilisés par l'enseignant pour concevoir les différents dispositifs. Pour chaque dispositif mis en place, nous avons croisé trois types d'analyse : (a) une analyse *a priori* de la tâche, qui s'appuie sur les propositions des experts de la discipline, et en particulier sur les travaux de P. Goirand (1998) pour l'analyse des conduites des élèves confrontés à ce type de tâches ; (b) une analyse des verbalisations de l'enseignant lors des séquences filmées où il présente la tâche aux élèves (sous-moments I et III) ; (c) une analyse des verbalisations relatives à ces dispositifs dans les EAC.

L'étude des gestes d'aide à l'étude de chaque type de tâches complète celle des gestes d'organisation et de conception des dispositifs et concerne les retours verbaux proposés aux élèves et les modifications du dispositif matériel. Elle vise à caractériser le système des techniques mises en œuvre pour accomplir les tâches et la logique d'intervention qui guide les différentes régulations. Elle est réalisée à partir de l'analyse *a posteriori* des différentes formes d'interactions didactiques *in situ,* lors des épisodes appartenant aux sous-moments au cours desquels les élèves réalisent la tâche, c'est-à-dire les sous-moments III et IV ; de l'analyse des verbalisations dans les EAC lors de ces épisodes et d'une analyse du contexte d'introduction pour les régulations sur l'aménagement matériel.

Les analyses des deux types de gestes sont présentées successivement pour chaque enseignant.

Les gestes de Mickaël. Pour Mickaël, l'avancée du temps didactique repose sur une évolution des dispositifs au cours des séances. L'identification des objets de savoir pour chaque dispositif nous a permis d'inférer la logique gymnique de Mickaël, qui s'appuie sur un découpage chronologique de l'action, différenciant l'impulsion, l'élévation du bassin en fin d'impulsion et le redressement, et qui prend en compte la dimension affective et sécuritaire de la situation. Si les dispositifs sont centrés sur l'impulsion au cours de la séance 1, ils concernent progressivement l'élévation du bassin au premier envol, puis, envisagent, en séance 4, le travail du redressement. La chronogenèse est ainsi subordonnée à l'articulation de ces différents objets de savoirs grâce à la matérialisation de dispositifs qui respectent la chronologie des actions impliquées dans le franchissement. Les tâches mises à l'étude prennent aussi en compte la dimension affective de la situation (l'appréhension). La volonté de respecter le rythme d'apprentissage de chacun amène Mickaël à moduler le moment où il introduit tel ou tel dispositif en fonction des groupes, mais il respecte toujours les mêmes étapes. Ainsi, il adopte une conception des objets de savoir référée au découpage chronologique du saut, préside à la mise en place d'un enchaînement subtil et varié de dispositifs.

Les régulations consistent à la fois à réaménager le dispositif pour un ou plusieurs élèves et à produire des retours verbaux systématiques et spécifiques à chaque réalisation d'élève. L'étude des régulations verbales associées à chaque dispositif révèle que l'analyse chronologique du saut, sous-jacente à l'élaboration des différents dispositifs, oriente aussi les interventions de Mickaël auprès des élèves. En effet, plus les élèves sont en difficulté, plus il intervient sur les phases initiales du saut, et inversement. Les régulations sur le milieu didactique sont relativement fréquentes et mises en place lorsque les régulations verbales ne produisent pas les transformations attendues. Comme le montre le tableau 2, elles consistent à complexifier et/ou simplifier le saut, en jouant sur l'aménagement matériel (cheval mousse, trampoline), sur la réduction ou l'augmentation du nombre d'actions à coordonner et sur la difficulté d'une ou plusieurs actions ainsi qu'à marquer les objets de savoir en induisant des comportements particuliers, à travers par exemple la gestion de la distance tremplin-cheval ou la matérialisation d'une trajectoire avec un élastique.

Fonction de la régulation	Action sur le milieu (nature)	Régulations concernées	Quand ? Séance	Pour qui ? Élèves
Marquer des objets de savoir ou induire des comportements particuliers	Aménagement matériel du dispositif	Variation de la distance tremplin-cheval	Toutes les séances	Tous
		Tâche monter-rouler avec tremplin et dispositif élastique	Séance 3	Tous
		Matérialisation de deux zones d'appui mains	Séance 4	Meilleurs élèves

		sur le cheval		
		Matérialisation d'une ligne sur la zone d'impulsion du tremplin	Séance 4	Élèves en difficulté
Simplification, réduction du milieu	Réduction du nombre d'actions à coordonner	Tâche d'impulsion sur le trampoline ou sur le tremplin (isolement de la phase d'impulsion)	Séance 2	Laura (élève en difficulté)
		Tâche sauter-monter sur le cheval (suppression de la course d'élan)	Séance1	Jérémy (élève en difficulté)
	Diminution de la difficulté d'une ou plusieurs actions (souvent la réception, comme résultat de l'action)	Tâche monter-réception sur les genoux		Jérémy (élève en difficulté)
Complexification	Aménagement (augmentation des contraintes matérielles)	Tâche monter-rouler avec tremplin et cheval mousse	Séances 2 et 3	Tous
	Complexification du nombre d'actions à coordonner	Tâche monter-franchir directement écart le cheval mousse en long (réception debout derrière le cheval)	Séance 4	Les meilleurs élèves
	Augmentation de la difficulté d'une ou plusieurs actions (souvent la réception, comme résultat de l'action)	Tâche sauter-arriver accroupi sur le cheval (réaménagement de la réception sur le cheval)	Séance 1	Les meilleurs élèves

Tableau 2. Fonctions et natures des régulations sur le milieu pour les quatre séances.

Elles sont en outre différenciées en fonction des réponses des élèves et visent alors à répondre à des problèmes relativement typiques ou très ponctuels, ou bien à faire avancer le savoir pour certains élèves (ou groupes d'élèves) en réussite. Leur analyse révèle là encore le découpage chronologique du saut et la prise en compte des réponses spécifiques des élèves.

L'ensemble des gestes de Mickaël révèle une analyse didactique consistant soit à complexifier et/ou simplifier le saut, soit à intervenir sur certains objets de savoirs en référence à une analyse gymnique qui repose sur les étapes chronologiques des phases du saut et sur une interprétation en termes d'appréhension des élèves.

Les gestes de Damien. La situation de référence, définie par un dispositif unique et des niveaux de franchissement hiérarchisés déclinant la globalité du saut en fonction des problèmes d'apprentissage, organise l'ensemble des séances. La détermination des niveaux repose sur une différenciation des formes de franchissement (saut arrivée accroupi, saut sur le côté, saut groupé ou écart), qui prend en compte l'élévation au premier envol, les problèmes posés par le redressement et l'appréhension suscitée chez les élèves. Elle est de plus modulée en fonction des réponses spontanées des élèves (pour un développement, voir F. Brière-Guenoun et C. Amade-Escot, 2010). La complexification progressive du saut induite par un dispositif unique met en exergue une conception interactive des objets de savoir (impulsion, élévation au premier envol, appui des mains sur le cheval et redressement).

Pour Damien, les régulations sont essentiellement verbales (associées ou non à des gestes démonstratifs) et ont pour but de favoriser l'engagement des élèves dans la tâche. Elles reposent sur une analyse globale de la forme du saut, sur certains éléments de l'impulsion et sur une prise en compte de l'appréhension des élèves. Les interventions sur l'aménagement matériel, très ponctuelles et réservées aux deux premières séances, n'amènent pas de transformation essentielle du dispositif et ne visent pas à introduire de nouvel objet de savoir.

L'ensemble des gestes de Damien repose sur une évolution des niveaux de franchissement proposés aux élèves dans la tâche de référence, ce qui rend compte d'une approche plus globale centrée sur la totalité du saut.

4.4. Vers l'identification des fondements théorico-technologiques activés dans les gestes de conception et de régulation des dispositifs

Les fondements théorico-technologiques des praxéologies gymniques activées. Si Mickaël se réfère fréquemment à une analyse technique du saut, mobilisant les principes de R. Carrasco (1975) dans la conception des dispositifs, il s'appuie davantage, dans ses régulations, sur une interprétation interactive des problèmes des élèves, conformément à la théorie de P. Goirand (1990, 1998). Le caractère très contextualisé des régulations qu'il propose – relativement spécifiques des réponses des élèves – l'amène en effet à adopter une démarche de plus en plus centrée sur les problèmes des élèves au fur et à mesure qu'il est confronté à leurs réponses sur les dispositifs, surtout à partir de la troisième séance.

Définis d'un point de vue fonctionnel, les niveaux de franchissement hiérarchisés proposés par Damien prennent en considération l'appréhension des élèves et les logiques liées aux différentes phases du saut. Le mouvement gymnique est analysé dans sa totalité en relation avec l'analyse des obstacles émotionnels et techniques, conformément aux fondements de la technologie gymnique de P. Goirand (1990, 1998). Mais dans l'interaction didactique ou lorsqu'il désigne les enjeux de savoir, Damien se réfère à une analyse technique du saut liée aux actions musculaires spécifiques, telle que proposée par la modélisation de R. Carrasco (1975).

Finalement, les fondements théorico-technologiques des praxéologies gymniques activées par les deux enseignants relèvent d'une subtile articulation entre les théories de R. Carrasco et de P. Goirand, où la prédominance de l'une ou de l'autre dépend à la fois des gestes (de conception ou d'aide à l'étude) de l'enseignant et de l'avancée du temps didactique.

Les fondements théorico-technologiques des praxéologies didactiques activées. La démarche adoptée par Mickaël pour concevoir et réguler les tâches valorise l'emboîtement de tâches successives, dont la complexité est adaptée aux ressources différenciées des élèves. Cette centration sur la tâche, aussi repérable à travers la finesse et la fréquence des régulations sur le milieu, ainsi que la forte sollicitation de la compréhension des élèves, très perceptible dans les régulations verbales, témoignent de l'inscription cognitiviste de sa démarche. L'individualisation et la différenciation des régulations révèlent, selon nous, une conception adaptative des apprentissages, fondée sur des étapes successives selon un rythme d'acquisition propre à chaque élève. Les gestes de Mickaël reposent aussi sur l'hypothèse d'un réinvestissement des sensations d'une tâche à l'autre, l'alternance entre régularité et modification des dispositifs (qui fait implicitement appel à la place des répétitions dans l'apprentissage) et sur la sollicitation de l'investissement et la motivation des élèves en lien avec le sens qu'ils accordent à leurs apprentissages. De façon générale, pour concevoir et réguler les dispositifs d'apprentissage, Mickaël simplifie ou complexifie les tâches, en jouant de plusieurs façons sur le milieu didactique (voir tableau 2) :

- par une réduction (isolement de la phase d'impulsion) ou une augmentation du nombre d'actions à coordonner (rajouter la phase de redressement jusque-là absente) ;
- par une diminution ou une augmentation de la difficulté d'une ou plusieurs actions ;
- par une diminution des contraintes liées à l'aménagement matériel (utilisation du trampoline) ou une augmentation des contraintes matérielles (utilisation du tremplin) ;
- par le marquage des objets de savoir ou l'induction de comportements particuliers, grâce à un aménagement matériel du dispositif (élastique matérialisant une trajectoire, matérialisation de zones sur le cheval).

En mettant en œuvre ce principe pour concevoir et réguler les tâches, Mickaël s'appuie sur les données propres à l'analyse des tâches, diffusées dans la formation initiale, suite notamment aux travaux de Famose (1990), eux-mêmes inspirés de la psychologie cognitive et de l'ergonomie.

Pour Damien, la référence permanente à la globalité du saut répond à son intention de créer du sens dans les apprentissages et de maintenir l'engagement des élèves. Si l'importance accordée à cette dynamique motivationnelle peut s'expliquer par l'âge des élèves (qui sont en sixième, donc âgés de 11 à 12 ans), elle vise aussi à créer les conditions d'une activité d'apprentissage réelle de tous les élèves. Ainsi, les techniques qu'il utilise consistent à guider de façon collective mais aussi individuelle l'activité des élèves, adapter les formes de groupement aux objectifs poursuivis en jouant sur des regroupements (affinitaires ou par niveaux selon les moments de la séance ou du cycle), encourager les élèves en difficulté et mettre en place des procédures de travail favorisant le respect mutuel et l'autonomie (travail en ateliers et gestion des groupes). Ces procédures d'enseignement, visant à associer les élèves à leurs apprentissages, s'inscrivent plus généralement dans une conception constructiviste et interactionniste des apprentissages.

Au-delà des spécificités constatées, les fondements théorico-technologiques des praxéologies didactiques mises en œuvre par chacun des deux enseignants se réfèrent à une conception constructiviste des apprentissages.

4.5. Les savoirs mobilisés

L'analyse des fondements théorico-technologiques des praxéologies nous permet d'inférer les savoirs mobilisés par chacun des professeurs. Leur présentation est envisagée à partir de leurs principales caractéristiques.

Registres de savoirs. Les savoirs mobilisés par les deux enseignants appartiennent aussi bien aux registres « savants » (mécanique, anatomie fonctionnelle, psycho-physiologie, psychologie cognitive, théories de l'apprentissage moteur, sciences de l'éducation) qu'aux registres « experts » (savoirs techniques, savoirs didactiques en usage dans la communauté professionnelle et savoirs institutionnels). Ceux qui sont les plus fréquemment activés ainsi que leur contenu varient selon l'enseignant. Le type de savoirs savants mobilisés nous semble lié aux théories expertes auxquelles se réfèrent plus ou moins explicitement les enseignants. D'une certaine manière, notre recherche confirme la place des « savoirs experts » (Johsua, 1996) dans les processus transpositifs de l'éducation physique (Amade-Escot et al., 2007 ; Robin, 1998).

Fonctions et modalités d'activation des savoirs. Les fonctions assumées par ces différents types de savoirs sont assez proches pour les deux professeurs et concernent la compréhension, l'interprétation des réalisations gymniques des élèves ainsi que celle des mécanismes impliqués dans leurs apprentissages. Mais c'est surtout le contexte de leur utilisation qui différencie les fonctions de ces différents savoirs. Si ces dernières s'expriment au détour de l'organisation, la gestion des dispositifs et des régulations verbales pour les deux enseignants, elles sont particulièrement exploitées dans le cadre de la conception des tâches et des régulations sur le milieu didactique pour Mickaël alors qu'elles s'actualisent dans la mise en œuvre de fonctionnements adaptés aux profils des élèves pour Damien.

Chacun des deux enseignants mobilise ces divers savoirs en combinant les registres savants et experts selon des règles semblables. En effet, les savoirs issus des champs de la mécanique, de l'anatomie fonctionnelle ou de la psycho-physiologie sont fréquemment associés aux savoirs techniques alors que ceux relevant de la psychologie, des théories de l'apprentissage moteur, des sciences de l'éducation sont régulièrement combinés à des connaissances didactiques en usage dans l'institution. Nous avons interprété ces modalités de recoupement préférentielles comme le résultat de « glissement inter-registres » (Brière-Guenoun, 2005), terme par lequel nous désignons le processus de spécification et d'emboîtement de registres savants et experts, qui aboutit à une conversion personnelle des différents savoirs de référence directement utilisables dans la pratique.

5. Discussion

5.1. Le rapport au savoir des enseignants marqué par leurs appartenances institutionnelles

La spécificité du contexte d'enseignement (milieu difficile ou non), le style pédagogique de l'enseignant, son expérience professionnelle et les particularités de l'activité gymnique marquent le caractère singulier de son rapport au savoir. Mais la centration sur la mise au jour de « processus mobilisateurs et organisationnels » (Bru, 2002) permet d'envisager les conditions de leur généralisation en identifiant les dynamiques sous-tendant l'activation des savoirs. Si les savoirs activés *in situ* sont marqués par des valeurs propres à chacun des enseignants, ils actualisent aussi leurs appartenances institutionnelles, conformément aux fondements de la TAD (Chevallard, 1992). Ainsi, il est possible de constater chez Mickaël une certaine forme d'incorporation des contenus diffusés en formation initiale (dans le cursus STAPS) en liaison avec les contraintes scolaires, qui se traduit notamment dans la forme justificative du discours tenu lors des entretiens et dans les choix réalisés pour élaborer les situations d'apprentissage. L'assujettissement à l'École semble s'exprimer à travers sa volonté permanente de faire avancer le temps didactique et une intériorisation des injonctions officielles, comme le montre l'extrait suivant d'un entretien :

> C'est surtout qu'ils sachent bien s'échauffer, s'étirer, pratiquer. Je suis sur « gérer sa vie physique future ». Être en sécurité, s'étirer, s'échauffer, etc. Après, je crois que l'EPS, c'est aussi apprendre à… à apprendre des règles, à les respecter par les autres, quoi, par l'arbitrage, etc. Et puis, bien sûr, ça reste la priorité, c'est pour ça que je l'ai pas dit en premier, mais le développement moteur des gamins, quoi. En fait, j'ai bien les trois objectifs de l'EPS, …, mais inconsciemment, mais c'est un peu ça. (Entretien *post*-cycle).

De la même façon, les modalités d'activation des savoirs chez Damien sont l'expression d'une forte incorporation des fonctionnements et finalités éducatives de l'institution scolaire, particulièrement révélée par la conformité de ses gestes aux projets d'établissement et d'EPS. Cette influence s'exprime en particulier dans le choix des thèmes d'étude gymniques, de la situation de référence (les niveaux de franchissement) ou dans certains aspects de l'organisation spatio-temporelle. Il est aussi possible de déceler chez Damien l'incorporation des attentes de l'institution scolaire en milieu difficile, comme par exemple lorsqu'il met en relation l'investissement des élèves avec les voies d'entrée dans l'activité et la notion de plaisir. Le rapport au savoir de Damien est guidé par des valeurs éducatives liées à son lieu d'exercice, parmi lesquelles on peut citer la solidarité, le « vivre ensemble » qui apparaît notamment dans l'entretien post-cycle, l'esprit citoyen, la réussite, l'engagement émotionnel, affectif et collectif, comme l'illustre l'extrait suivant d'un entretien :

> Ce qui est essentiel pour moi, dans cet établissement [collège ZEP], c'est le respect des autres. L'EPS va permettre effectivement de vivre des situations ensemble où on a besoin de l'autre, où on est contre l'autre […]. Donc, les élèves vont, à un moment donné, endosser tous les rôles sociaux […]. (entretien *post*-cycle).

Finalement, les appartenances institutionnelles que représentent la « formation initiale » et l'« institution scolaire » influent sur les processus d'activation des savoirs de l'enseignant tout au long de sa carrière, mais selon des proportions variables en fonction de sa personnalité et de son expérience. Ces interprétations convergent ainsi avec les travaux de A. Garnier (2003).

5.2. Fécondité du concept de praxéologie pour l'analyse des pratiques

Le concept de praxéologie, tel que défini dans la TAD, associé à la définition des gestes professoraux, nous a permis de pointer les savoirs et leurs modalités d'activation en lien direct avec les pratiques effectives. Plus généralement, la fécondité de cette notion s'avère liée à sa capacité à éclairer les mécanismes sous-jacents à l'élaboration des situations d'apprentissage.

En associant ainsi les dimensions pratiques (les techniques rattachées à l'étude de l'œuvre) et théoriques, la notion de praxéologie permet de questionner dans un même temps les intentions affichées ou implicites, les actions effectives engagées dans l'étude d'un objet de savoir et leurs raisons d'être. Dans notre étude, l'analyse approfondie des praxéologies a montré comment chaque enseignant, de manière originale, conduisait l'étude du thème « franchir par redressement » en mobilisant des savoirs variés.

En arrière-plan de ces fondements théoriques, certains gestes de l'enseignant peuvent s'interpréter au regard des contraintes inhérentes au contexte d'intervention. La recherche a mis en évidence, particulièrement chez Damien, l'existence de certaines routines rendant les tâches ordinaires et habituelles pour celui qui les propose. Les routines sont économiques pour le professeur mais elles ont pour conséquence des « phénomènes de naturalisation » impliquant la mise en transparence et l'oubli des mécanismes à l'origine de la création des tâches et techniques (Chevallard, 1999). Elles se traduisent souvent par la mise sous silence des fondements théorico-technologiques des praxéologies activées, ce qui risque d'engendrer des habitudes de fonctionnement, jugées efficaces et confortables de prime abord, mais qui ne sont pas forcément en adéquation avec les problèmes spécifiques rencontrés par les élèves. L'analyse des gestes du professeur, interprétée en termes de praxéologies, nous paraît donc intéressante pour comprendre ce qui les détermine. En révélant les savoirs (scientifiques, experts, personnels), qui fondent les gestes du professeur, ce type d'analyse pourrait contribuer à la réflexion sur les moyens de leur diffusion en formation initiale.

En favorisant l'étude de tous les éléments conditionnant les processus d'enseignement et d'apprentissage, la double articulation praxéologique (didactique et disciplinaire) dépasse par ailleurs les distinctions classiquement établies entre le « didactique » et le « pédagogique », (Chevallard, 1999). Il en résulte la nécessité d'envisager conjointement ces deux processus, en particulier lors des temps consacrés à la formation professionnelle des futurs enseignants.

5.3. Spécificité de l'exploitation du concept de praxéologie en EPS et en STAPS

L'usage méthodologique de la TAD dans cette recherche visait à documenter les gestes et leurs fondements théorico-technologiques mais sans perdre de vue leur forte dépendance vis-à-vis de l'activité des élèves. Nous avons dès lors privilégié une analyse ascendante des savoirs mobilisés par le professeur dans l'action conjointe. Les outils théoriques de la TAD nous ont permis de décrypter et de reconstruire les praxéologies activées alors que la référence à la théorie de l'action conjointe en didactique nous a été utile pour analyser les systèmes tâches/ techniques en reliant les gestes du professeur aux gestes d'étude des élèves.

Selon les références technologiques privilégiées, les objets de savoir enseignés et retenus par le professeur sont différents. Nous avons identifié deux types principaux de technologies, dont l'articulation est une reconstruction singulière de chaque enseignant: celle relative aux placements segmentaires de R. Carrasco (1975) ou celle renvoyant aux principes et règles d'action transférables de P. Goirand (1990, 1998). Dans ce cadre, la théorie, qui concerne la justification théorique de la modélisation adoptée pour comprendre l'objet de savoir (associé à une tâche ou plusieurs tâches), renvoie aux savoirs qui permettent d'analyser les ressources et les compétences à développer en gymnastique scolaire, ou en EPS. Dans le cas de R. Carrasco, par exemple, l'analyse des actions gymniques (gainage, fermeture jambes/tronc, répulsion bras, etc.), donc sa modélisation, repose sur une théorie qui valorise la mécanique, l'anatomie fonctionnelle et le renforcement musculaire. La théorie de P. Goirand privilégie une analyse des problèmes moteurs perçus soit en termes de représentations soit en termes de coordinations d'actions motrices référées à un but, et met en avant la dimension émotionnelle ainsi que le caractère social de l'activité (qui consiste à présenter sa prestation à un jury).

Aussi semble-t-il essentiel de considérer la nature des références impliquées dans ces théories ainsi que leur degré de généralisation pour les envisager dans le cadre de la discipline EPS et dans le champ des STAPS, marqués par la pluridisciplinarité des savoirs enseignés. En fait, il apparaît que, dans le cas de la gymnastique mais certainement plus largement en EPS, le niveau de théorisation experte englobe déjà l'option pédagogique et la conception de l'apprentissage. Par exemple, pour J.-F. Robin (2003), la théorie de P. Goirand se réfère explicitement à une option cognitive de l'apprentissage moteur, selon une approche historico-culturelle, constructiviste et interactionniste, d'inspiration marxiste. Ainsi, il semblerait que le mode de théorisation adopté autour des activités physiques ne dissocie pas toujours les fondements théoriques des habiletés motrices et des modèles pédagogiques, un peu comme si l'analyse de l'action ne pouvait être abordée sans se poser simultanément la question du « comment enseigner ? ». En d'autres termes, les fonctions d'analyse des pratiques sportives et des pratiques éducatives ne sont pas dissociées, ce que l'histoire de cette discipline scolaire peut, pour partie, expliquer : la nécessité de justifier et de légitimer des pratiques sociales de référence comme pratiques scolaires induit l'interdépendance des deux types de technologies (disciplinaires et didactiques). Nous repérons là une spécificité des théories expertes en EPS relevant, selon nous, de la nature praxique des savoirs enseignés en gymnastique (et en EPS) ainsi que du caractère pluridisciplinaire des savoirs de référence qui marque le champ des STAPS.

Rejoignant les questions plus générales abordées par la didactique comparée (Mercier et al., 2002), nous pensons nécessaire de questionner les modalités d'importation et de reconfiguration du concept de praxéologie en EPS afin de renforcer ses potentialités d'éclairage des liens entre théories et pratiques.

6. Conclusion

Repenser les résultats de cette recherche avec le regard de formateur qui en est à l'origine, c'est bien sûr tenter de mettre en perspective ses retombées pour la formation, mais en gardant présent à l'esprit l'idée selon laquelle l'efficacité ainsi produite relève d'hypothèses que seules des actions effectives et contextualisées de formation peuvent valider. Les processus identifiés dans cette étude, à savoir les « glissements inter-registres », la reconfiguration singulière de technologies expertes, les influences concurrentielles des diverses appartenances institutionnelles du professeur (Chevallard, 1989), permettent néanmoins d'envisager des dispositifs de formation initiale prenant en compte ces processus.

Tout au long de cette étude, nous avons repéré des stratégies d'élaboration des dispositifs, plus ou moins « économiques », spécifiques et différenciées. Mais dans les deux cas, c'est autour de la conception des dispositifs que le professeur organise ses modalités d'intervention, en articulant différents registres de savoirs. Ce constat nous amène à souligner la dimension potentiellement formatrice des concepts issus de la TAD, tels que ceux de moments de l'étude (Chevallard, 2002), de praxéologie et de gestes d'organisation, de conception et d'aide à l'étude (Chevallard, 1997, 1999). S'intéresser aux gestes du professeur vise en effet à déceler les prémices et les obstacles de la professionnalisation mais aussi les possibles points d'ancrage d'une formation adaptée aux professeurs d'EPS. Permettre au futur enseignant de formaliser, questionner les savoirs issus de sa formation pour construire et conduire une tâche d'enseignement, une leçon, un cycle dans une classe donnée nous paraît dès lors nécessaire pour favoriser l'articulation entre théories et pratiques qui conditionne le développement professionnel.

Références

Altet, M. (2008). Rapport à la formation, à la pratique, aux savoirs et reconfiguration des savoirs professionnels par les stagiaires. Dans P. Perrenoud, M. Altet, C. Lessard & L. Paquay (Éds), *Conflits de savoirs en formation des enseignants. Entre savoirs issus de la recherche et savoirs issus de l'expérience* (pp. 91-105). Bruxelles : De Boeck.

Amade-Escot, C. (1996). L'observation des activités didactiques en éducation physique et sportive : aspects méthodologiques. *Impulsions, 2*, 75-98.

Amade-Escot, C. (2007). Les savoirs au cœur du didactique. Dans C. Amade-Escot (Éd.), *Le Didactique* (pp. 11-30). Paris : Revue EP&S.

Barbier, J.-M. (1996). *Savoirs théoriques et savoirs d'action*. Paris : PUF.

Barbier, J.-M. (2007). Le vocabulaire des rapports entre sujets et activités. Dans M.-J. Avenier & C. Schmitt (Éds), *La construction de savoirs pour l'action* (pp.49-68). Paris : L'Harmattan.

Bouthier, D. & Durey, A. (1994). Technologie des APS. *Impulsions, 1*, 95-124.

Brière-Guenoun, F. (2005). *De l'observation des pratiques aux connaissances mobilisées par le professeur dans l'interaction didactique : Le cas du franchissement par redressement au saut de cheval en collège* (Thèse de doctorat). Université d'Orléans.

Brière-Guenoun, F. & Amade-Escot, C. (2010). Analyse *in situ* des savoirs mobilisés par un professeur d'éducation physique et sportive dans l'interaction didactique. *Revue suisse des sciences de l'éducation, 32*(2), 311-333.

Bru, M. (2002). Pratiques enseignantes : des recherches à conforter et à développer. *Revue française de pédagogie, 138*, 63-73.

Carrasco, R. (1975). *Gymnastique aux agrès. L'activité du débutant*. Paris : Vigot.

Chevallard, Y. (1989). Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel. Dans A. Bessot (Éd), *Actes du séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique 1988-1989* (pp. 211-235). Grenoble : LSD Imag.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques, 12*(1), 73-112.

Chevallard, Y. (1996). La fonction professorale : esquisse d'un modèle didactique. Dans R. Noirfalise & M.-J. Perrin-Glorian (Éds), *Actes de la VIIIe école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 83-122). Clermont-Ferrand : IREM.

Chevallard, Y. (1997). Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en didactique des mathématiques, 17*(3), 17-54.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques, 19*(2), 221-266.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. Structures & fonctions. Dans J.-L Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Éds), *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 3-22). Grenoble : La pensée sauvage.

Clot, Y. (1999). *La fonction psychologique du travail*. Paris : PUF.

Famose, J.-P. (1990). *Apprentissage moteur et difficulté de la tâche.* Paris : INSEP.

Garnier, A. (2003). *Le rapport au savoir du professeur : entre contrainte et autonomie, une étude de cas lors d'un cycle d'enseignement de la gymnastique au collège* (Thèse de doctorat). Université Toulouse 3.

Goirand, P. (1990). Didactique de la gymnastique et éducation physique. Dans Association des enseignants d'EPS (Éds), *Éducation physique et didactique des APS* (pp. 74-87). Paris : AEEPS.

Goirand, P. (1998). *EPS au collège et gymnastique*. Paris : INRP.

Huberman, A. M. & Miles, M. B. (1991). *Analyse des données qualitatives : recueil de nouvelles méthodes*. Bruxelles : De Boeck.

Johsua, S. (1996). Le concept de transposition didactique n'est-il propre qu'aux mathématiques ? Dans C. Raisky & M. Caillot (Éds), *Au-delà des didactiques, le didactique. Débats autour de concepts fédérateurs* (pp. 61-73). Bruxelles : De Boeck.

Lessard, C. (2008). Entre savoirs d'expérience des enseignants, autorité ministérielle et recherche : les conseillers pédagogiques. Dans P. Perrenoud, M. Altet, C. Lessard & L. Paquay (Éds), *Conflits de savoirs en formation des enseignants. Entre savoirs issus de la recherche et savoirs issus de l'expérience* (pp. 169-181). Bruxelles : De Boeck.

Léziart, Y. (1997). Savoirs savants et transposition didactique en éducation physique et sportive. *STAPS, 42*, 59-72.

Maulini, O. & Perrenoud, P. (2008). Sciences sociales et savoirs d'expérience : conflit de questions ou conflits de réponses ? Dans P. Perrenoud, M. Altet, C. Lessard & L. Paquay (Éds), *Conflits de savoirs en formation des enseignants. Entre savoirs issus de la recherche et savoirs issus de l'expérience* (pp. 141-153). Bruxelles : De Boeck.

Mauss, M. (1950). *Sociologie et anthropologie*. Paris : PUF.

Mercier, A., Schubauer-Leoni, M.-L. & Sensevy, G. (2002). Vers une didactique comparée. *Revue française de pédagogie, 141*, 5-16.

Piard, C. (1990). *Gymnastique et enseignement programmé. Applications au lycée et au collège*. Paris : Vigot.

Robin, J.-F. (1998). *Spécificité, structure et sens de savoirs pour enseigner en gymnastique scolaire : étude de quatre leaders de théories didactiques* (Thèse de doctorat). Université Paris 11.

Robin, J.-F. (2003). Transposition didactique : le rôle des leaders en gymnastique scolaire. Dans C. Amade-Escot (Éds), *Didactique de l'éducation physique. État des recherches* (pp. 27-48). Paris : Revue EP&S.

Schubauer-Leoni, M.-L. & Leutenegger F. (2002). Expliquer et comprendre dans une approche clinique/expérimentale du didactique ordinaire. Dans F. Leutenegger & M. Saada-Robert (Éds), *Expliquer et comprendre en sciences de l'éducation* (pp. 227-251). Paris, Bruxelles : De Boeck.

Tardif, M. (1993). *Les fondements de l'éducation contemporaine et le conflit des rationalités*. Montréal, Canada : Les publications de la Faculté des sciences de l'éducation de l'Université de Montréal

.

El material de enseñanza en las praxeologías de formación de maestros en España (1920-1936)

Dolores Carrillo Gallego y Encarna Sánchez Jiménez

Dpto. de Didáctica de las Ciencias Matemáticas y Sociales,

Universidad de Murcia, España

Abstract. The New School movement in Spain sought that children "learned by doing". Thus, they suggested new didactic praxeologies in primary school. There were teachers of the Normal School teacher training institution, linked to the Spanish Board of Extension of Studies (JAE), who were involved in the dissemination of those new methodological approaches. In this work we identify some mathematics teachers from Normal Schools who made innovative contributions and we study the use of manipulative materials in their proposals using the ATD.

Résumé. En Espagne, le mouvement de l'École nouvelle, *Escuela Nueva*, prétendait que les enfants « apprennent en faisant » et, pour cela, ils ont proposé de nouvelles praxéologies didactiques à l'école primaire. Dans les écoles normales, des professeurs liés à la *Junta de Ampliación de Estudios* s'engagèrent alors dans la diffusion de nouvelles approches méthodologiques. Dans ce travail nous identifions les professeurs de mathématiques des écoles normales qui proposèrent des innovations et nous étudions l'utilisation qu'ils ont faite de leurs ressources en utilisant la TAD.

Resumen. El movimiento de la Escuela Nueva pretendía que los niños «aprendieran haciendo» y, para ello, plantearon nuevas praxeologías didácticas en la escuela primaria. Hubo profesores de Escuela Normal, relacionados con la Junta de Ampliación de Estudios, que se implicaron en la difusión de los nuevos planteamientos metodológicos. En este trabajo se identifican profesores de matemáticas de Escuelas Normales que realizaron propuestas innovadoras y se estudia el uso de materiales en dichas propuestas utilizando la TAD.

IV[e] congrès international sur la TAD (Toulouse, 21-26 avril 2013)

Axe 2. *L'analyse praxéologique comme outil de l'analyse et de l'ingénierie didactiques*

Carrillo, D. & Sánchez, E. (2017). El material de enseñanza en las praxeologías de formación de maestros en España (1920-1936). Dans G. Cirade et al. (Éds), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* (pp. 277-299). https://citad4.sciencesconf.org

1. Introducción

Este trabajo se enmarca dentro del estudio que estamos llevando a cabo sobre la formación de los maestros en matemáticas, en el primer tercio del siglo XX.

En aquel momento las corrientes innovadoras en la enseñanza estaban influidas por el movimiento de la Escuela Nueva, surgido a finales del siglo XIX y consolidado y difundido precisamente en el primer tercio del siglo siguiente. Se trataba de una alternativa a la escuela tradicional, considerando al niño como elemento central a la hora de organizar el proceso de enseñanza y aprendizaje. Su característica principal es la importancia que se concede a la actividad y al respeto a los intereses del niño, así como a su individualidad.

Nuestro interés se centra en las propuestas realizadas para la enseñanza de la matemática desde la década anterior a la Segunda República, y también durante esos años, especialmente fructíferos en lo que a renovación educativa se refiere. Concretamente, aquí abordamos aspectos concernientes al uso de «material escolar» o «material de enseñanza» [1], en relación con esta materia. La teoría antropológica de lo didáctico (TAD), a pesar de algunas restricciones propias de un estudio de tipo histórico, nos proporciona herramientas útiles para nuestro trabajo. En particular, mostraremos cómo, además de las teorías didácticas, las condiciones «ecológicas» y también las epistémicas interrelacionan, y determinan incluso, la praxis didáctica.

2. El contexto histórico

2.1. La formación de los maestros en el periodo considerado

Durante el periodo estudiado, y de manera muy especial a partir de la proclamación de la Segunda República en España, tuvieron lugar una serie de reformas encaminadas hacia una profesionalización docente, que tuvo un claro exponente en la profesionalización de las Escuelas Normales que pretendía el Plan de 1931. Dicho Plan establece que los aspirantes a maestro ingresen en las Normales tras cursar la segunda enseñanza en los institutos, donde habrían adquirido la formación cultural necesaria para comenzar la formación profesional de Magisterio, que comprendía, además de

1. En nuestro país, como señala Moreno (2012), ambos términos vienen a ser coincidentes.

conocimientos psicopedagógicos y artísticos, un bloque significativo, el de las metodologías especiales. La reforma en la formación del profesorado fue valorada en la Revista de Pedagogía en 1932 [2] como una de las más trascendentales realizadas por la República, y consideraba que el sentido esencial de dicha reforma «está en haber convertido a las Escuelas Normales en centros superiores de cultura y formación profesionales, arrancándoles el carácter enciclopédico y forzosamente elemental que tenían» (p. 521).

Este carácter profesional, y también de enseñanza superior, más próxima a la universidad aunque no universitaria [3], supone un modelo de formación de maestros adelantado a su época y a la situación en su entorno europeo, y responde a las expectativas de varios sectores renovadores.

En particular, en cuanto a las matemáticas, durante las décadas anteriores, desde diferentes instituciones educativas, maestros, inspectores, catedráticos de instituto, profesores de universidad y, por supuesto, profesores de Escuela Normal, venían haciendo críticas a la forma en la que mayoritariamente se llevaba a cabo su enseñanza, a la vez que realizaban propuestas renovadoras. En el caso de los profesores de Escuela Normal, dichas propuestas iban dirigidas fundamentalmente a la formación de los maestros y se plasman en libros y artículos.

Para este trabajo, relativo al uso de materiales en la enseñanza de la matemática, hemos utilizado las obras de los profesores de Escuelas Normales que se formaron en la Escuela Superior del Magisterio, y que fueron número uno de sus respectivas promociones, Aurelio R. Charentón, Margarita Comas y José María Eyaralar, todos ellos profesores de Escuelas Normales y antiguos y destacados alumnos de la Escuela Superior del Magisterio (Molero y Del Pozo, 1989) [4]. Los tres viajaron a Europa becados por la Junta de Ampliación de Estudios (JAE).

Son, por tanto, profesores implicados en la formación de maestros y representativos de las corrientes que se desarrollaron en esa época, para la renovación metodológica de la escuela primaria. En sus estudios en la

2. Notas del mes. La preparación del magisterio.

3. El propio Rodolfo Llopis (1932, p. 5), director general de primera enseñanza y padre de la reforma, las considera «instituciones de tipo universitario».

4. Comas fue la número uno de la promoción de 1915, Eyaralar lo fue de la promoción de 1918 y Charentón de la de 1924.

Escuela Superior del Magisterio, conocieron el movimiento de la Escuela Nueva pues, como ha señalado M.ª del Mar del Pozo (2000), este centro educativo fue un factor importante en la difusión de las experiencias relacionadas con la Escuela Nueva, y en la transmisión de nuevos modelos docentes a través de sus alumnos, futuros inspectores y profesores de Escuela Normal.

Usaremos de manera preferente las obras de Comas (1923[5], 1932), Eyaralar (1933) y Charentón (s.f.)[6]. La edición de dos de ellas (Comas, 1923, 1932) es de la Revista de Pedagogía. En esta revista publicaron tanto Margarita Comas como Eyaralar. Además, de la obra *Cómo se enseña la Aritmética y la Geometría*, de Margarita Comas, se hicieron varias ediciones. Manejaremos asimismo otras publicaciones, aparecidas la mayoría en revistas de la época, de estos mismos autores y de otros profesores de escuela normal significativos, como Felipe Saiz Salvat o Luis Paunero, y de algunos no vinculados a la enseñanza normal, aunque sí al movimiento de renovación metodológica que tenía lugar en ese periodo, como José Sánchez Pérez, catedrático del Instituto-Escuela, que utilizaremos ocasionalmente para contrastar o ilustrar las cuestiones planteadas en este trabajo.

2.2. El nuevo Plan de Estudios: La Metodología de la Matemática

El decreto de 29 de septiembre de 1931, en su artículo séptimo, establece que las disciplinas conducentes a la formación profesional del magisterio abarcan:

a) Conocimientos filosóficos, pedagógicos y sociales.
b) Metodologías especiales.
c) Materias artísticas y prácticas.

Y sitúa la Metodología de la Matemática en el primer curso de los tres que comprende la preparación en las Escuelas Normales (un cuarto año estaba destinado a realizar prácticas en escuelas primarias). En este nuevo Plan «tienen aún mayor importancia las "Metodologías especiales" del apartado b) cuyo contenido ha de ser el que imprima carácter a los alumnos-maestros,

5. La edición consultada en este trabajo es la quinta, de 1932.

6. De las dos obras (*Grado Preparatorio* y *Grado Elemental*), de Aurelio R. Charentón, no consta la fecha exacta de publicación, aunque fue posterior a la concesión de la beca.

facilitándoles los medios necesarios para llegar con éxito al ejercicio de la función docente» (Vázquez, C. 1923, p. 123).

Pero hasta la promulgación de la Orden Ministerial del Reglamento de las Escuelas Normales el 17 de abril de 1933, no se estableció un cuestionario oficial para las asignaturas de metodología, y en particular para la de la matemática. Fueron varios los profesores de escuela normal que expresaron sus ideas acerca de lo que debía comprender el estudio de esta asignatura. En general, en las propuestas de programa aparece, entre otros aspectos: formación pedagógica teórica general y luego específica de la matemática; metodología de la ciencia; cuestiones históricas; construcción y uso de materiales; contenido de una lección.

En las obras sobre metodología de la matemática, los autores tratan de integrar propuestas de diferentes disciplinas, pudiéndose detectar fenómenos de codeterminación didáctica (Chevallard, 2001) a distintos niveles:

> ¿Cuáles son las ideas capitales de la nueva orientación?
>
> Como ocurre casi siempre en estos casos, no son, en su mayor parte, exclusivas del campo matemático: han ido influyendo de la misma manera, aunque con reacción distinta, en otras disciplinas, y *son, en último término, hijas del espíritu filosófico de la época*[7]. (Comas, 1922, p. 215).

El modelo epistemológico de las matemáticas de cada profesor influye en la propuesta realizada; así, algunos formadores de maestros, como Manuel Xiberta Roqueta, o profesores dedicados a la enseñanza secundaria, como el catedrático José Sánchez Pérez, insisten especialmente en el estudio de los métodos de la propia ciencia matemática. Opinan de modo diferente otros profesores más identificados con el carácter profesional que debía tener la formación del magisterio, y que consideraban que la enseñanza primaria no debía tener un carácter exclusivamente propedéutico:

> [...] el fin propuesto por la enseñanza escolar es en él [el Instituto-Escuela] simplemente preparatorio para la propia del Instituto, mientras que en la Escuela primaria la enseñanza es un todo que ha de mirar principalmente a la preparación para la vida. (Eyaralar, 1932, p. 5)

A pesar de la importancia otorgada a la formación práctica del maestro, la epistemología de estos profesores les lleva a advertir la necesidad de un

7. La cursiva es nuestra.

cuestionamiento tecnológico sobre el que basar las *técnicas didácticas* y, por ello, afirman que la formación práctica debe estar sustentada en una base científica.

> No ha de ser la Metodología de la Matemática un simple recetario, sino que por el contrario, ha de fundamentar sólidamente, científicamente, las directrices del método para que cada alumno adquiera un criterio propio que le habilite para hacer según su propia vocación y según las variables circunstancias escolares. (Eyaralar, 1932, p. 5)

Avisan sobre el peligro de importar acríticamente metodologías extranjeras o genéricas (Eyaralar, 1933; Saiz Salvat, 1933) e insisten en la necesidad de atender a la naturaleza específica de la matemática (Comas, 1923).

3. La enseñanza de la matemática

Bosch y Gascón (2010) consideran la ideología pedagógica dominante en un momento histórico y en una institución determinada, y el modelo epistemológico de las matemáticas subyacente, como uno de los factores principales de las dimensiones de la actividad matemática que se considerarán prioritarias en dicha institución.

En el momento estudiado, esa ideología pedagógica dominante se encuentra formulada en la Revista de Pedagogía, como órgano de expresión en España de la Liga Internacional de Educación Nueva (Viñao, 1994-1995).

Se pretendía, en última instancia, una renovación cultural y social de España, renovación que, en lo referente a movimientos, métodos e instituciones escolares, recibió su mayor inspiración en los principios de la Educación Nueva o Escuela Nueva, que propugnaba una renovación en los sistemas y métodos de educación y que originó numerosas experiencias educativas a nivel mundial, métodos y experiencias que los profesionales españoles conocerían a través de las obras publicadas y también de sus viajes por el extranjero, becados por la JAE, precisamente con este fin.

Personas relacionadas con el movimiento de la Escuela Nueva (a través de la Institución Libre de Enseñanza, la Revista de Pedagogía, la Revista de Escuelas Normales, la JAE) llegaron a puestos de responsabilidad en el ámbito educativo, durante la Segunda República, y mediante la legislación y la gestión, trataron de institucionalizar esa ideología pedagógica dominante, y las experiencias relacionadas que se habían llevado a cabo en España en los decenios anteriores. Este deseo de renovación se observa ya a nivel de Sociedad [8]:

> Por primera vez en la historia de la educación la escuela activa se ve consagrada en un texto constitucional. En el artículo 48 de la Constitución de la República española, promulgada el 9 de diciembre de 1931, se estatuye que «La enseñanza hará del trabajo el eje de su actividad metodológica» (Roselló, 1932, p. 534)

En el análisis de propuestas de enseñanza interesa considerar (Chaachoua y Comiti, 2010), junto al análisis praxeológico, un análisis «ecológico» que tenga en cuenta la institución en la que se realizan los aprendizajes (en este caso la escuela primaria) y trate de determinar el «nicho ecológico» de aspectos relacionados con el proceso de estudio de las matemáticas en esa institución, manifestado en posibilidades y límites de dicho proceso de estudio.

El análisis ecológico debe tener en cuenta que el periodo considerado, el momento en el que se editaron las obras consultadas, fue un tiempo de cambios, inspirados en los principios de la Escuela Nueva, que afectaban al sistema educativo y, en particular, a la enseñanza de las matemáticas en la educación primaria y a las Escuelas Normales, que, como hemos señalado, estaban demandando primero, y después realizando, un proceso de cambio en sus planes de estudio.

El último de los siete principios en los que la *Liga Internacional de la Educación Nueva* recogió su Ideario (Marín, pp. 28-29) expresa bastante bien la «cuestión general» planteada en aquel momento:

¿Cómo preparar al niño para que sea el buen ciudadano, que la sociedad necesita, a la vez que un ser humano consciente de su dignidad de hombre?

Esa cuestión condiciona las cuestiones que se plantean los enseñantes, a un nivel más general que el de la disciplina:

¿Cómo organizar la enseñanza respetando la autonomía del niño?

¿Cómo llevar a cabo una enseñanza activa, que atienda a los intereses de cada niño?

¿De qué manera transformar la competitividad en cooperación en el aula?

---

8. Hace referencia a los niveles de codeterminación didáctica (Chevallard, 2001).

Cuestiones que se trasladan a cada una de las disciplinas, entre ellas las matemáticas.

Por ello, las diferentes propuestas que se realizaron y las experiencias que se llevaron a cabo planteaban metodologías diferentes, todas ellas basadas en los principios de la Oficina Internacional de las Escuelas Nuevas, como

«13. La escuela nueva basa su enseñanza en los *hechos* y en las *experiencias*»

«14. La escuela nueva recurre a la *actividad personal* del niño»

«15. La escuela nueva establece su programa sobre los *intereses espontáneos del niño*» (Marín, op. cit., pp. 31-32).

Como señalaba Manuel y Nogueras (1932, p. 103), «la fórmula "aprender para hacer" debe cambiarse por esta otra expuesta con las mismas palabras: "hacer para aprender"». Para ello se necesita poner a su alcance materiales de enseñanza que permitan esa construcción del conocimiento.

Fue un momento de gran creatividad en cuanto a propuestas de materiales didácticos, también en matemáticas, que se corresponde con el interés mostrado por los aspectos estéticos de las matemáticas, de acuerdo con el principio 27 de la Escuela Nueva «La escuela nueva debe tener un *ambiente de belleza*».

Los profesores de Escuela Normal estudiados consideran que para hacer la enseñanza activa, hay que dar «todo el margen posible a [la] actividad sensorial y manual» (Charentón, s.f., Grado preparatorio, p. 8). Para conseguir que los aprendizajes sean realmente funcionales, la matemática debe ir asociada con la vida y, en particular, con las otras ciencias y con los trabajos manuales (Eyaralar, 1933, p. 190).

Desde la perspectiva de profesores de Escuelas Normales relacionados por los presupuestos de la Escuela Nueva, ¿qué función se le asignaba al uso de materiales?, ¿qué tipos de materiales se recomendaban?, ¿cómo se usaban?

Cualquier cambio significativo en las prácticas docentes se sustenta a su vez en un cambio del modelo epistemológico, en este caso de las matemáticas, que le sirve de base (Brousseau, 1987, citado por Espinoza, Barbé y Gálvez, 2011). El *modelo epistemológico de las matemáticas* que subyace en las propuestas que analizamos destaca el carácter experimental de las matemáticas —aunque sean una ciencia fundamentalmente deductiva—, la relación con la vida y la importancia de los métodos inductivos y en general de los que implican la acción:

> De las Matemáticas se dice que son Ciencias deductivas y de las Ciencias Naturales se dice que son inductivas. No debe afirmarse tal exclusivismo; tanto unas como otras son, en realidad, inductivas en la invención, deductivas en la demostración. (Sánchez Pérez, 1932, p. 26)

Los principios de la Escuela Nueva no se adaptan de la misma forma a todas las materias escolares. En particular, los tres apartados que se especifican para el décimo tercer principio, dejan claro qué disciplinas están en la mente de quienes formularon esta teoría:

> A) Observaciones personales de la naturaleza.
>
> B) Observación de las industrias y organizaciones sociales.
>
> C) Ensayos científicos de cultivo, cría de animales y trabajos de laboratorio-trabajos cualitativos en el niño, cuantitativos en el adolescente.

Es decir, los principios de la Escuela Nueva son asumibles, prácticamente tal como están formulados, en el caso de las ciencias experimentales y las ciencias sociales, pero no lo son de igual modo cuando se trata de la enseñanza de las matemáticas. La *teoría didáctica*, tan bien adaptada a las ciencias experimentales, inspira también las praxeologías didácticas en matemáticas, pero requiere de una reelaboración desde la epistemología de la matemática.

Este cuestionamiento motiva frecuentes comentarios, encaminados a justificar por qué en matemáticas la aplicación de los principios anteriores requiere establecer algunas diferencias y precisar los principios de la teoría que está en la base de la praxis didáctica. Así, Eyaralar (1933) advierte, refiriéndose a las Escuelas Nuevas: «La enseñanza metódica que la Matemática requiere no se compagina muy bien con el carácter de estas escuelas» (p. 254). Y del método Decroly, uno de los más valorados entonces, también por este autor, dice:

> Para nosotros tiene especial importancia la consideración de este método porque representa algo intermedio, tal vez una solución armónica entre la enseñanza clásica por materias separadas, que es la más adecuada para la Matemática por sí misma, y la enseñanza puramente ocasional a que tienden las escuelas nuevas. (ibid., pp. 251-252).

A pesar de lo cual señala que «del método en cuestión conviene tomar algunos procedimientos y sugestiones, pero […] su principal mérito no reside en el aspecto parcial de la enseñanza de la Matemática» (ib., p. 254).

Siguiendo a Bosch y Gascón (2010, p. 60), el modelo epistemológico de las matemáticas dominante en una institución, en nuestro caso la institución de la formación de maestros, condiciona las praxeologías didácticas que viven en ella o, dicho de otro modo, existe una fuerte dependencia entre los modelos epistemológicos de las matemáticas y los modelos didácticos. En este sentido, creemos que los testimonios escritos existentes nos permiten afirmar que el modelo didáctico que compartían los renovadores de la enseñanza de la matemática durante aquellos años no era un modelo didáctico espontáneo. Por una parte, estaban los presupuestos de la Escuela Nueva pero además, aunque se trataba de teorías pertenecientes al nivel pedagógico —en el sentido de los niveles de codeterminación establecidos por Chevallard (2001)—, estos autores no las adoptaron de una manera acrítica, sino que las adaptaron o reformularon precisamente considerando las características de las matemáticas (carácter abstracto, organización jerárquica, etc.) y sus diferencias con otras disciplinas, en particular, las ciencias experimentales.

Margarita Comas establece tres fases en la evolución del pensamiento en las ciencias en general: experimental, intuitiva y racional (Comas, 1932b). En cuanto a la matemática, propone comenzar por la manipulación de objetos reales, que después pasarán a ser figurativos, sustituirlos después por los dibujos o representaciones gráficas de los objetos, luego por las imágenes mentales de los objetos o de sus representaciones y, por último, llegar al pensamiento abstracto. Es algo similar a los tipos de intuición a los que se refiere Eyaralar (1936, p. 17), real, figurada y representativa, a las que asocia una manera de representar los objetos matemáticos: objetos, dibujos y representaciones geométricas —esquemáticas— de cantidades, respectivamente.

A pesar de la apuesta decidida por el uso de materiales y recursos concretos para la enseñanza de la matemática, son conscientes de que su estudio debe ir más allá y no quedarse en la mera experimentación. Así, se afirma: «No se prescindirá del elemento intuitivo en ningún grado de la enseñanza primaria, aunque vaya disminuyendo poco a poco la intensidad con que se use» (Comas, 1932a, p. 7). Eyaralar (1933) es aún más explícito: «no deben mantenerse demasiado tiempo las representaciones sensoriales unidas a las verbales, cuando éstas deban utilizarse para el pensar lógico. Es decir, que debemos guardarnos de un exceso de intuicionismo» (p. 224). Y lo concreta: «nótese que esta gradación sucesiva ha de seguirse en la enseñanza hasta hacer innecesario todo el andamiaje intuitivo de sus primeros grados» (pp. 202-203).

Una evidencia de que «un componente esencial del "logos" (o bloque tecnológico-teórico) de una praxeología didáctica es la forma (más o menos explícita) de interpretar qué son las matemáticas y cómo se construyen, difunden, enseñan, aprenden y utilizan» (Bosch y Gascón, 2010, p. 64), nos la proporciona el ejemplo de Manuel Xiberta, también profesor normalista, cuya concepción de las matemáticas, según se desprende de sus libros (1928, 1929, 1934), podríamos calificar de más clásica o «euclidianista» que la de otros contemporáneos, concepción que está en consonancia con sus ideas sobre la formación de maestros en metodología de las matemáticas:

> No se nos pide, así lo entiendo, que formemos eruditos en Heurística y Didáctica porque eso corresponde al profesor de Filosofía y Pedagogía; ni que enseñemos el uso y manejo de todos los aparatos y chirimbolos lanzados al mercado por constructores de material escolar, porque de esto ya se encargan los viajantes de librería que visitan las escuelas. (Xiberta, 1932, p. 148).

Quienes conceden más importancia a la vertiente inductiva y experimental de las matemáticas defienden en particular el uso de materiales de enseñanza y la formación didáctica de los futuros profesores. Así, mientras que Xiberta desarrolla una geometría basada en el uso de la regla y el compás, Eyaralar (1936, p. 103) en cambio critica la limitación de los materiales geométricos a estos dos instrumentos, característica de una concepción clásica de la enseñanza de la geometría.

4. El material para aprender matemáticas

Las propuestas de materiales que realizan estos profesores de Escuelas Normales están influidas por la experiencia que habían vivido en su estancia en Europa, becados por la JAE y las obras de otros autores, españoles y extranjeros, pero también por el conocimiento de la realidad de las escuelas españolas y de las propias familias y de su precariedad de medios económicos. La pertinencia de las orientaciones que dan para su uso revela la buena formación matemática y didáctica de los autores.

Hay una gran variedad de materiales recomendados; según su origen, encontramos [9]: Materiales didácticos «clásicos», de matemáticas o de otras disciplinas, o comercializados, como ábacos, polígonos recortados en madera, sólidos geométricos, mapas…; instrumentos de dibujo, sin limitarse a los más clásicos; material de los diferentes oficios y artes; objetos o materiales de uso común, generalmente obtenidos del entorno y de los juegos clásicos, incluidos los materiales básicos a partir de los que ir elaborando otros materiales o instrumentos; materiales didácticos recogidos en obras de otros autores y de sus visitas a centros educativos; e incluso materiales didácticos de diseño propio o adaptado por los autores.

4.1. Funciones del material

Margarita Comas (1922) señala, como idea básica de la nueva orientación en la enseñanza: preocupación por adaptarse al desenvolvimiento intelectual del alumno, lo que se traduce en el interés por las demostraciones intuitivas, es decir, por dar un carácter más experimental a las matemáticas; otras componentes de la nueva orientación son la atención hacia la historia de las matemáticas, la relación entre distintas partes de la matemática, antes estudiadas por separado, la predilección por una geometría dinámica y, por último, el carácter real de la enseñanza.

La *cuestión* que se plantea, en relación con la enseñanza de las matemáticas, es:

> ¿Cómo pueden estos principios llevarse a la práctica en la Escuela? En otras palabras: ¿qué plan y qué método debe seguir el maestro? (Comas, 1922, p. 218)

Cuestión que a su vez se desglosa en otras más específicas:

> ¿Cómo hacer más intuitivas las demostraciones?
>
> ¿Cómo trabajar las matemáticas de una manera experimental?
>
> ¿De qué forma relacionar la aritmética y la geometría?

9. En un trabajo anterior (Carrillo & Sánchez, 2012), proponemos una clasificación del tipo de materiales.

¿Cómo relacionar las matemáticas con la vida real?

Una respuesta la encontramos en las propuestas de uso de materiales de enseñanza. En efecto, basta analizar los tipos de *tareas didácticas* para las que emplean el material:

- Comprobar intuitivamente una propiedad. Puede ser antes de demostrarla o, simplemente, para aclararla una vez demostrada. Sáiz Salvat (1925) pone como ejemplo la verificación intuitiva del teorema de Pitágoras con la cuerda de nudos, o la de la igualdad:

  $$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

  con recortes de cartulina.
- Hacer que los alumnos descubran propiedades o deduzcan reglas:

  > En la Geometría, una vez conocidos los elementos geométricos sobre los cuales ha de trabajar el alumno, la tendencia general ha de consistir en que el alumno invente las relaciones geométricas. El papel del profesor ha de reducirse, cuanto sea posible, a dos cosas: a proponerle las cuestiones sobre las cuales debe trabajar y a proporcionarle las ideas fundamentales que, para cada caso, sean precisas. (Landrove, 1924, p. 270)
- Introducir nuevos objetos matemáticos o ayudar a comprender las definiciones de los objetos matemáticos.

En las definiciones basadas en la observación o en las acciones con materiales, se hace necesario diferenciar entre objetos «reales» o sus representaciones, y objetos «abstractos» o definiciones, y por ello los autores considerados insisten en la necesidad de ir afinando los conceptos. Ejemplos de estos procesos los describen Comas (1932b, pp. 53-55) en el análisis de líneas y Charentón, al definir el ángulo recto (Grado elemental, pp. 84-85).

- Relacionar la geometría con la aritmética o el álgebra. Eyaralar (1933) nos dice que «la Aritmética y la Geometría deben ir íntimamente unidas en la enseñanza primaria […] La Geometría puede hacer prácticas e intuitivas propiedades y operaciones aritméticas» (p. 230).
- Relacionar las matemáticas y otras disciplinas, geografía, física, etc., en particular con el dibujo y con el trabajo manual.

4.2. Relación con el trabajo manual y el dibujo

El Principio 6 de la Oficina Internacional de las Escuelas Nuevas afirma: «la escuela nueva organiza *trabajos manuales.* […] obligatorios para todos los alumnos [y que] presentan una utilidad real para el individuo o la colectividad». Por ello estos profesores conceden importancia al trabajo manual y lo tienen en cuenta en sus propuestas. Algunos autores ven en la clase de trabajo manual una oportunidad de elaborar material para otras asignaturas; la mayoría sin embargo lo que proponen es una enseñanza integrada, en la que el trabajo manual, se relaciona con otras materias, entre ellas la matemática, y sirve a su aprendizaje.

El carácter global e indiferenciado que Charentón atribuye a la experiencia matemática del niño, hace que proponga el dibujo y el trabajo manual «no como disciplinas autónomas, sino como métodos de trabajo e instrumentos para hacer activa la enseñanza del cálculo» (Grado preparatorio, p. 8). Sus *Lecciones de Cálculo* llevan por subtítulo *Aritmética, Geometría, Dibujo y Trabajo Manual*, y en la Justificación al Grado Elemental, se queja de que la escuela haga aparecer estas disciplinas por separado. En todas las lecciones de geometría, tras la introducción de cada figura geométrica a partir de la observación y de la experimentación con objetos, generalmente del entorno, hay apartados diferenciados con actividades de dibujo y, a continuación, de trabajo manual.

Para otros autores, el trabajo manual va ligado sobre todo a los problemas de geometría, que para Eyaralar «ejercitan la actividad manual, tan grata al niño, con las construcciones; educando a un tiempo la vista, la mano y aun el gusto estético» (1936, p. 85). Precisamente critica que en el Instituto-Escuela la geometría no se relacione con el trabajo manual (1933, pp. 304-305).

Las *técnicas didácticas* propuestas involucran muchas veces el trabajo manual: «A veces es un pequeño trabajo manual el punto de partida, como por ejemplo, sacar un cuadrado de una hoja de papel, tratándose de hacer así viva las nociones de didáctica que aparecen muertas en los tratados de Pedagogía» (Eyaralar, 1927, p. 12). Las *tecnologías didácticas* asociadas apelan igualmente a metodologías íntimamente ligadas a los nuevos movimientos y difundidas precisamente en esa época, como el *método de proyectos*:

> Por otra parte el nivel de la enseñanza no se rebajaría, sino que sucedería todo lo contrario: la simple confección de una pantalla en forma tronco-cónica exige poseer con toda precisión conocimientos que no suelen pedirse

> en la enseñanza primaria ni aun en la secundaria, y la Geometría Descriptiva se haría bien pronto necesaria. (Eyaralar, 1933, p. 234).

En cuanto al dibujo, no consideran el dibujo geométrico como una fuente de problemas más o menos formales sino como un medio de trabajar la matemática; trabajo manual y dibujo son dos técnicas íntimamente ligadas y complementarias:

> Debe aplazarse su uso [el del compás] en los primeros grados, sustituyendo el compás con círculos recortados (o monedas), o con el «Disco EYA», […] También deben emplearse todos aquellos utensilios o procedimientos que hagan más cómodas las operaciones […] Deben emplearse, igualmente, todos los aparatos de uso continuo en el dibujo y las artes: pantógrafo, plomadas y niveles, reglas en T, rosetas, falsa escuadra, etcétera. Y especialmente se ha de hacer uso de las figuras recortadas […]; de los palillos para componer figuras; de la plastilina, y más aún del plegado y recortado que constituye un buen ejercicio de trabajo manual. (Eyaralar, 1936, p. 104)

Por ello están lejos de limitarse a las clásicas construcciones con regla y compás.

Nuevamente se trasluce la epistemología subyacente, cuando los autores insisten en la importancia de justificar las técnicas matemáticas, concretamente en que el dibujo geométrico sea razonado (ibid., p. 13).

4.3. La elaboración de material propio

Estos profesores de Escuela Normal, conocedores de la realidad de otros países que habían visitado mientras disfrutaban de la beca concedida por la JAE, y conscientes de las condiciones de las escuelas españolas, insisten en el bajo coste del material: «la enseñanza intuitiva de la matemática no exige gastos ni aparatos especiales. Apenas una o dos de las cosas citadas [...] dejan de ser cosa vulgar y de uso corriente, y aun éstas pueden ser sustituidas caso de no ser fácil proporcionárselas el maestro» (Comas, 1932a, p. 28).

Ya en el R.D. de 30 de agosto de 1914 reorganizando las Normales, se pretendía que «el alumno normalista saliera de la Normal […] en condiciones de construir el material escolar y en posesión de una completa colección de él en cada materia usable enseguida que entrara a desempeñar escuela» (Saiz Salvat, 1924, p. 205). Para ello, debían aprender a elaborar los materiales de enseñanza en las Normales.

El material no debe desviar la atención de los niños de los aspectos matemáticos: «Cuanto más sencillo y más conocido es el material empleado menos distraen los niños su atención en las complicaciones de la cosa, olvidándose de la verdad esencial que quiere el maestro deducir» (Comas, 1932a, p. 35).

En cuanto a las condiciones que ha de reunir el material, consideran que ha de ser sólido, agradable, manejable por su tamaño, y que permita la actuación sobre él, frente a la mera visualización; además de ser auto-correctivo y auto-instructivo (Eyaralar, 1933, p. 215).

Es importante resaltar, en cuanto a la utilización didáctica de los materiales de enseñanza, que no se conciben para *mostrar* las acciones que el profesor realiza con ellos, sino para que los alumnos *actúen* realmente durante la clase; «los alumnos deben estar provistos cada uno de un aparato semejante. Sólo que éstos estarán construidos en cartón piedra» (Paunero, 1933, p. 70). Nuevamente la *teoría didáctica* está detrás de las técnicas y las sustenta.

5. El material en las praxeologías matemáticas y didácticas

Según Artigue (2002), la TAD concibe los saberes matemáticos en tanto que objetos relativos, emergentes de las prácticas matemáticas realizadas en una institución, y sensibles a la influencia de las herramientas de las prácticas sobre los saberes que emergen de éstas. Según esta autora, la legitimidad de una técnica no depende solamente de su valor pragmático, sino también de su valor epistémico. En este sentido, vemos cómo en ocasiones el material va a influir en el tipo de tareas matemáticas que se proponen y en las técnicas posibles, y asimismo en la justificación de las técnicas.

A modo de ejemplo, hemos elegido la tarea de hacer un cuadrado y otras relacionadas con ella, como la construcción de un ángulo recto.

Todos los autores coinciden en introducir el cuadrado a partir del cubo [10]. Para realizar esta tarea proponen diferentes técnicas, a veces con un mismo material; el material utilizado supone una restricción que impide o dificulta el uso de algunas técnicas, y en cambio favorece el empleo de otras, determinando de este modo el conocimiento matemático que los alumnos

10. Eyaralar (1933, pp. 178-179) comenta la conveniencia de comenzar por la geometría plana, por la espacial o por ambas.

pueden llegar a construir. Por ejemplo, en el papel cuadriculado ya están marcados los ángulos rectos y para dibujar el cuadrado hay que centrarse en que la longitud de los lados sea la misma, contando cuadrados. Pero para la tarea de construir un ángulo recto, el papel que proporciona Margarita Comas no es cuadriculado, imponiendo así una restricción, que lleva a introducir una nueva técnica: doblar un papel y volverlo a plegar sobre el doblez (Comas, 1932b, pp. 44-47). Previamente, la construcción de cuadrados articulados, usando el material consistente en tiras de cartón y encuadernadores, al estilo de un mecano, fuerza, al ser la figura así construida deformable, a tener que considerar cómo han de ser los ángulos para que el polígono resultante sea un cuadrado.

En otra obra esta profesora propone construir un cuadrado por *plegado* de una cuartilla; comprobar la igualdad de los lados y la de los ángulos de un cuadrado *girando* un cuadrado de papel; comprobar la igualdad de ángulos *superponiendo* el de la escuadra (Comas, 1932a, pp. 31-32). Eyaralar (1933, p. 205), para tratar de «hacer intuitivas las propiedades del cuadrado», también plantea girar dos cuadrados iguales construidos en papel transparente, alrededor de un alfiler clavado en su centro, para *ver*[11] que coinciden los lados, las diagonales y las semidiagonales. De nuevo se observa la influencia del material elegido y de la técnica empleada, en las propiedades matemáticas involucradas. Así, imponer la construcción de un cuadrado por la técnica del plegado, usando como material un trozo de papel de forma rectangular, lleva a considerar la propiedad de que los lados del cuadrado son iguales; la acción de girar un cuadrado sobre sí mismo y que coincida alude a la regularidad de la figura; por último, la técnica de comprobar la igualdad de ángulos con la escuadra responde a la definición de figuras, en este caso ángulos, iguales, como aquellas que son congruentes, es decir, que superpuestas coinciden.

Charentón (Grado preparatorio, pp. 65-69; Grado elemental, pp. 117-122) nos ofrece otra muestra del efecto del material sobre el tipo de conocimientos involucrados, cuando propone, en el grado elemental, construir un cuadrado usando cuatro lápices, pero la construcción del cuadrado con este material —que hace que los lados ya vengan dados

11. El autor destaca este verbo en cursiva.

iguales pero obliga en cambio a colocarlos de manera que los ángulos sean rectos— no aparece sin embargo en el grado anterior, con niños más pequeños. También añade, en el caso del grado elemental, algunas otras técnicas, como las de trazar un cuadrado a partir de dos rectas perpendiculares, tomando distancias iguales, o uniendo los puntos medios de lados opuestos —o contiguos— en un cuadrado. Estas técnicas van asociadas a propiedades del objeto matemático estudiado, como la igualdad y la perpendicularidad de las diagonales o las simetrías del cuadrado, respectivamente.

Chevallard (1999) proporciona varios criterios explícitos para evaluar organizaciones matemáticas o didácticas. Los siguientes comentarios toman en consideración algunos de esos criterios. El empleo de materiales (concordante con las condiciones «ecológicas» del periodo estudiado) no era un empleo banal para estos reformadores de la enseñanza de las matemáticas. Citaremos los trabajos de José María Eyaralar, una referencia privilegiada en el caso de la enseñanza de las matemáticas en aquellos años.

En primer lugar, para cada tipo de cuestiones matemáticas proponía materiales específicos. Así, para la geometría, Eyaralar (1933) cita los materiales de Fröebel, Montessori y otros, para lo que denomina periodo «de observación», mientras que para el periodo «experimental» recomienda las figuras con movimiento.

Entre las preguntas que hace Chevallard para evaluar la pertinencia de las técnicas, figuran la facilidad de uso, el alcance, la fiabilidad en unas ciertas condiciones de empleo, y la posibilidad de evolucionar convenientemente. Los comentarios de Eyaralar acerca de la demostración del teorema de Pitágoras que toma de la *Ebene Geometría*, de Mahler, son un indicativo de la preocupación del autor por estas cuestiones:

> Mis alumnos construyen los cuadrados en hueco para que en ellos encajen las piezas 1, 2, 3, 4 y 5, que son separables.
>
> Claro es que caben grados en la aplicación del método, consistiendo el más sencillo en la simple inspección, el acoplamiento y equivalencia, y el segundo en la demostración de por qué coinciden segmentos y ángulos. (Eyaralar, 1925, p. 53)

La preocupación por las condiciones institucionales en las que viven estas técnicas se pone de manifiesto también cuando critica las demostraciones «dadas por algunos geómetras excesivamente facilitadores, que han desnaturalizado la Geometría materializándola al recurrir por ejemplo a la superposición de figuras o al movimiento real, cosa sólo disculpable en libros elementales como recurso pedagógico» (Eyaralar, 1930, p. 223).

A propósito del bloque tecnológico-teórico, entre los interrogantes que plantea Chevallard sobre las formas de justificación utilizadas, considera importante examinar si se promueven las justificaciones explicativas y el aprovechamiento de los resultados tecnológicos disponibles.

El uso de materiales va ligado al estudio de la relación entre diferentes figuras e incluso desempeña un papel importante en la validación de propiedades [12]. Son los casos en los que se solicita la justificación de la técnica empleada con el material, por ejemplo, para la obtención de la figura que se pretende construir: «¿Qué propiedades han de tener los lados mayores para que, doblando la hoja [de papel], se obtenga un cuadrado?» (Eyaralar, 1924, pp. 9-10). La técnica de recortar papel aparece siempre ligada al razonamiento matemático: «El recortado de figuras en papel es en la Escuela Primaria un análisis materializado» (1933, p. 31). Eyaralar la contempla como un medio para no renunciar al razonamiento, cuando las demostraciones formales no son posibles.

En definitiva, se observa cómo el material puede contribuir a algunas de las funciones de la tecnología de una técnica, es más, podríamos considerar que su utilización se constituye así en parte de una técnica didáctica que explica y valida las técnicas matemáticas –respecto a ellas tendría una función tecnológica–, e incluso hace posible que una praxeología matemática pueda vivir en una institución:

> Pero creo que con lo dicho hay suficiente para darse cuenta de que el recortado y la investigación pueden ser las fuentes de una fecunda enseñanza geométrica en asuntos que, por los métodos tradicionales, se creían reservados para los alumnos que han recibido una cierta y adecuada preparación en el Análisis. (Landrove, 1924, p. 271)

12. Las propuestas de Eyaralar en relación con la validación han sido estudiadas en un trabajo anterior (Carrillo y Sánchez, 2011).

6. Conclusiones

En este trabajo se ha utilizado la teoría antropológica de lo didáctico para realizar un estudio de Historia de la Educación Matemática. Este tipo de investigaciones está muy condicionado por las fuentes disponibles —al menos las primarias—, que están determinadas de antemano. No pueden ampliarse generando experiencias docentes diseñadas ex profeso ni tampoco diseñar medios de recabar información directa de los protagonistas, profesores o alumnos, tal como se hace en muchas investigaciones relacionadas con la Didáctica de las Matemáticas. A pesar de esas limitaciones, la TAD ha mostrado ser una herramienta útil para el análisis de las praxeologías matemáticas y didácticas presentes en otros momentos históricos.

En particular, el análisis ecológico ha permitido aportar elementos de respuesta a la cuestión de qué restricciones existían en los años anteriores y durante la Segunda República en España, o al revés, dejan de existir, para que se puedan proponer esas metodologías con materiales de enseñanza manipulativos.

Asimismo se pone de manifiesto la influencia de la ideología pedagógica y del modelo epistemológico de las matemáticas dominantes en aquel momento en la institución de formación de maestros, sobre las prácticas matemáticas propuestas.

Por otra parte, un trabajo como el realizado permite descubrir lo que deben las técnicas y tecnologías didácticas presentes en un momento dado, a otras anteriores. De hecho, Chevallard (1999) considera imposible asociar una praxeología didáctica a una única época. Y en efecto, muchas de las técnicas didácticas —y también matemáticas— de aquellos momentos, innovadoras entonces, se han vuelto a introducir o «reinventar» décadas después, en otros contextos, y a considerarse de nuevo «innovadoras».

Agradecimientos

Este trabajo se ha llevado a cabo gracias a la ayuda concedida por la Fundación Séneca —Agencia de Ciencia y Tecnología de la Región de Murcia—, en el marco del II PCTRM 2007-2010, dentro del proyecto de investigación n.º 11903/PHCS/09, sobre «El patrimonio histórico-educativo de la Región de Murcia. La memoria de los docentes».

Referencias

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computer for Mathematical Learning, 7*, 245-274.

Bosch, M. & Gascón, J. (2010). Fundamentación antropológica de las organizaciones didácticas. De los «talleres de prácticas matemáticas» a los «recorridos de estudio e investigación». En A. Bronner et al. (Eds.). *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 55-91). Montpellier: IUFM.

Carrillo, D. & Sánchez, E. (2011). La validación en la formación de maestros: José María Eyaralar. En M. Bosch et al. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 283-298). Barcelona, España: CRM.

Carrillo, D. & Sánchez, E. (2012). El uso de materiales en la enseñanza de la matemática escolar. En P. L. Moreno & A. Sebastián (Eds.), *Patrimonio y Etnografía de la escuela en España y Portugal durante el siglo XX* (pp. 181-196). Murcia, España: SEPHE y CEME.

Chachaoua, H. & Comiti, C. (2010). L'analyse du rôle des manuels dans l'approche anthropologique. En A. Bronner et al. (Eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 771-789). Montpellier: IUFM.

Charentón, A. R. (s.f.a). *Lecciones de cálculo. Grado preparatorio. Aritmética, Geometría, Dibujo y Trabajo manual*. Madrid: Juan Ortiz.

Charentón, A. R. (s.f.b) *Lecciones de cálculo. Grado elemental. Aritmética, Geometría, Dibujo y Trabajo manual*. Madrid: Juan Ortiz.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques, 19*(2), 221-266.

Chevallard, Y. (2001). Aspectos problemáticos de la formación docente. *XVI Jornadas del Seminario Interuniversitario e Investigación en didáctica de las Matemáticas*. Huesca. http://yves.chevallard.free.fr.

Comas, M. (1922). La enseñanza de las Matemáticas. *Revista de Pedagogía, 6*, 215-220.

Comas, M. (1923). Cómo se enseña la Aritmética y la Geometría. *Revista de Pedagogía, 16*, 142-147.

Comas, M. (1932a). *Cómo se enseña la Aritmética y la Geometría* (5ª ed.). Madrid: Publicaciones de la Revista de Pedagogía.

Comas, M. (1932b). *Metodología de la Aritmética y la Geometría.* Madrid: Publicaciones de la Revista de Pedagogía.

Del Pozo, M. M. (2000). La renovación pedagógica en España (1900-1939): etapas, características y movimientos. En E. Candelas (Eds.), *Actas de V Encontro Ibérico de História da Educação. Renovação Pedagógica. Renovación Pedagógica* (pp. 115-159). Coimbra – Castelo Branco: Alma Azul.

Espinoza, L., Barbé, J. y Gálvez, G. (2011). Análisis de la tecnología didáctica de profesores que gestionan procesos de enseñanza aprendizaje matemáticos que incorporan TIC en el aula. En M. Bosch et al. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 321-347). Barcelona, España: CRM.

Eyaralar, J. M. (1924). *Nuevo Tratado de Geometría.* Madrid: Reus.

Eyaralar, J. M. (1927). Una clase de Matemáticas I. *Revista de Escuelas Normales, 41*, 210-212.

Eyaralar, J. M. (1930). Los conceptos fundamentales de la Geometría. *Revista de Escuelas Normales, 75*, 223-227.

Eyaralar, J. M. (1932). Cursillo de información metodológica. Grupo de Matemáticas. *Revista de Escuelas Normales, 91*, 4-5.

Eyaralar, J. M. (1933). *Metodología de la Matemática.* Madrid: Reus.

Eyaralar, J. M. (1936). *Didáctica de los problemas de Aritmética y Geometría.* Guadalajara: Sardá.

Landrove, F. (1924). La enseñanza de la geometría. La comprensión de la Forma. La invención y el recortado de figuras. *Revista de Escuelas Normales, 19*, 269-271.

Llopis, R. (1932). Ocho meses en la Dirección General. *Revista de Pedagogía, 121*, 2-6.

Manuel y Nogueras, F. (1932). Los trabajos manuales, ayer y hoy. *Revista de Escuelas Normales, 88*, 102-104.

Marín Ibañez, R. *Los ideales de la Escuela Nueva.* www.doredin.mec.es/documentos/00820073003026.pdf.

Molero, A. & Del Pozo, M. M. (1989). *Escuela de Estudios Superiores del Magisterio (1909-1932).* Departamento de Educación de la Universidad de Alcalá de Henares.

Moreno, P. L. (2013). Rosa Sensat, la cultura material de la escuela y el material de enseñanza. *Temps d'Educació, 44*, 77-99.

Paunero, L. (1933). Una lección sobre proyecciones en el espacio. *Revista de Escuelas Normales, 96*, 67-70.

Revista de Pedagogía. (1932). Notas del mes. La preparación del magisterio. *Revista de Pedagogía, 131*, 521-522.

Roselló, P. (1932). La instrucción pública mundial 1931-1932. *Revista de Pedagogía, 132*, 531-537.

Saiz Salvat, F. (1924). El Plan de las Normales. *Revista de Escuelas Normales, 16*, 205.

Saiz Salvat, F. (1925). El sentido de la Normal. *Revista de Escuelas Normales*, *25*, 176-177.

Saiz Salvat, F. (1933). De la organización didáctica. *Revista de Escuelas Normales, 94*, 4-6.

Sánchez Pérez, J. A. (1932). Cursillo de información metodológica. Grupo de Matemáticas: Conferencias. Metodología matemática. *Revista de Escuelas Normales, 92*, 24-28.

Vázquez, C. (1923). Algunas ideas sobre los cursos de Metodología. *Revista de Escuelas Normales, 89*, 123-124.

Viñao Frago, A. (1994-95). La modernización pedagógica española a través de la «Revista de Pedagogía» (1922-1936). *Anales de Pedagogía, Universidad de Murcia*, *12-13*, 7-45.

Xiberta, M. (1928). *Elementos de Geometría*. Madrid: Ministerio de Instrucción Pública y Bellas Artes.

Xiberta, M. (1929). *Elementos de Aritmética*. Madrid: Imprenta clásica Española. Ministerio de Instrucción Pública y Bellas Artes.

Xiberta, M. (1932). Metodología de las Matemáticas. *Revista de Escuelas Normales, 90*, 147-148.

Xiberta, M. (1934). *Matemáticas. Metodología y Prácticas*. Gerona: Talleres Gráficos de Solomón Marqués.

Utilisation d’un modèle praxéologique de référence dans un EIAH

Hamid Chaachoua, Geneviève Ferraton et Cyrille Desmoulins
LIG, Université Joseph Fourier, France

Abstract. Designing learning environments able to manage student models or learning scenarios requires specific and relevant didactic models that can be computed. We demonstrate in this article that the praxeological model, customized to be formally represented, fits these requirements. Its implementation is illustrated with the use of examples.

Resumen. El diseño de entornos informáticos de aprendizaje humano (EIAH) que traten cuestiones como la de la modelización del alumno o la concepción recorridos de enseñanza, se basa sobre la elección de una modelización didáctica pertinente para este tipo de cuestiones que, además, sea calculable. Mostramos en este artículo que el modelo praxeológico, con algunas adaptaciones necesarias para su formalización, permite dar respuesta a estas exigencias. Ilustramos su puesta en marcha con ejemplos de utilización.

Résumé. La conception des environnements informatiques d’apprentissage humain (EIAH), traitant des questions comme celle de modélisation de l’apprenant ou celle de conception de parcours d’enseignement, repose sur un choix de modélisation didactique pertinente pour ces questions et qui soit calculable. Nous montrons dans cet article que le modèle praxéologique, avec des adaptations nécessaires pour sa formalisation, permet de répondre à ces exigences. Nous illustrons sa mise en œuvre par des exemples d’utilisation.

IV[e] congrès international sur la TAD (Toulouse, 21-26 avril 2013)
Axe 2. *L’analyse praxéologique comme outil de l’analyse et de l’ingénierie didactiques*

Chaachoua, H., Ferraton, G. & Desmoulins, C. (2017). Utilisation d’un modèle praxéologique de référence dans un EIAH. Dans G. Cirade et al. (Éds), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l’école et dans la société* (pp. 301-324). https://citad4.sciencesconf.org

1. Introduction

Les recherches en Environnement Informatique pour l'Apprentissage Humain (EIAH) [1] amènent souvent à représenter informatiquement des objets à enseigner et à les doter d'outils de calcul afin de produire des diagnostics, des rétroactions vers l'élève ou l'enseignant, etc. Les précédents travaux de recherche de Marie-Caroline Croset (2009) et Hamid Chaachoua (2010) utilisaient le modèle praxéologique pour représenter les connaissances des élèves par les organisations mathématiques (OM) personnelles et les objets à enseigner par les OM à enseigner.

Comme le précisent Marianna Bosch et Josep Gascón (2005), une OM à enseigner constitue un modèle praxéologique du curriculum mathématique obtenu à partir d'une analyse des programmes et des manuels. L'identification de ces OM à enseigner passe donc par la caractérisation des types de tâches institutionnels et peut être vue comme une « reconstruction » du chercheur. Notons que ce dernier, pour des raisons liées à sa problématique, peut bien entendu procéder à un autre découpage que celui de l'institution voire le compléter ; il construit alors un modèle praxéologique de référence (MPR) regroupant les praxéologies à enseigner, enseignées mais également enseignables. Le modèle rend ainsi possible l'analyse de ce qui a cours dans différentes instances d'un système d'enseignement (comme les manuels ou le cours d'un enseignant), permet de rendre compte de la variété des OM à enseigner, de repérer et donc de pallier les manques éventuels. Il sert aussi de référence pour analyser les praxéologies apprises et en particulier pour les situer au regard des praxéologies enseignées.

Selon M. Bosch et J. Gascón (2005), la description de cette praxéologie de référence se fait généralement à partir des OM savantes qui légitiment le processus d'enseignement. Mais, comme le précisent les auteurs, le MPR ne coïncide pas nécessairement avec les OM savantes ; cependant, il se formule dans des termes proches et nous pensons que, d'un point de vue méthodologique, l'institution d'enseignement constitue le point de départ de sa construction ne serait-ce que par réalisation d'une enquête sur les types de

1. Cette recherche a pu avancer grâce à l'aspect pluridisciplinaire de notre équipe MeTAH : informatique et didactique des disciplines scientifiques.

tâches explicités dans les programmes. Ainsi, nous considérons que l’élaboration d’un MPR se compose de plusieurs étapes : identification d’une OM à enseigner à partir des programmes et des manuels, complétion du modèle en s’appuyant sur une enquête épistémologique, cognitive et didactique, description du MPR et reconstruction, enfin validation par confrontation à des données empiriques éventuellement suivie d’un retour sur le modèle.

Dans notre communication, nous nous intéressons à la représentation informatique de ce modèle dans un EIAH. Le niveau atomique de représentation sera celui des praxéologies ponctuelles, à partir duquel pourront être construites des praxéologies locales puis régionales.

Dans ce qui suit, nous présentons tout d’abord la manière dont nous avons formalisé la description des praxéologies ponctuelles puis nous exposons le mode de représentation informatique de ce modèle que nous avons appelé OntoPrax. Nous présentons ensuite des éléments méthodologiques pour la mise en œuvre du modèle OntoPrax. Enfin, nous donnons quelques utilisations possibles d’un MPR dans un EIAH.

2. Description des praxéologies ponctuelles

Dans ce paragraphe, nous présentons un modèle de description des praxéologies ponctuelles.

2.1. Description des types de tâches

Un type de tâches *T* étant donné, une organisation mathématique ponctuelle (notée par la suite OMP) regroupe les tâches pouvant être accomplies par une seule technique, justifiée par une technologie, elle-même légitimée par une certaine théorie. Mais pour un même type de tâches, plusieurs techniques peuvent parfois être envisagées. D’une manière générale l’institution de l’enseignement *I* organise l’étude de ces techniques tout au long de la scolarité. Mais, comme le précise Yves Chevallard (1999), à un niveau scolaire donné on se limite généralement à un petit nombre de techniques :

> … en une institution *I* donnée, à propos d’un type de tâches *T* donné, il existe en général *une seule* technique, ou du moins *un petit nombre* de techniques *institutionnellement reconnues,* à l’exclusion des techniques alternatives

> possibles – qui peuvent exister effectivement, mais alors en *d'autres institutions*. (p. 93)

C'est ainsi qu'à certains types de tâches peuvent être associées plusieurs OMP, l'agrégat de ces dernières formant ce que Corine Castela (2008) appelle une organisation mathématique complexe et qui est usuellement notée $(\mathrm{OMP}_k(T))_k = ([T / \tau_k / \theta_k / \Theta_k])_k$.

La portée d'une technique (Chevallard, 1999), notée $P(\tau)$, est l'ensemble des tâches de T où la technique réussit. La technique tend donc à échouer sur $T \setminus P(\tau)$.

Si, pour une technique τ de T, on peut caractériser sa portée $P(\tau)$, alors on parle de *sous-type de tâches* de T (Chaachoua, 2010). Considérons par exemple le type de tâches $T_{\mathrm{ra\_eq2}}$: « résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{R}$ ». Il existe une technique qui accomplit toutes les tâches de $T_{\mathrm{ra\_eq2}}$: celle du discriminant. Il existe d'autres techniques comme, par exemple, la technique basée sur l'utilisation de la racine carrée qui permet d'accomplir les tâches « résoudre des équations de la forme $P_1^2(x) = k$ ($k > 0$) »[2]. On peut alors considérer l'ensemble de ces tâches comme un sous-type de tâches de $T_{\mathrm{ra\_eq2}}$.

2.2. Description des techniques

Le problème de description des techniques a été soulevé par Marianna Bosch et Yves Chevallard (1999) : « … de quoi est faite une technique donnée ? De quels "ingrédients" se compose-t-elle ? Et encore : en quoi consiste la "mise en œuvre" d'une technique ? ». Si ce problème n'est pas posé explicitement dans les différents travaux qui font usage de l'analyse praxéologique, ces derniers proposent néanmoins des descriptions de ces techniques. Certains les décrivent sous forme d'actions plus ou moins structurées, d'autres les décomposent en sous-tâches. Par exemple, Gisèle Cirade et Yves Matheron (1999) décrivent la technique utilisée pour le type de tâches « résoudre une équation du premier degré », par les sous-tâches : développer une expression algébrique, effectuer les produits, transposer des termes, réduire chacun des membres, résoudre une équation de la forme $ax = b$. Puis les auteurs ajoutent que ce découpage est arbitraire et qu'il s'agit en fait d'un modèle dont l'objectif est de mettre en évidence l'organisation mathématique et de

2. Nous adoptons la notation suivante : $P_i(x)$ désigne un polynôme de degré i.

l'évaluer. Nous voyons ici un réel intérêt dans ce découpage : il renvoie en effet à des tâches reconnues institutionnellement et pour lesquelles une praxéologie mathématique a été mise en place en amont. De ce fait, il permet de mieux situer les difficultés des élèves dans la mise en œuvre d'une technique au niveau des sous-tâches qui la composent.

Nous avons adopté ce point de vue dans notre recherche en distinguant toutefois plusieurs niveaux de description. Une technique peut être en effet décrite soit de façon *générique* quand on se place au niveau du type de tâches, soit de façon *instanciée* quand on se place au niveau d'une tâche. De plus, dans chaque cas, on peut distinguer plusieurs niveaux de granularité de description.

Soit T un type de tâches qui, au sein d'une institution I, a pour organisation mathématique complexe $(\mathrm{OMP}_k(T))_k$. Pour ne pas alourdir la notation avec l'indice k, on notera tout simplement $[T / \tau / \theta / \Theta]$ une organisation ponctuelle associée à T.

Au niveau générique 1, la technique τ est décrite par un ensemble de types de tâches $\{(T_i)_i\}$ qui peuvent être de deux sortes : d'une part, les types de tâches qui n'existent qu'à travers la mise en œuvre des techniques de certains autres types de tâches et sont appelés types de tâches *intrinsèques* ; d'autre part, les types de tâches qui peuvent être prescrits indépendamment aux élèves et sont qualifiés de types de tâches *extrinsèques*.

Remarquons que, dans certains cas, l'ordre des types de tâches constituant une technique revêt une réelle importance. Si notre modèle intègre bien entendu cette question d'ordre, nous n'en rendrons cependant pas compte dans cet article.

Considérons par exemple le type de tâches $T_{\text{ra-eq1}}$ « résoudre algébriquement une équation de degré 1 dans $\mathbb{R}$ ». La technique peut être décrite par une suite de types de tâches [3], $\tau_{\text{ra-eq1}} = \{T_{\text{dev}}, \boldsymbol{T}_{\text{mvt-ad-eg}}, T_{\text{red}}, \boldsymbol{T}_{\text{mvt-mult-eg}}, T_{\text{test.eg}}\}$, où :

- T_{dev} : développer les deux membres (si nécessaire).
- $\boldsymbol{T}_{\text{mvt-adt-eg}}$: transposer les termes en x dans un membre et les termes constants dans l'autre membre (si nécessaire).
- T_{red} : réduire les deux membres (si nécessaire).

3. Nous représentons les types de tâches intrinsèques en composant T en gras.

- $\boldsymbol{T}_{\text{mvt-mult-eg}}$: transposer le facteur de x dans l'autre membre.
- $T_{\text{test.eg}}$: tester l'égalité avec la valeur trouvée.

Dans cet exemple, les types de tâches T_{dev} et T_{red} sont extrinsèques et ont donc leurs propres organisations mathématiques complexes que nous ne présentons pas ici.

Nous avons introduit deux types de tâche $\boldsymbol{T}_{\text{mvt-ad-eg}}$ et $\boldsymbol{T}_{\text{mvt-mult-eg}}$ qui sont intrinsèques dans la mesure où ils ne peuvent pas être prescrits directement aux élèves. Ce sont pourtant des constituants essentiels de la technique, chacun étant doté d'une technique propre justifiée par une technologie, elle-même légitimée par une certaine théorie. Ainsi, une technique de $\boldsymbol{T}_{\text{mvt-ad-eg}}$ est : « Ajouter l'opposé d'un terme aux deux membres de l'égalité ». Souvent, quand la technique devient routinière, elle s'exprime par : « si $a + b = c$ alors $a = c - b$. ». Elle a pour technologie : « On ne change pas une égalité en ajoutant ou en soustrayant le même nombre à chacun de ses membres ».

Précisons que la dénomination de ces types de tâches est propre à notre modèle et ne correspond pas nécessairement à celles utilisées dans l'enseignement. L'indice « mvt-ad-eg », qui a pour signification « mouvement additif dans une égalité », a été introduit lors d'une recherche sur la modélisation de l'apprenant dans un EIAH présentée par Hamid Chaachoua, Marilena Bittar et Jean-François Nicaud (2006).

Les types de tâches qui décrivent une technique sont des ingrédients potentiels de cette technique dans la mesure où, pour certaines tâches, et donc au niveau instancié, un tel type de tâches peut ne pas être convoqué.

Revenons sur la description de la technique $\tau_{\text{ra-eq1}}$. Comme l'un de nous l'a développé (Chaachoua, 2010), le type de tâches $T_{\text{ra-eq1}}$ admet des sous-types de tâches dont l'un joue un rôle important dans l'enseignement : $T_{\text{eq1.1}}$ « Résoudre une équation de la forme $ax = b$ ». Ce sous-type de tâches est introduit au début du collège et est accompli par des techniques arithmétiques puis algébriques[4]. Compte tenu de son importance au sein de cette institution, nous avons donc, dans notre modèle de référence, introduit le sous-type de tâches $T_{\text{eq1.1}}$ dans la description de la technique du type de tâches $T_{\text{ra-eq1}}$. Ce qui donne : $\tau_{\text{ra-eq1}} = \{T_{\text{dev}}, T_{\text{mvt-ad-eg}}, T_{\text{red}}, T_{\text{eq1.1}}\}$.

4. Les praxéologies associées sont développées dans le texte précédemment cité (Chaachoua, 2010).

Nous avons en fait adopté la règle suivante pour la description des techniques : les seuls sous-types de tâches qui interviennent dans la description d'une technique d'un type de tâches *T* sont ceux de *T*. Dans l'exemple ci-dessus, on ne prendra donc pas en compte à ce niveau les sous-types de tâches de T_{dev} ou T_{red} mais en revanche on intégrera les sous-types de tâches de $T_{\text{ra-eq1}}$.

Au niveau instancié 1, la technique est décrite par un ensemble de tâches $(t_i)_i$ qui sont des instanciations des types de tâches $\{(T_i)_i\}$ du niveau générique.

À chaque T_i (de la description générique de la technique τ) est associé un ensemble d'organisations ponctuelles $(\text{OMP}_k(T_i))_k$ dans *I*. La mise en œuvre de T_i dans la technique τ repose donc sur la mobilisation d'une organisation ponctuelle de T_i. Mais, au niveau générique, on ne peut pas identifier l'organisation ponctuelle de T_i à mobiliser, sauf dans le cas où T_i n'admet qu'une seule technique, c'est-à-dire que l'OM de T_i est simple. Dans les autres cas, nous avons plusieurs techniques possibles et donc plusieurs *praxis* possibles. Au niveau générique 2, on peut ainsi associer à τ plusieurs descriptions à partir de ces *praxis*.

En revanche, au niveau instancié, on peut identifier les organisations ponctuelles que l'on peut mobiliser (dans le cas de l'analyse *a priori*) ou qui est effectivement mobilisée (dans le cas de l'analyse d'une production) pour chaque T_i. Dans ce cas, on peut décrire la technique par une succession de *praxis* ce qui correspond au niveau instancié 2 : $\tau = \{(t_i, \tau_i)_i\}$. Chaque technique τ_i peut être décrite à l'aide d'une suite de *praxis* jusqu'à un niveau que l'on considère comme élémentaire. Pour cela, nous avons introduit la notion de *type de tâches élémentaire* : c'est un type de tâches dont il n'est pas nécessaire d'expliciter la technique.

Dans la suite de notre article, nous nous limiterons au niveau générique.

2.3. Description des technologies

Soit *T* un type de tâches d'une OM ponctuelle $[T / \tau / \theta / \Theta]$. Au niveau 1, la technique τ est décrite par un ensemble $\{T_i\}$. La technologie θ a pour fonction de justifier en quoi la mise en œuvre des types de tâches T_i permet d'accomplir le type de tâches *T*. Elle ne comporte pas nécessairement toutes les technologies des techniques des T_i sauf si un type de tâches T_i joue un rôle clé dans la technique τ. Dans ce cas, la technologie θ_i peut intervenir, éventuellement avec une adaptation, dans la description de la technologie θ.

3. Le modèle OntoPrax

Pour représenter informatiquement un tel MPR, nous avons fait le choix de l'approche ontologique. En effet, celle-ci permet de décrire un univers par des ensembles et des relations entre ensembles, ou éléments d'ensembles, ce qui correspond parfaitement au modèle praxéologique.

3.1. Le modèle ontologique

Une ontologie en informatique, et plus précisément en ingénierie des connaissances, est définie comme *la spécification explicite d'une conceptualisation* – voir par exemple Thomas R. Grüber (1993). L'ontologie fournit une description des concepts et relations partagés par une communauté d'acteurs, humains ou logiciels, au sujet d'un univers donné. Elle permet de partager et de réutiliser les connaissances sur cet univers entre ces acteurs. Le terme ontologie a été emprunté à la philosophie, où une ontologie est une étude systématique de l'existence. *L'engagement ontologique* d'un acteur signifie que ses actions observables sont cohérentes avec les définitions de l'ontologie.

Selon Patrick John Hayes (2004), une ontologie peut être formellement représentée en utilisant les langages RDF/S, et surtout OWL qui possède une sémantique précise définie par une recommandation du W3C – voir sur ce point la contribution de Deborah L. McGuinness et Frank van Harmelen (2004).

3.2. Définition du modèle OntoPrax

Notre objectif est de développer une ontologie des praxéologies qui réponde aux conditions suivantes : constituer une référence pour une communauté de praticiens, être complète et cohérente, être calculable et interopérable, être manipulable par des humains, fournir des services à des EIAH. C'est ainsi que sont définis quatre ensembles :

- Ensemble de types de tâches (ETT). Un type de tâches T est défini par un verbe (action) et des compléments (où un complément est une notion). Exemple : décomposer un entier en facteurs premiers.

- Ensemble de techniques (Eτ). Une technique τ est composée de plusieurs types de tâches organisés par des opérateurs d'ordonnancement (//, et, ou, et puis, …).
- Ensemble de technologies (Eθ). Une technologie est une proposition vraie dans l'univers de la praxéologie. Elle peut être exprimée par une égalité, une implication, une équivalence convenablement quantifiée. Elle peut avoir comme statut celui de théorème, de loi, propriété, de règle du contrat didactique, etc.
- Ensemble de théories (EΘ). Une théorie est un ensemble de technologies regroupées de façon cohérente par rapport à l'enseignement du domaine.

et les relations entre ces ensembles :

- Un type de tâches est accompli par une ou plusieurs techniques.
- Une technique accomplit un et un seul type de tâches.
- Une technique est justifiée par une et une seule technologie.
- Une technologie justifie une ou plusieurs techniques.
- Une technologie est intégrée dans une théorie.
- Une théorie intègre une ou plusieurs technologies.

Ces relations permettent de générer les praxéologies ponctuelles. Pour construire des praxéologies locales et régionales, nous introduisons les thèmes et secteurs (Chevallard, 1999). Ainsi, les types de tâches seront rattachés à un thème qui sera lui-même rattaché à un secteur.

Les éléments présentés ci-dessus permettent de construire un modèle praxéologique de référence. Nous examinerons d'autres ajouts envisagés au modèle dans le paragraphe 4.

3.3. Exemple de mise en œuvre

Pour valider notre modèle, nous l'avons mis en œuvre dans trois domaines : conception expérimentale en chimie, électricité et algèbre élémentaire. Dans ce paragraphe, nous présentons le cas de l'algèbre élémentaire. Pour sa représentation informatique nous avons choisi d'utiliser le logiciel Protégé [5].

Pour la construction du modèle de référence nous nous sommes appuyés sur les travaux de Marie-Caroline Croset (2009), Hamid Chaachoua (2010), Geneviève Ferraton (2011) et Julia Pilet (2012), qui se placent dans le cadre

5. http://protege.stanford.edu.

de l'enseignement secondaire en France et principalement au collège et en seconde (élèves de 11-16 ans).

J. Pilet (2012, p. 81) a défini une OM globale (OMG) du domaine algébrique à partir de trois OM régionales : OMR_1 « Expressions algébriques », OMR_2 « Formules » et OMR_3 [6] « Équations ». Dans sa thèse, elle a développé OMR_1 en trois OM locales : OML_1 « Génération des expressions », OML_2 « Équivalence des expressions » et OML_3 « Algèbre des polynômes ». Dans ce qui suit, nous nous limitons à l'étude de OML_3.

Selon J. Pilet (2012), cette OML regroupe quatre genres de tâches qui, selon ses formulations, sont : développer une expression algébrique de type donné, factoriser une expression algébrique de type donné, réécrire un monôme de type donné et calculer une expression algébrique. Ce dernier type de tâches signifie calculer la valeur de l'expression lorsqu'on substitue une (ou des) valeur(s) numérique(s) à la (ou aux) lettre(s) qui y figure(ent). Toutefois, nous appuyant également sur le travail mené par G. Ferraton(2011), nous nous restreignons aux transformations des expressions algébriques et donc aux types de tâches que sont réduire, développer et factoriser une expression algébrique. Notons qu'en ce qui concerne la réduction, nous avons fait un choix différent de celui de J. Pilet (2012) pour qui :

> La réduction d'une expression algébrique correspond au type de tâches $T_{\text{FDA-mon+mon}}$ *Factoriser une somme de monômes pour en donner la forme développée et réduite*. Il s'agit d'un cas particulier de T_{FDA} *Factoriser une somme algébrique dans laquelle le facteur commun est apparent dans tous les termes*. (pp. 89-90)

Un cadre étant fixé, la construction d'un MPR se poursuit donc par la caractérisation des quadruplets [T / τ / θ / Θ]. Elle nécessite ainsi un long et laborieux travail reposant sur d'incessants allers et retours entre les programmes et les manuels (de différents niveaux et de diverses époques), bien entendu couplés à une enquête épistémologique via une analyse de travaux en didactique. Cependant, certaines grandes étapes se doivent d'être respectées :

- caractérisation des différents types de tâches institutionnels ;

6. Dans Chaachoua (2010), on trouve une description détaillée de l'OMR3.

- mise en place des définitions de référence des précédents types de tâches ;
- détermination des OMP associées avec le cas échéant spécification des sous-types de tâches en jeu ;
- description des techniques, technologies et théories relatives à chacune d’elles ;
- retour sur les différents types (sous-types) de tâches pour indiquer lesquels pourront être qualifiés d’intrinsèques, d’extrinsèques ou encore d’élémentaires ;
- implémentation dans le logiciel Protégé ;
- modifications éventuelles du modèle en cas de problème.

Ne pouvant bien entendu envisager de reprendre ici l’intégralité du travail qui a été mené, nous nous proposons cependant d’en détailler quelques points. Le tableau ci-dessous (tableau 1) résume ainsi le cadre général adopté en précisant les OM globale, régionale et locale considérées puis les types et sous-types de tâches en jeu.

OMG	Algèbre élémentaire		
OMR	Expressions algébriques (notées par la suite EA)		
OML	Transformer une EA		
Comprenant les types de tâches…	Réduire une EA [7]	Développer une EA [8]	Factoriser une EA [9]
Sous-types de tâches associés…	– Réduire un produit de monômes. – Réduire une somme de monômes de même degré « sans parenthèses [10] » avec des coefficients entiers naturels. – Réduire une somme	– Développer un produit en utilisant la simple distributivité. – Développer un produit en utilisant la double distributivité. – Développer	– Factoriser $ka + kb$ (respectivement $ka - kb$) où k, a et b sont des polynômes. – Factoriser $a^2 + 2ab + b^2$ où a et b sont des

7. C’est-à-dire écrire l’expression algébrique considérée comme une somme de monômes non semblables.

8. C’est-à-dire écrire l’expression algébrique considérée comme une somme de monômes.

9. C’est-à-dire écrire l’expression algébrique considérée comme un produit de polynômes.

10. Dans toute la suite, « sans parenthèses » signifie sans présence d’une somme algébrique entre parenthèses.

	de monômes de même degré « sans parenthèses » avec des coefficients quelconques. – Réduire une somme de monômes de degrés différents « sans parenthèses ». –Réduire une expression littérale présentant à la fois des produits et des sommes de monômes « sans parenthèses ». – Supprimer des parenthèses précédées d'un signe « + » et non suivies d'un signe « × » ou « ÷ ». – Supprimer des parenthèses précédées d'un signe « − » et non suivies d'un signe « × » ou « ÷ ». – Réduire une expression algébrique complexe pouvant comporter des produits, des sommes mais également des parenthèses (au sens précédemment défini).	$(a + b)^2$ où a et b sont des monômes. – Développer $(a–b)^2$ où a et b sont des monômes. – Développer $(a + b)(a – b)$ où a et b sont des monômes. – Développer un produit en combinant un ou plusieurs des cinq sous-types de tâches précédents. – Développer une somme algébrique dont certains termes sont des produits dits « développables » (c'est-à-dire qui relève d'un des six sous-types de tâches précédents).	monômes. – Factoriser $a^2 – 2ab + b^2$ où a et b sont des monômes. – Factoriser $a^2 – b^2$ où a et b sont des polynômes. – Factoriser $ax^2 + bx + c$ (a, b et c réels, avec a non nul), grâce au calcul du discriminant. – Factoriser $ax^4 + bx^2 + c$ (a, b et c réels, avec a non nul). – Factoriser en combinant un ou plusieurs des six sous-types de tâches précédents.

Tableau 1. Structure du modèle de référence utilisé.

Ces précisions étant données, penchons-nous maintenant plus avant sur le cas de la réduction. Ce type de tâches admet donc pour nous une OM complexe (OMC) composée de huit OMP. Chacune de ces OMP peut alors être décrite à l'aide d'un tableau comme celui-ci :

T	Réduire un produit de monômes.
τ	– Regrouper les facteurs de même « espèce » (les nombres avec les

	nombres et les différentes lettres avec leurs puissances respectives). – Effectuer les produits de nombres et, pour chaque lettre, utiliser la règle concernant le produit de puissances ($a^n \times a^n = a^{n+m}$). – Respecter les conventions d'écriture (les nombres se placent avant les lettres, le signe × peut être supprimé entre un nombre et une lettre, entre les puissances de différentes lettres…).
θ	– Commutativité et associativité de la multiplication. – Unicité de l'écriture canonique des expressions algébriques. – Règle concernant le produit de puissances. – Conventions d'écriture.
Θ	Algèbre.

Tableau 2. OMP relative à la réduction d'un produit de monômes, d'après G. Ferraton (2011).

L'implémentation de ce simple exemple dans le logiciel Protégé nous a permis de mettre à jour différents problèmes (voir figure 1). Le premier est d'ordre purement formel ; en effet, quelles notations adopter pour désigner les différentes OMP ? De plus, si la technique présentée précédemment en langage naturel respecte trois étapes, elle n'est cependant pas clairement définie comme une suite de types de tâches. Il convient donc de la reformuler.

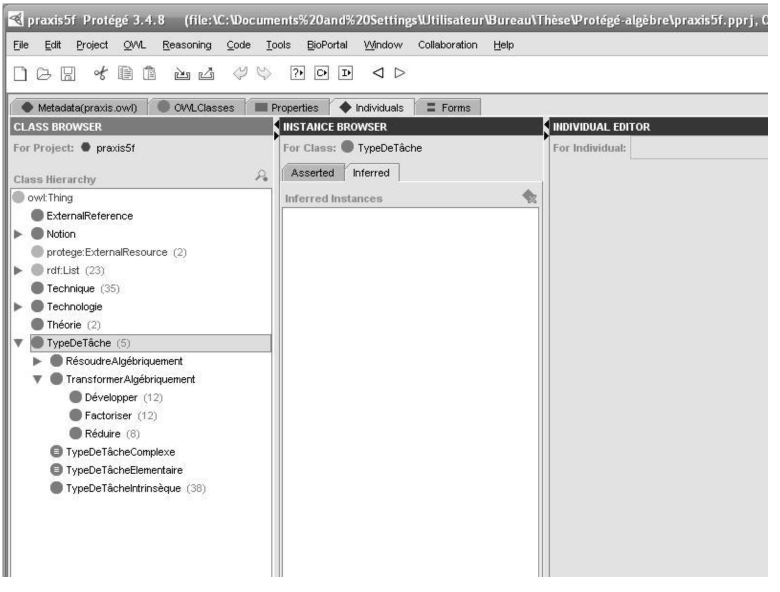


Figure 1. Interface « provisoire » du logiciel Protégé.

La question des notations se trouve réglée dès lors que l'on adopte des conventions d'écriture précises ; voici les principales caractéristiques de celles que nous avons choisies.

Adoptant le style « minuscule/Majuscule », chaque type de tâches relevant de la réduction (respectivement du développement ou de la factorisation) voit son nom débuter par « red » (respectivement par « dev » ou « fact »); ce préfixe est alors suivi d'une suite d'abréviations reprenant les principales caractéristiques de la description de ce type de tâches. C'est ainsi que « réduire un produit de monômes » devient « redProd ». Notons toutefois qu'un onglet spécifique de l'interface précisera par une phrase en français la signification de chacune de ces notations.

De même, le nom de la technique associée à tel ou tel type de tâches reprend le nom de ce dernier mais en étant précédé du mot « tech ». C'est ainsi que la technique relative à redProd est notée « techRedProd ». Cependant, un type de tâches peut parfois être traité à l'aide de différentes techniques, dans ce cas on ajoute un numéro : « tech/nom du type de tâches/numéro ». Cela permet ainsi de limiter la taille des différents noms attribués.

En ce qui concerne les technologies, nous adoptons un point de vue totalement différent. En effet, dans le domaine choisi, il apparaît que celles-ci relèvent généralement de conventions, propriétés ou théorèmes aux noms explicites. Nous nous contentons donc de les abréger en adoptant là encore le style « minuscule/Majuscule ». À titre d'exemple, la commutativité et l'associativité de la multiplication sont respectivement notées « commMult » et « assMult ».

Les théories en jeu étant ici l'arithmétique et l'algèbre, nous les désignons tout simplement par leur nom.

La reformulation de certaines techniques en termes d'ensemble de types de tâches nécessite, quant à elle, un travail beaucoup plus spécifique. Reprenons ici l'exemple de redProd. La technique initialement envisagée se composait de trois étapes (voir tableau 2). Nous en proposons une nouvelle description à l'aide des quatre types de tâches suivants :

- regrFactMêmeEsp : regrouper les facteurs de même espèce (les nombres avec les nombres, les différentes lettres avec leurs puissances respectives) ;

- prodNombres : effectuer les produits de nombres réels ;
- redProdPuissMêmeExpr : réduire les produits de puissances d'une même expression ;
- respConv : respecter les différentes conventions d'écriture.

En fait, la seconde étape, « Effectuer les produits de nombres, et pour chaque lettre, utiliser la règle concernant le produit de puissances », (du tableau 2) a été remplacée par deux types de tâches « redProdPuissMêmeExpr » et « prodNombres ».

Ces modifications et adaptations des niveaux de granularité de description des praxéologies ont eu lieu lors de l'implémentation du modèle dans le logiciel Protégé. Elles impliquent alors un changement de notre modèle de référence. En effet, l'OMC associée à la réduction se compose maintenant des huit OMP définies dans le tableau 1 et auxquelles se rajoute une neuvième s'appuyant sur redProdPuissMêmeExpr (voir figure 2).

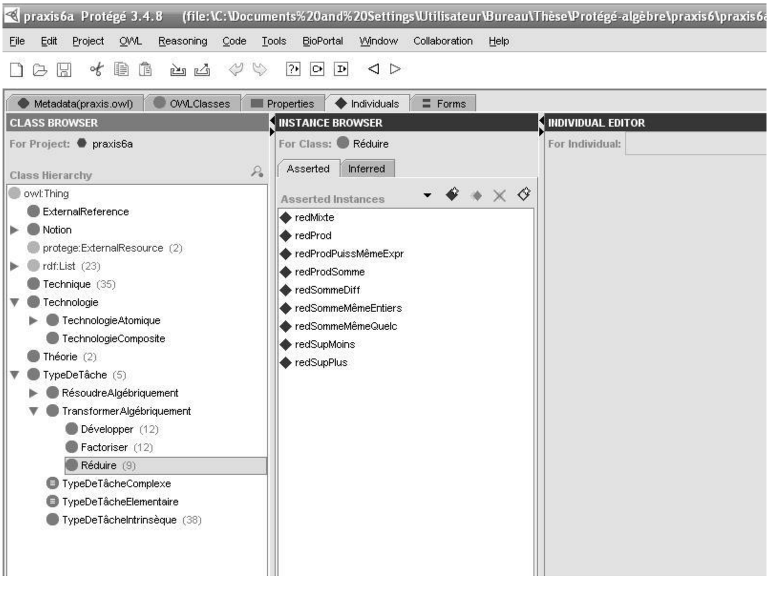


Figure 2. Les neuf sous-types de tâches associés à la réduction.

Attardons-nous maintenant sur les trois autres types de tâches entrant dans la description de techRedProd. Si regrFactMêmeEsp et respConv sont facilement étiquetés comme intrinsèques et élémentaires, il n'en va cependant pas de même pour prodNombres. Sans conteste extrinsèque, ce type de tâches ne relève aucunement du secteur de l'algèbre élémentaire, mais de l'arithmétique, et se doit donc d'être référencé séparément (voir figure 3). C'est ainsi que nous ne détaillons pas ici sa technique et que, dans ce cadre précis, prodNombres peut également être qualifié d'élémentaire.

Les techniques relatives à certains types de tâches ne sont justifiées que par une seule technologie[11], alors que d'autres en mentionnent plusieurs (voir tableau 2).

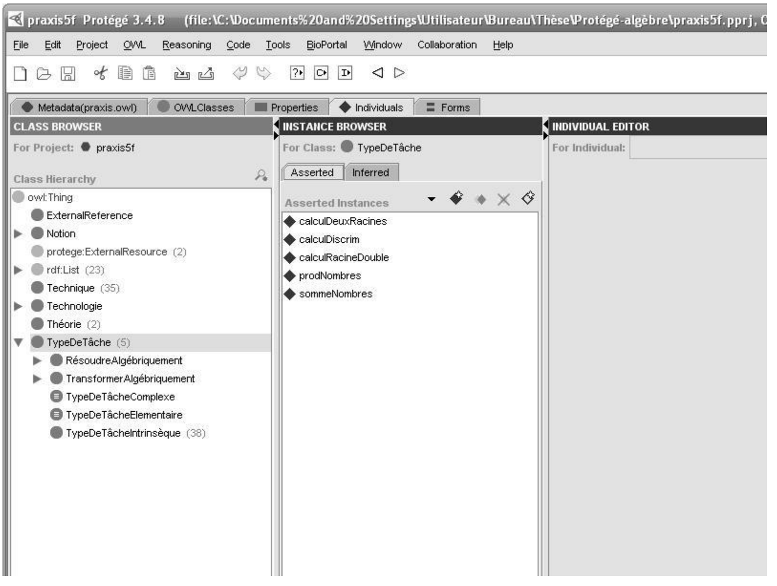


Figure 3. Types de tâches ne rentrant pas dans le cadre de l'OML « Transformer une expression algébrique » car relevant d'un autre secteur.

Mais si plusieurs arguments technologiques participent de manière non négligeable à la justification de telle ou telle technique, seuls certains revêtent un rôle majeur. Nous avons donc fait le choix de les distinguer en les reprenant dans un onglet spécifique appelé « est justifiée principalement par ». En ce qui concerne redProd, le volet technologique repose ainsi sur :

- commMult ;
- assMult ;
- RègleProdPuiss (×=) ;
- convEcritureAlg (conventions d'écriture d'expressions algébriques : les nombres se placent avant les lettres, le signe multiplier peut-être

---

11. La technologie justifiant techRedProdPuissMêmeExpr (c'est-à-dire la technique accomplissant le type de tâches « Réduire des produits de puissances d'une même expression ») repose exclusivement sur règleProdPuiss ($x^n \times x^m = x^{n+m}$).

supprimé entre un nombre et une lettre, entre les puissances de différentes lettres…).

Et seule règleProdPuiss est reprise dans la rubrique « est justifiée principalement par » (voir figure 4).

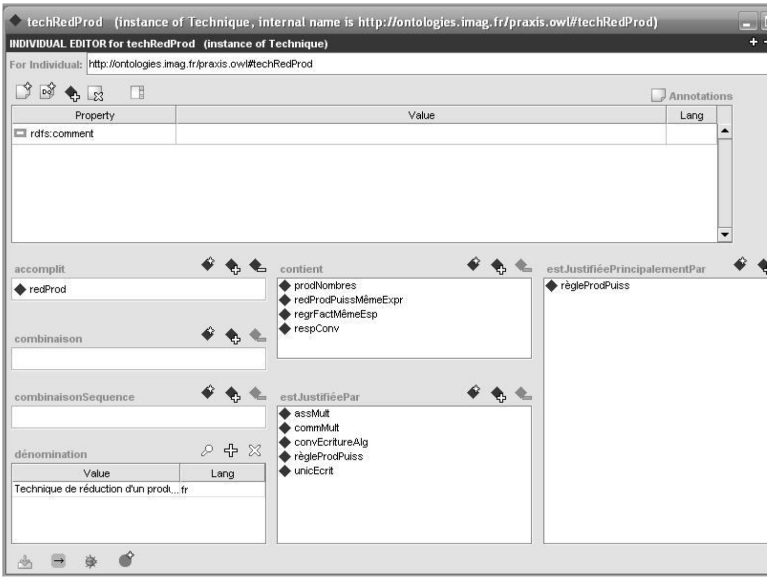


Figure 4. Description et justification de techRedProd dans Protégé.

En résumé la praxéologie ponctuelle du type de tâches redProd est présentée dans le tableau suivant :

T	redProd
τ	techRedProd : – regrFactMêmeEsp – prodNombres – redProdPuissMêmeExpr – respConv
θ	– commMult ; – assMult ; – unicEcrit – règleProdPuiss ; – convEcritureAlg
Θ	Algèbre.

Tableau 3. OMP relative à la réduction d'un produit de monômes implémentée dans Protégé.

Ce n'est donc que pas à pas que s'élabore une telle ontologie. Certes, nous ne l'avons pas encore finalisée, mais nos réalisations prouvent déjà que notre modèle fonctionne. Enfin, si l'investissement peut apparaître conséquent, il revêt selon nous un réel intérêt comme en témoigne le paragraphe suivant.

4. Exemples d'utilisations du modèle OntoPrax

Une telle représentation associée aux possibilités de calcul de l'outil informatique nous ouvre alors bien des perspectives. Nous en donnons ici quelques exemples.

4.1. Représenter et analyser les praxéologies institutionnelles

Dans le cadre d'une institution *I* préalablement choisie, nous pouvons donc, à partir d'une analyse des programmes et des manuels, construire et implémenter une ontologie institutionnelle (voir paragraphe 5). On peut alors visualiser des cartes praxéologiques institutionnelles pour explorer ce qui est attendu par telle ou telle institution. De plus, la comparaison automatique de l'ontologie institutionnelle avec celle de référence permet une étude objective des types de tâches, des techniques, des technologies et/ou des théories institutionnelles. Sont alors pointés des manques institutionnels, des techniques potentiellement viables ou à même de répondre à telle ou telle problématique didactique… De même, si plusieurs praxéologies institutionnelles (par exemple celles relatives à différents pays) sont disponibles, des analyses comparatives sont grandement facilitées.

4.2. Indexation de ressources

Le problème d'indexation de ressources en ligne est au cœur des plateformes généralistes de mutualisation de ressources éducatives comme Merlot[12] (USA) ou ARIADNE[13] (Europe). Les solutions adoptées, associant à une ressource des mots clés libres, sont très peu efficaces. Diverses communautés développent aussi de telles plateformes : l'association Sésamath[14] organise ses ressources dans une structure éditoriale similaire à celle d'un manuel ; le projet européen Inter2geo[15] associe à une ressource

12. http://www.merlot.org.

13. http://www.ariadne-eu.org.

14. sesamath.net.

15. i2geo.net.

des capacités des programmes comme « Connaître et utiliser la relation entre un angle inscrit et l’angle au centre ». Certes cette dernière solution fournit une information plus pertinente et efficace que les autres mais elle nécessite tout de même une actualisation à chaque changement de programme ou lors de l’intégration à la plateforme d’une nouvelle institution. Nous proposons de ce fait une indexation des ressources via le MPR. En effet, celui-ci a comme propriété d’être stable dans le temps et peut constituer une référence commune pour plusieurs institutions. Précisons que le MPR peut tout de même faire l’objet de modifications, et ce pour des raisons épistémologiques ou didactiques.

Pour une institution donnée, il s’agit donc de rattacher les capacités et les compétences des programmes au MPR. Les ressources sont alors directement indexées au MPR qui, lui, est rattaché aux programmes. Et, en cas de changement de programmes, il suffira d’actualiser le lien entre programmes et MPR pour que l’indexation des ressources soit de fait mise à jour.

4.3. Aide à la conception de parcours d’apprentissage dans un EIAH

La tâche de conception, bien qu’elle relève de l’activité professionnelle de l’enseignant dans son exercice habituel, se révèle lourde et complexe dans le cas d’une activité supportée par un EIAH : l’enseignant doit expliciter ses intentions, organiser et structurer *a priori* l’activité, anticiper les rétroactions à délivrer aux élèves, prévoir une partie des régulations, etc.

Une première mise en œuvre de cette utilisation a été réalisée dans notre équipe dans le domaine de l’électricité au collège. Le principe est qu’à partir d’un choix d’un niveau scolaire, d’une discipline, d’un domaine et d’un secteur de physique, le système propose une liste de types de tâches. Une fois que le type de tâches est choisi par l’enseignant, le système affiche la (ou les) technique(s) attendue(s) avec les technologies associées. Se poursuivent alors des interactions entre le système et l’enseignant pour la spécification des tâches qui seront proposées aux élèves et les rétroactions du système.

L’aide à la conception d’un parcours peut s’appuyer au préalable sur un diagnostic de l’état de connaissance de l’élève. C’est l’exemple du travail de thèse de J. Pilet (2012) qui, dans le domaine de l’algèbre élémentaire, a élaboré un modèle de construction de parcours d'enseignement différenciés à partir d'un diagnostic. Cette recherche montre d'une part l'importance du modèle de praxéologie de référence dans le processus de construction de parcours et d'autre part le rôle d'un EIAH dans le calcul de ces parcours compte tenu de la complexité du modèle.

5. Évolution du modèle OntoPrax

Pour développer les utilisations présentées dans le paragraphe précédent, nous avons enrichi le modèle actuel en ajoutant des caractéristiques institutionnelles des praxéologies. Cependant, ces ajouts n'ont pas encore été implémentés.

Dans ce paragraphe, nous introduisons quelques notions et critères pour mesurer le degré d'importance d'un type de tâches dans une institution.

Pour chaque type de tâches extrinsèque, nous distinguons deux statuts distincts, à savoir celui d'*objet* quand il est prescrit en tant que tel et celui d'*outil* quand il intervient dans une technique d'un autre type de tâches. Par exemple, le type de tâches « Factoriser une expression algébrique » a le statut d'objet mais aussi d'outil puisqu'il peut intervenir dans la technique d'autres types de tâches comme « Étudier le signe d'une expression algébrique ».

Selon le niveau scolaire, un type de tâches peut avoir le statut d'objet, celui d'outil ou les deux. Dans l'exemple précédent, le type de tâches « Factoriser une expression algébrique » a le statut d'objet en classes de 4^{e} (élèves de 13-14 ans) et 3^{e} (élèves de 14-15 ans), et d'outil de la troisième jusqu'à la terminale (élèves de 17-18 ans).

Pour mieux rendre compte de l'importance d'un type de tâches au sein des différents niveaux scolaires d'une institution, nous introduisons donc les critères suivants :

- O^S, comme objet sensible, qui prend la valeur 0 s'il n'est pas explicité dans les programmes, 1 s'il l'est et 2 s'il figure également dans le socle commun ;
- T^0, qui prend la valeur 0 si le type (ou sous-type) de tâches n'est pas prescrit dans les manuels et 1 s'il l'est avec un certain seuil (qui reste à déterminer) ;

- T^1, qui prend la valeur *n* si, dans la praxéologie institutionnelle, le type de tâches intervient dans la technique de *n* autres types de tâche au niveau 1 de description;
- T^2, qui prend la valeur *n* si, dans la praxéologie institutionnelle, le type de tâches intervient dans la technique de *n* autres types de tâches au niveau 2 de description.

Les deux critères O^S et T^0 sont renseignés manuellement alors que T^1 et T^2 sont calculés automatiquement à partir du modèle OntoPrax.

À chaque niveau scolaire de *I*, on peut alors obtenir la matrice des niveaux d’intervention d’un type de tâches *T* au sein d’une institution organisée selon un ou plusieurs niveaux scolaires (voir tableau 4).

Niveaux	O^S	T^0	T^1	T^2
6e	0	0	0	0
5e	1	1	2	0
4e	1	1	2	0
3e	0	0	2	0

Tableau 4. Matrice des niveaux d’intervention du type de tâches « Réduire une expression littérale » au collège en France.

Si on considère le type de tâches « Réduire une expression littérale » dans l’enseignement du collège en France, le tableau 4 indique sa matrice des niveaux d’intervention. On voit que ce type de tâches est présent en tant qu’objet et outil en classe de 5e (élèves de 12-13 ans) et de 4e, et qu’à partir de la classe de 3e, il intervient seulement comme outil.

Le calcul de telles matrices nous renseigne donc sur l’importance d’un type de tâches dans un curriculum. Il servira essentiellement pour informer l’EIAH dans le calcul des rétroactions ou dans le processus d’assistance à la construction d’un parcours d’apprentissage par un enseignant ou un tuteur artificiel.

6. Conclusion

Dans les recherches en EIAH basées sur des modèles didactiques, la représentation informatique de ces modèles rend nécessaire leur transformation pour répondre à certains critères comme la calculabilité et la généricité. L’exigence de généricité signifie que le modèle ne doit pas être conçu de façon instanciée à un domaine de connaissances donné. Pour cette raison, sa mise en œuvre dans trois disciplines a été développée : mathématiques (algèbre), chimie (conception expérimentale) et physique (électricité). Cette représentation doit aussi intégrer la spécificité d'une institution donnée, ce qui est obtenu à travers certains outils comme la matrice d'intervention d'un type de tâches dans une institution.

Au-delà de ces exigences de représentation informatique du modèle praxéologique de référence, notre recherche vise à construire des outils pour extraire différentes praxéologies institutionnelles ou des praxéologies personnelles (bien que celles-ci n'aient pas fait objet de développement dans cet article). Elle fournit également des outils permettant d'informer des modules informatiques de modélisation de l'apprenant, de suivi de l'apprenant ou d'aide à la conception de parcours d'apprentissage.

Nous avons montré que le modèle praxéologique permet de répondre à ces exigences. Le MPR joue un rôle structurant non seulement pour les autres praxéologies mais aussi pour les différents calculs comme celui des rétroactions.

Cet article montre les grandes lignes de la construction du modèle et des exemples de sa mise en œuvre. Ces utilisations n'ont pas encore été implémentées car cela nécessite le développement d'autres outils et d'autres formalismes dont certains ont été présentés dans le paragraphe 5.

Notre modèle OntoPrax peut fournir des services et des outils pour le chercheur en didactique afin, par exemple, de faire des analyses de curriculums. Pour cette raison, nous élaborons un cahier des charges pour la construction et l'implémentation par un chercheur des praxéologies de référence, institutionnelles et personnelles relatives à un domaine de connaissance. Enfin, ce modèle pourrait alors constituer une aide précieuse à tout enseignant et contribuer, même modestement, à l'équipement praxéologique de toute une profession, suivant les lignes tracées par Yves Chevallard et Gisèle Cirade (2010).

Références

Bosch, M. & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *19*(1), 77-124.

Bosch, M. & Gascón, J. (2005). La praxéologie comme unité d’analyse des processus didactiques. Dans A. Mercier & C. Margolinas (Éds), *Balises pour la didactique des mathématiques* (pp. 107-122). Grenoble : La pensée sauvage.

Castela, C. (2008). Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d’apprentissage ignorés par les institutions d’enseignement. *Recherches en didactique des mathématiques, 28*(2), 135-182.

Chaachoua, H. (2010). *La praxéologie comme modèle didactique pour la problématique EIAH. Étude de cas : la modélisation des connaissances des élèves* (Note de synthèse pour l’habilitation à diriger les recherches). https://halshs.archives-ouvertes.fr/tel-00922383/

Chaachoua, H., Bittar, M. & Nicaud, J. (2006). Student’s modelling with a lattice of conceptions in the domain of linear equations and inequations. Dans J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (Éds), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 281-288). Prague : PME.

Chevallard, Y. (1999). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l’approche anthropologique. Dans R. Noirfalise (Éd.), *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques* (pp. 91-118). Clermont-Ferrand : IREM.

Chevallard, Y. & Cirade, G. (2010). Les ressources manquantes comme problème professionnel. Dans G. Gueudet & L. Trouche (Éds), *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques* (pp. 41-55). Rennes : PUR.

Cirade, G. & Matheron, Y. (1999). Équations du premier degré et modélisation algébrique. Dans R. Noirfalise (Éd.), *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques* (pp. 199-216). Clermont-Ferrand : IREM.

Croset, M.-C. (2009). *Modélisation des connaissances des élèves au sein d’un logiciel éducatif d’algèbre. Étude des erreurs stables inter-élèves et intra-élève en termes de praxis-en-acte* (Thèse de doctorat). https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00444557v1

Ferraton, G. (2011). *Rapport institutionnel à l'objet calcul littéral au collège : construction et utilisation d'un modèle praxéologique de référence.* (Mémoire de master). Université Joseph Fourier, Grenoble.

Grüber, T. R. (1993). A translation approach to portable ontologies. *Knowledge Acquisition*, *5*(2), 199-220.

Hayes, P. J. (2004). RDF Semantics. *W3C Recommendation, World-Wide Web Consortium*.

McGuinness, D. L. & van Harmelen, F. (2004). *Web ontology language overview*.
http://www.w3.org/TR/owl-features/

Pilet, J. (2012). *Parcours d'enseignement différencié appuyés sur un diagnostic en algèbre élémentaire à la fin de la scolarité obligatoire : modélisation, implémentation dans une plateforme en ligne et évaluation* (Thèse de doctorat).
https://halshs.archives-ouvertes.fr/tel-00784039/

Integración de los números negativos en el modelo epistemológico de referencia de la modelización algebraico-funcional

Eva Cid

Dpto. de Matemáticas, Universidad de Zaragoza, España

Marianna Bosch

IQS School of Management, Universitat Ramon Llull, España

Josep Gascón

Dt. Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, España

Noemí Ruiz-Munzón

Escola Univ. del Maresme, Universitat Pompeu Fabra, Barcelona, España

Abstract. In this work we propose to articulate the reference epistemological model (REM) of the introduction of negative numbers in an algebraic environment defined in Cid & Bolea (2010) and Cid & Ruiz-Munzón (2011) with the REM of algebraic-functional modelling defined in Ruiz-Munzón, Bosch & Gascón (2011) and Ruiz-Munzón (2010). The first stages of the latter REM incorporates the problematics of negative numbers as necessary objects for the algebraic calculation.

Resumé. Dans ce travail nous nous proposons d'articuler le modèle épistémologique de référence (MER) d'introduction des nombres négatifs dans un environnement algébrique défini dans Cid & Bolea (2010) et Cid & Ruiz-Munzón (2011) avec le MER de modélisation algébrique-fonctionnelle défini dans Ruiz-Munzón, Bosch & Gascón (2011) et Ruiz-Munzón (2010). Pour cela, nous réorganisons les premières étapes de ce dernier MER, en incorporant la problématique des nombres négatifs comme objets nécessaires pour le calcul algébrique.

Resumen. En este trabajo nos proponemos articular el MER de introducción de los números negativos en un entorno algebraico definido en Cid & Bolea (2010) y Cid & Ruiz-Munzón (2011) con el MER de modelización algebraico-funcional definido en Ruiz-Munzón, Bosch & Gascón (2011) y Ruiz-Munzón (2010). Para ello, reorganizaremos las primeras etapas de este último MER, incorporando la problemática de los números negativos como objetos necesarios para el cálculo algebraico.

IV[e] congrès international sur la TAD (Toulouse, 21-26 avril 2013)

Axe 2. *L'analyse praxéologique comme outil de l'analyse et de l'ingénierie didactiques*

Cid, E., Bosch, M., Gascón, J. & Ruiz-Munzón, N. (2017). Integración de los números negativos en el modelo epistemológico de referencia de la modelización algebraico-funcional. Dans G. Cirade et al. (Éds), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* (pp. 325-341). https://citad4.sciencesconf.org

1. El MER de modelización algebraico-funcional

Diversas investigaciones en el seno de la TAD (Chevallard, 1989a, 1990; Gascón, 1993, 1995; Bolea, Bosch & Gascón, 1998; Bolea, 2003) han cuestionado explícitamente el modelo epistemológico-didáctico del álgebra elemental dominante en las instituciones escolares. Este modelo, que suele recibir el nombre de aritmética generalizada, se caracteriza por considerar el álgebra como un mero epifenómeno de la aritmética: las expresiones algebraicas surgen ante la necesidad de representar y manipular números desconocidos y las tareas específicamente algebraicas se reducen a la manipulación formal de expresiones algebraicas con letras y números, estableciendo una distinción absoluta entre los datos conocidos y las incógnitas, y a la resolución también formal de ecuaciones e inecuaciones (Bolea, 2003).

Este cuestionamiento ha propiciado una línea de investigación (Chevallard, 1989a, 1989b, 1990; Gascón, 1995; Bolea, Bosch & Gascón, 1998, 2001; Bolea, 2003; Ruiz-Munzón, 2006, 2010; Ruiz-Munzón, Bosch & Gascón, 2010) que busca una introducción escolar del álgebra como herramienta funcional que permita llevar a cabo una actividad de modelización matemática ya que, dado el carácter totalmente algebrizado de la matemática superior, considera que el álgebra no debe aparecer inicialmente como un contenido más de la enseñanza, al mismo nivel de las demás organizaciones matemáticas que se estudian en la escuela (aritmética, geometría, etc.), sino como un instrumento genérico de modelización de todas las organizaciones matemáticas escolares, dando lugar a lo que se ha dado en llamar un proceso de algebrización de las organizaciones matemáticas (Ruiz-Munzón, 2010).

Partiendo de esta hipótesis, Bosch, Gascón y Ruiz-Munzón (Ruiz-Munzón, Bosch & Gascón, 2011; Ruiz-Munzón, 2010) desarrollan un modelo epistemológico de referencia (MER) de la modelización algebraico-funcional en el que se definen tres etapas de modelización algebraica que, a su vez, dan lugar a tres niveles de modelización algebraico-funcional. El punto de partida de este proceso es la organización matemática de los problemas aritméticos, entendidos como problemas que pueden resolverse mediante una cadena de operaciones aritméticas ejecutables a partir de los datos del problema (cadena a la que Chevallard (2005) ha dado el nombre de programa de cálculo aritmético (PCA)). Los elementos tecnológico-teóricos de esta organización matemática se materializan en discursos verbales que, partiendo de los datos (cantidades conocidas de ciertas magnitudes discretas o continuas), construyen y justifican la cadena de operaciones que permite calcular la incógnita.

Una primera modelización algebraica de dicho sistema vendría dada por la sustitución de los PCA expresados en forma retórica por las expresiones algebraicas que los simbolizan. Se tiene así una nueva organización matemática M1 caracterizada por problemas que se resuelven mediante técnicas de escritura y simplificación de expresiones algebraicas de una sola variable, incógnita o parámetro, y cuyos datos y soluciones ya no son siempre números, pueden ser relaciones, justificaciones, etc. La organización matemática M1 contiene en particular a la organización matemática M1' que incluye los problemas que se resuelven mediante una ecuación de primer grado donde la incógnita aparece en un solo miembro.

La segunda etapa surge cuando se plantean cuestiones que relacionan dos PCA que contienen una o dos variables y cuya respuesta debe darse en términos de relaciones entre las variables de dichos PCA. Esto nos introduce en una nueva organización matemática, M2, que es una ampliación de M1, caracterizada por problemas que se resuelven mediante una igualdad entre programas de cálculo, lo que conduce a un nuevo significado del signo «=» como indicador de una equivalencia condicionada y al desarrollo de técnicas ecuacionales como, por ejemplo, la de cancelación. La organización matemática M2 contiene a su vez a M'2 que puede caracterizarse como la organización matemática que contiene las tareas resolubles con una ecuación de primer grado que dependen de una sola incógnita que aparece en los dos miembros de la ecuación.

En el modelo de aritmética generalizada se suele identificar la introducción escolar del álgebra con la resolución del tipo de problemas que generan las organizaciones matemáticas M'1 y M'2, lo que, tal como indica Ruiz-Munzón (2010), supone una reducción abusiva del álgebra a una técnica de resolución más económica que la numérico-verbal de la aritmética, pero que no tiene en cuenta su función esencial como herramienta de descripción y explicitación de las técnicas de cálculo aritmético.

La tercera etapa del proceso de algebrización es una ampliación de M2 y surge cuando se incorporan cuestiones que tienen que ver con el estudio de la variación conjunta de dos o más variables y su repercusión sobre la variación del PCA. La organización matemática M3, que contiene a M2, se refiere, por tanto, a problemas que se resuelven mediante una fórmula algebraica, sin limitar el número de variables y sin diferenciar las incógnitas de los parámetros, e incorpora técnicas algebraicas para estudiar cómo depende cada variable de las restantes.

A partir de M2 y M3 se desarrollan los niveles de modelización algebraico funcional que suponen una nueva ampliación praxeológica de dichas organizaciones matemáticas, reinterpretando las fórmulas y ecuaciones como modelos funcionales que se analizan en términos de crecimiento, decrecimiento, continuidad, derivabilidad, etc. En definitiva, introduciendo técnicas del cálculo diferencial. Finalmente, en Ruiz-Munzón (2010) el MER expuesto se completa con varios procesos de estudio, caracterizados como actividades de estudio e investigación (AEI), que permiten introducir la modelización algebraica y abrir paso a la modelización algebraico-funcional en Secundaria.

2. El MER de introducción escolar de los números negativos

Por otro lado, desde hace tiempo se han ido desarrollando diversos trabajos en los que se propone la introducción escolar de los números negativos en un entorno algebraico (Brousseau, 1983; Chevallard, 1988, 1990; Cid, 2000, 2002). Habitualmente, esta introducción se suele hacer en un entorno aritmético y se apoya en modelos concretos basados en la presentación de magnitudes opuestas o relativas. Sin embargo, diversas investigaciones han puesto en duda la pertinencia de dicha introducción, bien porque se constata que la analogía con los modelos concretos puede crear dificultades a una correcta construcción de la estructura algebraica de los números con signo (Gallardo, 1994; Cid, 2002, entre otros muchos), bien porque los estudios epistemológicos muestran que la verdadera razón de ser de los números con signo es el trabajo algebraico (Chevallard, 1988, 1990) y que la aritmética no solo no tiene necesidad de ellos, sino que históricamente supuso un obstáculo para su aceptación (Glaeser, 1981; Brousseau, 1983; Schubring, 1986; Cid, 2000).

Como consecuencia de ello, en Cid & Bolea (2010) y Cid & Ruiz-Munzón (2010) se diseña un modelo epistemológico de referencia (MER) y un proceso de estudio para introducir los números negativos en un entorno algebraico articulado en torno a varias cuestiones generatrices. Se parte de la necesidad inicial de considerar a los sumandos y sustraendos como elementos del cálculo algebraico para terminar interpretándolos como un nuevo conjunto numérico que amplia el de los números naturales.

El sistema inicial a modelizar es también el de los problemas aritméticos, pero con una restricción: algunos de los datos necesarios para obtener la solución son desconocidos. En una primera etapa, los problemas se resuelven mediante sumas y restas, es decir, mediante programas de cálculo aditivos, y la formulación escrita de estos programas, en los que algunos datos desconocidos deben indicarse mediante letras, conduce a expresiones algebraicas aditivas.

La necesidad de responder a las preguntas formuladas en los enunciados de los problemas aritméticos lleva a simplificar y comparar estas expresiones algebraicas y nos introduce en una primera organización matemática en la que se pasa de las sumas y restas entre números absolutos a la composición de sumandos y sustraendos. Esto transforma también el significado de los signos «+» y «–»: del significado *operativo binario* (signos que en aritmética indican una operación binaria entre números absolutos) se pasa al significado *operativo binario generalizado* (signos que en álgebra indican que el número que les sigue tiene un papel como sumando o sustraendo). En esta etapa quedan establecidas las reglas de composición de sumandos y sustraendos, de simplificación de expresiones algebraicas aditivas y el principio de economía que rige el cálculo algebraico.

En la segunda etapa se enfatiza la diferencia como resultado de la acción de comparar frente a la resta como resultado de la acción de quitar, lo que introduce las diferencias con signo y su interpretación desglosada en un valor absoluto que cuantifica la diferencia y un signo que indica que el primer término de la diferencia es mayor o menor que el segundo término. Aparece una nueva organización matemática que incluye a la anterior y que intenta cuantificar las diferencias entre expresiones algebraicas aditivas. Se reinterpreta el signo «–» como signo *operativo unario*, es decir, como un signo que provoca un cambio en la condición de sumandos o sustraendos.

Esto permite establecer la equivalencia entre expresiones con paréntesis y sin paréntesis, lo que conduce a las reglas de supresión de paréntesis.

En cuanto a la tercera etapa, se asocia a problemas aritméticos aditivo-multiplicativos y da lugar a una organización matemática que necesita gestionar el producto de sumandos y sustraendos. Se establecen las reglas de los signos correspondientes y se pone de manifiesto la importancia de la propiedad distributiva en el cálculo algebraico, tanto en su sentido de desarrollo de expresiones como de sacar factor común. Se reproduce el cálculo de diferencias que ya se había trabajado en la organización matemática anterior, pero con la novedad de que los términos de las diferencias son a su vez productos de números por una suma o diferencia.

Las actividades correspondientes a la cuarta etapa tienen como objetivo prioritario el de dar sentido a los sumandos y sustraendos aislados, introducir el significado *predicativo* de los signos «+» y «–» y asumir que las letras puedan tomar valores positivos o negativos, independientemente del signo que las preceda. Para ello, se presentan problemas verbales aritméticos aditivo-directos en los que tanto los datos desconocidos como la solución son cantidades que pueden interpretarse con un sentido de ganancia o pérdida, o de movimiento unidireccional en un sentido u otro, o como cantidades relativas.

Aparecen ahora los modelos concretos que se utilizan habitualmente en la introducción escolar del número entero, pero con un tratamiento muy diferente, pues la utilización de esos mismos modelos en un contexto algebraico, en el que las reglas de cálculo con sumandos y sustraendos ya están establecidas, permite mostrar la gran ventaja que supone representar determinadas cantidades por medio de sumandos y sustraendos: la unificación de las fórmulas.

3. Criterios para la articulación del MER de introducción escolar de los números negativos en el MER de modelización algebraico-funcional

Como ya se ha indicado anteriormente, los trabajos citados sobre la introducción escolar de los números negativos y los que versan sobre la introducción escolar del álgebra se han desarrollado paralelamente y de modo independiente. Esto implica que el MER de introducción de los números negativos en un entorno algebraico, aun teniendo que hacer uso de una interpretación del álgebra como instrumento de modelización y teniendo que incorporar distintos objetos algebraicos (variables, incógnitas, parámetros, expresiones algebraicas, ecuaciones, identidades, desigualdades, inecuaciones, etc.), no pudo, en su momento, tener en cuenta el MER de la modelización algebraico-funcional.

Por otra parte, en este último MER no se ha incluido la introducción escolar de los números negativos, por lo que ya en Ruiz-Munzón (2010) se indica que su integración en el proceso de algebrización es uno de los principales problemas abiertos y que su introducción en la primera etapa de la ESO debe hacerse de manera articulada con la introducción del álgebra elemental como instrumento de modelización, dado que se ha puesto claramente de manifiesto que los números negativos son objetos algebraicos.

En este trabajo nos proponemos articular el MER de introducción de los números negativos en un entorno algebraico (a partir de ahora, MER_N) con el MER de modelización algebraico-funcional (a partir de ahora, MER_M) para obtener un nuevo MER ampliado de modelización algebraico-funcional que incluya una génesis escolar de los números negativos (a partir de ahora, MER_M ampliado).

El punto de partida del MER_M ampliado va a ser el mismo porque los dos MER que vamos a articular parten de un mismo sistema inicial: la organización matemática de los problemas aritméticos y los programas de cálculo aritmético (PCA) que los resuelven. Por otro lado, hay que tener en cuenta que el MER_M pretende dar cuenta de toda la génesis escolar del álgebra y el análisis en la educación secundaria y, en ese sentido, el MER_N está mucho más limitado y su incorporación al MER_M afectaría únicamente a las organizaciones matemáticas iniciales de este último MER.

Sin embargo, la consideración de los números negativos como objeto de estudio en el MER_M centra el interés inicial en el desarrollo de las técnicas de cálculo con números con signo antes que en el desarrollo de las técnicas de resolución de ecuaciones, lo que va a obligar a hacer modificaciones en la sucesión de organizaciones matemáticas que se habían definido en el MER_M. Estas modificaciones afectarán fundamentalmente a dos aspectos: el orden en que se introducen los objetos algebraicos y el tipo de técnicas a desarrollar y el orden en que se trabajan.

La introducción de los números negativos necesita de determinados objetos algebraicos cuyas técnicas de manipulación no se pueden desarrollar hasta que no se dispone de las técnicas de cálculo con los números negativos. Esto exige que, a diferencia de lo que sucede en la introducción tradicional del álgebra escolar, se establezcan momentos distintos para la presentación de los objetos algebraicos y para el desarrollo de las técnicas que les afectan. Como consecuencia, tanto el orden de presentación de los objetos algebraicos como el momento de aparición de las técnicas de manipulación de dichos objetos queda condicionado por la necesidad de introducir los números negativos.

En primer lugar, el MER_N no se limita inicialmente a problemas que requieren la manipulación escrita de expresiones algebraicas con una sola variable, sino que pueden ser expresiones que contengan más de una variable. Esto se debe a que, como acabamos de comentar, al introducir el álgebra sin haber desarrollado las reglas de cálculo con números negativos, no se pueden iniciar de inmediato las técnicas de resolución de ecuaciones, siendo necesario limitarse en un principio a las técnicas de simplificación de expresiones algebraicas, y el número de variables que contenga la expresión algebraica no modifica esencialmente este tipo de técnicas. Por tanto, conviene ampliar la organización matemática M_1 del MER_M, que se caracterizaba por el trabajo con expresiones algebraicas que contienen una sola variable, al caso de dos o más variables.

Por otra parte, la exigencia de enfatizar el significado de la «diferencia», entendida como resultado de la acción de comparar, frente a la «resta», entendida como resultado de la acción de quitar, imprescindible para dar significado a la diferencia entre números con signo, obliga a trabajar desde el primer momento la comparación entre PCA's, lo que tiene como consecuencia inmediata la modificación de dos aspectos del MER_M. El primero es que ya no es factible la distinción que se hace en dicho MER entre una organización matemática M_1 en la que se trabajan las expresiones algebraicas del tipo PCA(x; $a_1, \ldots, a_k$), ocasionalmente igualadas a un número, y una segunda organización matemática M_2 en la que se comparan expresiones algebraicas del tipo PCA (x_1, x_2; $a_1, \ldots, a_k$), lo que da lugar a expresiones del tipo PCA (x_1, x_2; $a_1, \ldots, a_k$) = PCA (x_1, x_2; $b_1, \ldots, b_s$).

El segundo aspecto que va a sufrir modificaciones es el tratamiento de las desigualdades e inecuaciones. En el MER_M se inicia el estudio de desigualdades e inecuaciones al comenzar los niveles de modelización algebraico-funcional, a partir de las organizaciones matemáticas M_2 y M_3. Sin embargo, el inicio temprano de las tareas de comparación entre expresiones algebraicas, necesario, como ya hemos dicho, para establecer la diferencia entre número con signo, fuerza a considerar desde el primer momento aspectos no solo algebraicos, sino también funcionales. En este sentido, deben introducirse las desigualdades e inecuaciones como objetos de estudio en la primera organización matemática que se defina, aun cuando se puede dejar para más adelante el desarrollo de las técnicas de resolución correspondientes.

Las consideraciones anteriores muestran la necesidad de ampliar la organización matemática M_1 del MER_M, incluyendo en ella algunos elementos que actualmente se consideran propios de M_2. A cambio, y de nuevo debido al desconocimiento inicial de las reglas de cálculo con números negativos, en el MER_N no se plantean desde el primer momento expresiones algebraicas en las que intervengan productos y cocientes, además de sumas y restas, como sí sucede en M_1 del MER_M, ni tampoco expresiones de grado superior a 1. El paso de las reglas de suma y diferencia de números positivos y negativos a las de producto y cociente exige la interpretación de los signos «+» y «–» como signos operativos binarios generalizados y su posterior conversión en signos operativos unarios. Por tanto, en un primer momento, las expresiones algebraicas de primer grado que se obtengan como solución de un problema deberán ser aditivas, es decir, expresiones del tipo $a \pm b \pm c \pm d \pm \ldots$, donde a, b, c, d, etc., son números positivos o letras que pueden ir acompañadas de un coeficiente distinto de 1, dejándose para un momento posterior aquellos problemas que introducen el producto y el cociente en las expresiones algebraicas.

Por último, en el MER_N los números con signo y sus reglas de cálculo se introducen a partir de los números enteros, pero no se contempla su ampliación al conjunto de los números racionales, imprescindible para el desarrollo del álgebra.

4. Modificación de la organización matemática M_1 del MER_M para incorporarla al MER_M ampliado

Se define la organización matemática M1 en el MER_M ampliado como una organización matemática que amplía en los siguientes aspectos la organización matemática M1 del MER_M:

a) Se suprime la restricción de que las expresiones algebraicas resultado de la formulación escrita de los PCA contengan una sola variable.

b) Se incorporan los problemas que se resuelven mediante una igualdad o una desigualdad entre dos PCA, propios de M_2 y de M_3 en el MER_M, siempre que su solución no implique el desarrollo de las técnicas de resolución de ecuaciones e inecuaciones.

A partir de ahí, M_1 se descompone en tres suborganizaciones matemáticas (M_{11}, M_{12} y M_{13}) para construir un recorrido que permita la introducción de los números negativos al mismo tiempo que la del álgebra. Cada una de estas suborganizaciones supone una restricción de alguna de los aspectos que definen M_1.

- En M_{11} las expresiones algebraicas se definen en el conjunto de los números naturales y son expresiones aditivas y de primer grado.
- En M_{12} las expresiones algebraicas se definen en el conjunto de los números racionales positivos, son aditivo-multiplicativas y de primer grado.
- En M_{13} las expresiones algebraicas se definen en el conjunto de los números racionales y son aditivo-multiplicativas y de primer grado.

Hay que advertir que M_{11}, M_{12} y M_{13} no agotan la organización matemática M_1.

5. Primera etapa del proceso de algebrización: M_{11}

Partimos, como ya hemos dicho anteriormente, de la organización matemática de los problemas aritméticos, entendidos como problemas que se resuelven mediante una cadena estructurada y jerarquizada de operaciones aritméticas, todas ellas ejecutables, a la que llamamos programa de cálculo aritmético (PCA). La necesidad de expresar algebraicamente dicha cadena de operaciones se justifica si alguno de los datos que intervienen en el PCA es desconocido. En este caso, la expresión algebraica del PCA y su posterior manipulación permiten obtener información sobre el sistema estudiado, aun cuando se desconozcan uno o varios de sus datos.

Para construir M_{11}, además de la restricción de que alguno o varios de los datos que intervienen en el PCA que resuelve el problema son desconocidos, imponemos también la restricción de que tanto los datos como las variables, parámetros o incógnitas sean números naturales y de que la modelización algebraica de los PCA dé como resultado una expresión algebraica aditiva de primer grado. Tendremos así la organización matemática M_{11} caracterizada de la siguiente manera:

Campo de problemas de M_{11}: Problemas cuya solución es una respuesta numérica o una relación. Dicha respuesta se obtiene mediante una cadena de sumas o restas entre números naturales, pero con la restricción de que alguno de los términos que intervienen en ella son desconocidos, lo que cambia el formato de la respuesta que ya no será un número sino una expresión algebraica o una relación entre ellas.

Técnicas que emergen en M_{11}:

- Paso de la formulación retórica de un PCA aditivo, con o sin paréntesis, entre números naturales a su formulación algebraica y viceversa. El desarrollo de esta técnica permite establecer la relación entre los códigos verbales que describen un PCA y los códigos algebraicos que lo simbolizan.
- Composición de sumandos y sustraendos. Con esta técnica se reinterpreta la suma y resta entre números naturales como composición de traslaciones. Esto modifica el significado de los signos «–» y «+»: ya no son signos que intermedian entre dos números (signos operativos binarios), sino signos que afectan a un solo número para indicar su papel como sumandos o sustraendos (signos operativos binarios generalizados).
- Comparación de expresiones algebraicas aditivas y cálculo de su diferencia. Esta técnica conduce a las diferencias con signo y a su interpretación como un valor absoluto que cuantifica la diferencia y un signo (positivo o negativo) que indica que el primer término de la diferencia es mayor o menor que el segundo término. Esto introduce, aunque en forma todavía muy incipiente, el cuarto significado del signo, su sentido predicativo.

- Simplificación de expresiones algebraicas aditivas. El cálculo algebraico exige el desarrollo de técnicas que no son algorítmicas y que se rigen por: a) un control del cálculo puramente sintáctico, no semántico como es habitual en aritmética,
  b) una reflexión y toma de decisiones que dependen de su funcionalidad y c) un principio de economía que propicia la búsqueda de formas sencillas de hacer los cálculos.
- Simplificación de expresiones algebraicas aditivas que contienen paréntesis. El desarrollo de esta técnica obliga a reinterpretar el signo «–» como signo operativo unario. Hasta ahora operábamos componiendo sumandos y sustraendos, pero ahora aparece la necesidad de sumar o restar términos que a su vez son sumas o diferencias que no pueden efectuarse. Antes un signo «–» indicaba la condición de sustraendo de un término, a partir de ahora deberá interpretarse también como un signo que provoca un cambio en la condición de sumandos o sustraendos.
- Cálculo del valor numérico de una expresión algebraica aditiva con o sin paréntesis. Esta técnica se restringe al caso en que las variables toman valores numéricos en el conjunto de los números naturales y posteriormente (en M_{12} y M_{13}) se amplía a los números racionales positivos y racionales.
- Tablas de valores de la función afín. Esta técnica se restringe al caso en que las variables toman valores numéricos en el conjunto de los números naturales y posteriormente (en M_{12} y M_{13}) se amplía a los números racionales positivos y racionales.
- Resolución aritmética (sin necesidad de técnicas de cálculo ecuacional) de ecuaciones e inecuaciones de primer grado cuya formulación inicial es una igualdad o desigualdad entre expresiones algebraicas aditivas con o sin paréntesis. También aquí nos restringimos al caso en que las soluciones de las ecuaciones o inecuaciones son números naturales y posteriormente (en M_{12} y M_{13}) se amplía a los números racionales positivos y racionales
- Demostración algebraica de propiedades aritméticas que se refieren a los números naturales y cuyo punto de partida es una expresión algebraica aditiva con o sin paréntesis.

Objetos algebraicos que emergen en M11:

- los sumandos y sustraendos entendidos como objetos intermedios de cálculo,
- la composición y diferencia entre sumandos y sustraendos,
- la letra entendida como variable, incógnita o parámetro,
- las funciones afines restringidas al dominio de los número naturales con sus valores numéricos y tablas de valores,
- las igualdades lineales en su doble vertiente de identidades y ecuaciones lineales;
- las desigualdades e inecuaciones lineales;
- el cambio de variable;
- la parametrización de variables o incógnitas;
- la reinterpretación de los signos "=", "<" y ">" como signos que indica una relación de equivalencia o de orden entre dos términos.
- la demostración algebraica de las propiedades aritméticas como forma de garantizar que se cumplen para todos los números naturales.

6. Segunda etapa del proceso de algebrización: M_{12}

En M_{12} los PCA que resuelven los problemas ya no contienen solo sumas y restas sino que también contiene productos y cocientes y el campo numérico se amplía a los números racionales positivos.

Campo de problemas de M_{12}: Problemas cuya solución es una respuesta numérica o una relación. Dicha respuesta se obtiene mediante un PCA aditivo-multiplicativo entre números racionales positivos, pero con la restricción de que alguno de los términos que intervienen en él son desconocidos y que la expresión algebraica que lo simboliza puede reducirse a una expresión polinómica de primer grado.

Técnicas que emergen en M12:

- Paso de la formulación retórica de un PCA aditivo-multiplicativo entre números racionales positivos a su formulación algebraica y viceversa. Esta técnica exige asumir la transformación de un cociente entre dos términos en producto de uno de ellos por el inverso del otro. También exige el establecimiento de la jerarquía de las operaciones y el uso de los paréntesis para modificarla.
- Producto y cociente de sumandos y sustraendos. Se desarrollan las reglas de los signos y la equivalencia entre las expresiones $–a/b$, $a/–b$ y $–(a/b)$.

- Comparación de expresiones algebraicas aditivo-multiplicativas y cálculo de su diferencia.
- Simplificación de expresiones algebraicas aditivo-multiplicativas. La simbolización algebraica de PCA's aditivo-multiplicativos conduce a gestionar el producto entre un sumando o sustraendo y una suma o resta. La utilización de la propiedad distributiva lo reduce a un producto entre sumandos y sustraendos. Además, se hace necesario el uso de las reglas referentes a la jerarquía de las operaciones y al uso de paréntesis.
- Demostración algebraica de propiedades aritméticas que se refieren a los números racionales positivos y cuyo punto de partida es una expresión algebraica aditivo-multiplicativa.

Objetos algebraicos que emergen en OM_2:

- el producto y cociente entre sumandos y sustraendos;
- las funciones afines restringidas al dominio de los número racionales positivos con sus valores numéricos y tablas de valores;
- la demostración algebraica de las propiedades aritméticas como forma de garantizar que se cumplen para todos los números racionales positivos.

7. Tercera etapa del proceso de algebrización: M_{13}

En M_{13} los PCA que resuelven los problemas son aditivo-multiplicativos y el campo numérico se amplía a los números racionales.

Campo de problemas de M_{13}: Problemas que se resuelven mediante un PCA aditivo-multiplicativo o una relación entre ellos y en la que las variables pueden tomar valores positivos o negativos.

Técnicas que emergen en M_{13}:

- Paso de la formulación retórica de un PCA aditivo-multiplicativo entre números racionales a su formulación algebraica y viceversa. Esta técnica conduce a un nuevo significado de los signos «+» y «–»: su sentido predicativo. Ya no son signos que indican una operación, sino signos que indican una «cualidad» del número al que acompañan.
- Suma, diferencia, producto y cociente de números enteros y racionales. A partir del cálculo con sumandos y sustraendos se establecen las reglas de las operaciones entre números enteros y racionales.
- Ordenación de números enteros y racionales. Se establece un orden total compatible con la suma.

- Representación de los números racionales en la recta real.
- Comparación de expresiones algebraicas. La técnica se amplía al caso en que las variables pueden tomar valores positivos o negativos.

Objetos algebraicos que emergen en M_{13}:

- el conjunto de los números enteros y racionales, cuya razón de ser es la existencia de diferencias negativas y la aparición de un campo de problemas aritméticos, asociado a «cantidades con dos sentidos», en el que es necesario que las letras tomen valores que a su vez son sumandos o sustraendos para obtener una sola fórmula de resolución;
- las diferencias entre la estructura algebraica del conjunto de los números enteros y la del conjunto de los números naturales y entre las del conjunto de los números racionales y el conjunto de los números racionales positivos. Se constata que esos nuevos números ya no cumplen las mismas propiedades que cumplen los números naturales o racionales positivos.

Referencias

Bolea, P. (2003). El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares. En *Monografía del Seminario Matemático García de Galdeano, 29*. Zaragoza, España: Universidad de Zaragoza.

Bolea, P., Bosch, M. & Gascón, J. (1998). Le caractère problématique du processus d’algebrisation. Proportionnalité et grandeurs dans l’enseignement obligatoire. En M. Bailleul, C. Comiti, J.-L. Dorier, J.-B. Lagrange, B. Parzysz & M.-H. Salin (Eds.), *Actes de la IX^{e} école d’été de didactique des mathématiques* (pp. 153-159). Caen: ARDM et IUFM.

Bolea, P., Bosch, M. & Gascón, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización: El caso de la proporcionalidad. *Recherches en didactique des mathématiques, 21*(3), 247-304.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques, 4*(2), 165-198.

Chevallard, Y. (1988). La dialectique entre études locales et théorisation : le cas de l’algèbre dans l’enseignement du second degré. En G. Vergnaud,

G. Brousseau, & M. Hulin (Eds.), *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques* (pp. 305-323). Grenoble: La pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1989a). *Arithmétique, algèbre, modelisation. Étapes d'une recherche.* Marsella : IREM d'Aix-Marseille

Chevallard, Y. (1989b). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modelisation. *Petit x, 19*, 45-75.

Chevallard, Y. (1990). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Troisième partie. Voies d'attaque et problèmes didactiques. *Petit x, 23*, 5-38.

Chevallard, Y. (2005). La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire : transposition didáctique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire. En C. Ducourtioux & P.-L. Hennequin (Eds.), *La place des mathématiques vivantes dans l'enseignement secondaire.* (pp. 239-263). Paris: APMEP et Animath.

Cid, E. (2000, abril). Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos. *XIV Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*, Cangas, España.
http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/boletin10.htm

Cid, E. (2002). Los modelos concretos en la enseñanza de los números negativos. *Actas de las X Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas* (Vol. 2, pp. 529-542). Zaragoza, España: Publicaciones de la Universidad de Zaragoza.

Cid, E. & Bolea, P. (2010). Diseño de un modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos en un entorno algebraico. En A. Bronner et al. (Eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 575-594). Montpellier: IUFM.

Cid, E. & Ruiz-Munzón, N. (2011). Actividades de estudio e investigación para introducir los números negativos en un entorno algebraico. En M. Bosch et al. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 579-604). Barcelona, España: CRM.

Gallardo, A. (1994). Negative numbers in algebra. The use of a teaching model. Dans J. P. da Ponte & J. F. Matos (Éds), *Proceedings of the*

XVIIIth International Conference for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 2, pp. 376-383). Lisboa: Universidade de Lisboa.

Gascón, J. (1993). Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: Del patrón análisis-síntesis a la génesis del lenguaje algebraico. *Recherches en didactique des mathématiques, 13*(3), 295-332.

Gascón, J. (1995). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'« arithmétique généralisée ». *Petit x, 37*, 43-63.

Glaeser, G. (1981). Épistémologie des nombres relatifs. *Recherches en didactique des mathématiques, 2*(3), 303-346.

Ruiz-Munzón, N. (2006). *Ecologia de la modelització algebraico-funcional al Batxillerat* (Memoria de investigación, Diploma de Estudios Avanzados). Universitat Autònoma de Barcelona, España.

Ruiz-Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional* (Tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona, España.

Ruiz-Munzón, N., Bosch, M. & Gascón, J. (2010). La algebrización de los programas de cálculo aritmético y la introducción del álgebra en Secundaria. En A. Bronner et al. (Eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 655-676). Montpellier: IUFM.

Ruiz-Munzón, N., Bosch, M. & Gascón, J. (2011). Un modelo epistemológico de referencia del álgebra como instrumento de modelización. En M. Bosch et al. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 743-765). Barcelona, España: CRM.

Schubring, G. (1986). Ruptures dans le statut mathématique des nombres négatifs. *Petit x, 12*, 5-32.

Un nouvel objet d'enseignement en seconde : l'algorithmique

Michèle Couderette
UMR EFTS, Université Toulouse 2 (IUFM), France

Abstract. The latest reform of secondary schools in France (2009) introduced the teaching of algorithmic in the mathematical curriculum. Trying to perform the transpositive analysis of algorithmic knowledge, we have developed our study in four steps: after identifying a reference knowledge and highlighting the hybrid aspect of algorithms, we studied the action of the noosphere that has led to the emergence of algorithms as an object of study in the curriculum of secondary school. Then, we analysed the text of the knowledge to be taught and finally we proposed, based on the analysis of the practices of a teacher, a praxeological analysis of the knowledge studied in a *Seconde* class (15-16 years old pupils). In each step, we investigated whether the hybrid aspect of algorithms was taken into account or not.

Resumen. La última reforma del bachillerato en Francia (2009) introdujo la enseñanza de la algorítmica en el currículo de matemáticas. Tratando de llevar a cabo el análisis transpositivo del conocimiento algorítmico, hemos desarrollado nuestro estudio en cuatro fases: tras haber identificado un conocimiento de referencia y destacado la hibridez de los algoritmos, hemos estudiado la acción de la noosfera que hizo que los algoritmos aparecieron en los programas del bachillerato y, seguidamente, analizado el texto del saber por enseñar. Por último hemos propuesto, a partir del análisis de las prácticas de una docente, un análisis praxeológico del conocimiento estudiado en una clase de *Seconde* (15-16 años). En cada etapa hemos tratado de identificar si la hibridez de los algoritmos se tenía en cuenta o no.

Résumé. La dernière réforme des lycées en France (2009) a introduit l'enseignement de l'algorithmique dans les programmes de mathématiques. Cherchant à conduire l'analyse transpositive du savoir algorithmique, nous avons mené notre étude en quatre temps : après avoir identifié un savoir savant et mis en évidence l'hybridité des algorithmes, nous avons étudié l'action de la noosphère qui l'a conduite à faire apparaître l'algorithmique, en tant qu'objet d'étude, dans les programmes scolaires de lycée, puis analysé le texte du savoir à enseigner et enfin proposé, à partir de l'analyse des pratiques d'une enseignante, une analyse praxéologique du savoir étudié dans une classe de seconde. Dans chacune des études, nous avons cherché à savoir si l'hybridité des algorithmes était ou non prise en compte.

IV[e] congrès international sur la TAD (Toulouse, 21-26 avril 2013)
Axe 2. *L'analyse praxéologique comme outil de l'analyse et de l'ingénierie didactiques*

Couderette, M. (2017). Un nouvel objet d'enseignement en seconde : l'algorithmique. Dans G. Cirade et al. (Éds), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* (pp. 343-356). https://citad4.sciencesconf.org

La dernière réforme des lycées (2009) a introduit l'enseignement de l'algorithmique en cours de mathématiques. Avant la réforme, cet enseignement était au service de la résolution de problèmes, portant ainsi l'accent sur l'aspect outil de ce concept. Avec la réforme, les concepts algorithmiques deviennent des objets d'étude. Pour conduire l'analyse transpositive du savoir algorithmique, nous avons mené lors de l'année 2011-2012 une étude en quatre parties (Couderette, 2012) : après avoir identifié un savoir savant, nous avons étudié l'action de la noosphère sur ce savoir puis analysé le savoir à enseigner et enfin proposé une analyse praxéologique du savoir étudié dans une classe de seconde.

1. Identification d'un savoir savant

Dans la première partie de notre étude, nous avons cherché à localiser et à identifier un savoir de référence. Il nous a paru naturel de nous tourner vers les travaux de Donald Knuth, chercheur que l'on pourrait qualifier de « mathématicien-informaticien », reconnu à la fois par la communauté des mathématiciens et par celle des informaticiens. Notre étude a porté sur son ouvrage *The art of computer programming* (TAOCP), dont le premier volume date de 1968 mais qui reste toujours d'actualité malgré l'évolution de l'informatique.

Dans le premier chapitre de son livre, Knuth nous montre une vision mathématique mais aussi informatique des algorithmes. Tous les algorithmes s'appuient sur des énoncés mathématiques et les preuves d'algorithmes ont recours à des démonstrations par récurrence ou à la logique formelle. Pour autant, l'objet de son livre n'est pas de faire un cours de mathématiques, mais de faire comprendre à un lecteur « novice » en informatique ce qu'est un algorithme. Aussi est-il amené à décrire des concepts algorithmiques qui n'appartiennent pas aux mathématiques, mais à l'informatique. Nous voyons ainsi apparaître une double référence à l'algorithme, mathématique et informatique, lui affectant ainsi un caractère hybride. Knuth désigne par exemple le concept d'affectation comme l'un des plus difficiles à comprendre. Cette opération a pour but d'attribuer une valeur à une variable informatique. Sa syntaxe est la suivante :

Nom de la variable ← nouvelle valeur (ou expression)

Écrite avec le symbole de la flèche « $\leftarrow$ », elle ne doit pas être confondue avec le symbole « = » qui traduit l'égalité en mathématiques ou la condition d'égalité en algorithmique : l'égalité est utilisée lors d'un test (« est-ce que la valeur contenue dans la variable *a* est égale à la valeur contenue dans la variable *b* ? ») alors que l'affectation est utilisée pour affecter le contenu d'un variable informatique dans une autre variable informatique (« la variable *a* reçoit le contenu de la variable *b*). Knuth pointe ainsi au passage la polysémie de la notion de « variable » qui génère de la confusion dans l'étude de l'objet ; une variable informatique désigne un emplacement dans la mémoire de l'ordinateur alors qu'une variable en mathématiques désigne un nombre. Nous comprenons alors que, même si le vocabulaire est le même, le mot variable dans un contexte algorithmique relève ici de l'informatique et non des mathématiques. Autre concept décrit par Knuth, relevant cette fois-ci des mathématiques mais ayant une forte incidence en informatique : celui de la *complexité* d'un algorithme. Celle-ci est relative au nombre d'opérations, au temps et à l'espace mémoire alloué aux variables. La complexité d'un algorithme relève d'un calcul mathématique combinant polynômes, logarithmes et/ou exponentielles. Or une des tâches régulières de l'informaticien est de minimiser la complexité d'un algorithme afin de le rendre plus performant : complexité et performance d'un algorithme sont liées.

Dans son ouvrage, à partir d'exemples, Knuth nous éclaire donc sur la vision « hybride » qu'il a des algorithmes : un algorithme ne relève ni des mathématiques, ni de l'informatique exclusivement, mais des deux.

2. Action de la noosphère

À partir des constats liés à la double référence du savoir algorithmique, nous nous sommes intéressée à la façon dont ce savoir a été introduit dans les savoirs à enseigner. Comment l'algorithmique fut-elle alors introduite dans les programmes scolaires de mathématiques au lycée ? L'aspect « hybride » est-il pris en compte ? C'est l'objet de la seconde partie de notre étude. Nous avons cherché à décrire le processus par lequel les acteurs de la noosphère ont permis à l'algorithme d'apparaître en tant qu'objet d'étude et non en tant qu'outil dans les programmes de lycée. Nous retraçons ainsi sur une cinquantaine d'années certains points saillants de l'effort de diffusion de la culture informatique et algorithmique dans l'enseignement des mathématiques. À partir des différents rapports sur l'enseignement des mathématiques en France, nous avons mis au jour les luttes d'influence au sein de la noosphère relativement à l'introduction de l'enseignement de l'algorithmique dans les différents programmes de mathématiques du secondaire de 1970 à 2010, nous permettant ainsi d'observer la noosphère dans son travail de transposition des savoirs informatiques situés dans les institutions savantes en savoirs enseignés dans les institutions d'enseignement au secondaire en France.

Jusqu'en 2000, l'apprentissage des structures d'un algorithme n'étant pas exigible, la vie de l'algorithmique en tant qu'objet de savoir était plus que réduite. En 2000, le rapport de la « commission Kahane »[1] redéfinit l'enjeu de l'introduction de l'informatique dans l'enseignement :

> … il nous paraît important, à ce stade de distinguer clairement
> – l'utilisation des ordinateurs et calculatrices et des logiciels qui y sont implantés, d'une part et
> – l'apprentissage des concepts de base de l'algorithmique et de la programmation, d'autre part.
> […]
> L'enseignant peut montrer, faire découvrir, et bien sûr susciter la réflexion sur les objets mathématiques grâce à ces logiciels. L'enseignement des mathématiques trouve là de nouveaux moyens et méthodes, de nouvelles images. Mais comment raisonnablement penser que l'on peut se dispenser d'un apprentissage et d'une pratique des concepts de base de l'algorithmique et de la programmation ?

Le Conseil national des programmes (CNP) entend alors la commission Kahane sur le premier point et introduit à tous les niveaux, tant au collège qu'au lycée, l'utilisation des outils informatiques. En revanche, il ne tient pas compte du second point dans les programmes de lycée des années 2000. Nous trouvons une justification du CNP énoncée dans le programme de première S :

1. Il s'agit de la « commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques », présidée par J.-P. Kahane, qui a conduit ses travaux de 1999 à 2003 (voir Kahane, 2002).

> Certaines notions informatiques élémentaires (boucle, test, récursivité, tri, cheminement dans des graphes, opérations sur des types logiques) font partie du champ des mathématiques et pourraient être objets d’enseignement dans cette discipline. Compte tenu de l’horaire imparti et des débats en cours, il n’est proposé aucun chapitre d’informatique. (Ministère de l’Éducation nationale [MEN], 2000)

Cependant, les nouvelles orientations impulsées par la loi d’orientation et de programme pour l’avenir de l’école en 2005 ouvrent la porte à une refonte des programmes de toutes les disciplines d’enseignement organisant une progression de l’école primaire au lycée. Nous pouvons penser que cette refonte des programmes est une opportunité pour relancer le débat sur l’intégration de l’algorithmique comme objet d’étude au lycée. Ainsi, anticipant la réforme des programmes de lycée, l’association française des sciences et technologies de l’information (ASTI) formule en 2008 une proposition de programmation de l’informatique de la maternelle à l’université :

> Placer le programme des lycées dans une vision pour l’ensemble de l’ensemble du cursus en informatique de la maternelle à l’Université avec une phase en amont du lycée centrée autour de la maîtrise de logiciels (traitement de textes, messagerie électronique...) et de rudiments de théorie de l’information (numérisation, uniformité de la représentation des données), une phase au Lycée centrée autour de l’apprentissage des connaissances nécessaires à l’écriture d’un programme simple (compréhension des constructions d’un langage de programmation et des algorithmes élémentaires), et une phase en aval du lycée consacré aux diverses branches de l’informatique en tant que discipline scientifique (cryptologie, compilation, protocoles de communication, synthèse d’images...).

Nous voyons ici que l’association ASTI se positionne clairement sur la nécessité de prendre en considération le point relatif à l’apprentissage des concepts présentés dans le rapport de la commission Kahane.

Ainsi, après la publication de la loi d’orientation et de programme pour l’avenir de l’école de 2005, les représentants du Haut Conseil de l’Éducation (HCE) font le choix d’inclure en 2009 dans tous les programmes de mathématiques, et à tous les niveaux, un enseignement d’algorithmique.

Dans cette étude, nous avons pu observer, comme l'écrit Yves Chevallard (1991), « ceux qui, aux avant-postes du fonctionnement didactique, s'affrontent aux problèmes qui naissent de la rencontre avec la société et ses exigences ; là se développent les conflits, là se mènent les négociations, là mûrissent les solutions » (p. 24), montrant ainsi comment la noosphère a réduit le décalage entre savoirs informatiques situés dans les institutions savantes et savoirs informatiques enseignés dans les institutions d'enseignement au secondaire.

3. Analyse du savoir à enseigner

Comment l'algorithmique est-elle alors introduite dans les programmes scolaires de mathématiques au lycée ? L'aspect « hybride » mis à jour par Knuth est-il perceptible ? C'est l'objet de la troisième partie de notre étude qui nous a conduite à nous intéresser à deux textes portant sur le savoir à enseigner : le programme scolaire et le document *Algorithmique*, une des *Ressources pour la classe de seconde*, l'accompagnant.

Nous notons que le programme concernant l'algorithmique diffère des autres parties du programme (fonctions, géométrie, etc.) dans la mesure où l'algorithmique est inscrite dans le programme de seconde qui fixe les « objectifs pour le lycée » valables pour toutes les classes (seconde, première ou terminale, série scientifique, économique ou littéraire). Il est inscrit d'un seul tenant et est valable pour les trois années du lycée. Nous pouvons penser que les concepteurs de ce programme ont vu cet enseignement comme un tout, réétudié à tous les niveaux, se complexifiant au fur et à mesure de l'étude. Le programme tient-il compte du caractère hybride des algorithmes et des difficultés induites par ce caractère ? Le programme enjoint les enseignants à lier cet enseignement à tous les autres domaines mathématiques enseignés et les algorithmes doivent avoir pour support des notions mathématiques étudiées en classe :

> La démarche algorithmique est, depuis les origines, une composante essentielle de l'activité mathématique.
>
> […]
>
> L'algorithmique a une place naturelle dans tous les champs des mathématiques et les problèmes posés doivent être en relation avec les autres parties du programme (fonctions, géométrie, statistiques et probabilité,

> logique) mais aussi avec les autres disciplines ou la vie courante. (MEN, 2009b, p. 9)

Par ailleurs, le programme fait référence à des concepts informatiques enjeux d'étude tels que le formalisme propre à un algorithme, l'affectation, les variables :

> Ce qui est proposé dans le programme est une formalisation en langage naturel propre à donner lieu à traduction sur une calculatrice ou à l'aide d'un logiciel. Il s'agit de familiariser les élèves avec les grands principes d'organisation d'un algorithme : gestion des entrées-sorties, affectation d'une valeur et mise en forme d'un calcul.
>
> […]
>
> Les élèves, dans le cadre d'une résolution de problèmes, doivent être capables :
>
> • de programmer un calcul itératif, le nombre d'itérations étant donné ;
>
> • de programmer une instruction conditionnelle, un calcul itératif, avec une fin de boucle conditionnelle. (MEN, 2009b, pp. 9-10)

On comprend alors qu'il ne s'agit pas uniquement d'utiliser des algorithmes, mais aussi de concevoir des algorithmes et donc d'étudier les objets algorithmiques. Certes, les objets algorithmiques étudiés relèvent de concepts de base, mais ils permettent une initiation plus ou moins poussée à l'algorithmique. Le programme incite fortement à implémenter les algorithmes, sans donner de consigne particulière : il peut être fait usage de la calculatrice programmable, d'un logiciel dédié à cet apprentissage (Algobox) ou d'un logiciel professionnel comme Python.

Dans le texte du savoir à enseigner, nous retrouvons certains des éléments caractéristiques d'un algorithme mentionnés par Knuth : la séquentialité d'un algorithme, sa structure globale (entrée, traitement, sortie), sa lisibilité, sa rigueur et son formalisme dans son écriture. L'affectation, signalée par Knuth comme un concept difficile à comprendre, n'est pas explicitement indiquée comme telle dans le programme mais on peut supposer que la description imagée (voir figure 1) dans le document *Algorithmique* (MEN, 2009a), issu des *Ressources pour la classe de seconde,* est là pour apporter une aide à l'enseignant, lui suggérant du même coup une difficulté d'enseignement à prévoir.

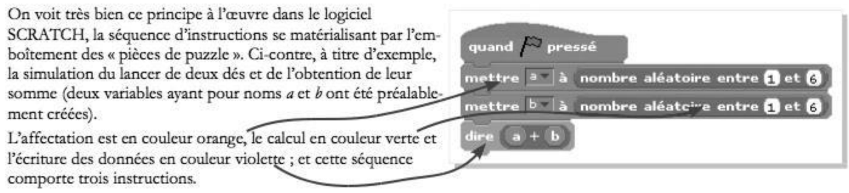

On voit très bien ce principe à l'œuvre dans le logiciel SCRATCH, la séquence d'instructions se matérialisant par l'emboîtement des « pièces de puzzle ». Ci-contre, à titre d'exemple, la simulation du lancer de deux dés et de l'obtention de leur somme (deux variables ayant pour noms *a* et *b* ont été préalablement créées).
L'affectation est en couleur orange, le calcul en couleur verte et l'écriture des données en couleur violette ; et cette séquence comporte trois instructions.

Figure 1. Description imagée de l'affectation dans le document ressource.

Dans son ouvrage, Knuth conseille à ses lecteurs d'étudier des algorithmes déjà écrits en les déroulant à la main pour comprendre leur fonctionnement, autrement dit de *tracer* les algorithmes. Nous retrouvons partiellement cette préoccupation dans le document *Algorithmique*, où il est conseillé d'étudier des algorithmes afin de déterminer leurs fonctions ou de déceler des erreurs dans leur conception. On a donc ici un type de tâches, tracer un algorithme, mis en évidence par Knuth comme étant important dans l'organisation de savoir car intervenant dans la technique permettant d'étudier des algorithmes déjà écrits, qui n'apparaît pas explicitement dans le programme.

En conclusion, nous retrouvons donc bien dans ce programme la vison de Knuth : l'algorithmique telle que prescrite dans les programmes engage les deux domaines que sont les mathématiques et l'informatique. Pour autant, certaines difficultés ou certains écueils signalés par Knuth (l'affectation, la notion de variable), bien que présents allusivement dans ce programme, ne sont pas suffisamment éclairées par des apports théoriques, qu'ils soient algorithmiques ou didactiques, laissant alors les enseignants démunis face à l'organisation didactique de la séance.

4. Analyse praxéologique du savoir étudié dans une classe de seconde

Dans cette dernière partie, à partir de l'observation de deux séquences dans une même classe de seconde, nous avons mené une analyse praxéologique du savoir mis à l'étude, cherchant ainsi à savoir si des éléments importants dégagés par Knuth (aspect hybride de l'algorithmique, difficultés concernant les notions d'affectation, de variable, etc.) étaient perceptibles lors de ces observations.

Chacune des deux séquences était composée de trois séances. Dans la première, l'enseignante poursuit « officiellement » deux objectifs : écrire un algorithme en langage naturel puis l'implémenter sur une calculatrice Texas

(TI 82) ou Casio (Graph35). C'est du moins ce qu'elle indique dans l'entretien ayant eu lieu avant la séance : « je veux qu'ils écrivent les algorithmes en langage naturel […] qu'ils les entrent dans la calculatrice ». Les deux enjeux de l'étude, concevoir un algorithme puis l'implémenter, prennent appui sur l'étude d'algorithmes déjà écrits et sur l'écriture d'autres algorithmes (calcul de moyenne pondérée, de prix remisé ou augmenté). Nous avons dégagé plusieurs organisations praxéologiques de différents ordres que nous désignons par leur type de tâches (voir tableau 1) :

Praxéologies d'ordre mathématique	Praxéologies d'ordre algorithmique	Praxéologies d'ordre informatique
$\wp_{mp}$ (calculer une moyenne pondérée) $\wp_{prix}$ (calculer un prix)	$\wp_{cea}$ (concevoir et écrire un algorithme),	$\wp_{ta}$ (traduire un algorithme), $\wp_{ia}$ (implanter un algorithme) $\wp_{tp}$ (tester un programme)

Tableau 1. Praxéologies mises en œuvre dans la séquence 1.

Nous observons que ces praxéologies sont dépendantes les unes des autres : la réalisation de la tâche « concevoir et écrire l'algorithme de la moyenne pondérée » fait appel à la praxéologie $\wp_{cea}$ qui elle-même fait appel à la praxéologie $\wp_{mp}$ puisqu'il est alors nécessaire de réaliser en amont la tâche « calculer une moyenne pondérée ». Dans cette séquence, nous constatons donc la dépendance entre les différentes praxéologies : les tâches de conception et d'écriture des algorithmes font donc appel à une praxéologie algorithmique $\wp_{cea}$ qui fait appel à des praxéologies « auxiliaires », $\wp_{mp}$ et $\wp_{prix}$, nécessaires à l'écriture de la « *phase de traitement* » des algorithmes de calcul de la moyenne pondérée et du calcul des prix. L'implémentation des algorithmes nécessitera donc successivement la réalisation des praxéologies $\wp_{ta}$ et $\wp_{ia}$. Le schéma présenté dans la figure 2 résume les dépendances entre ces praxéologies.

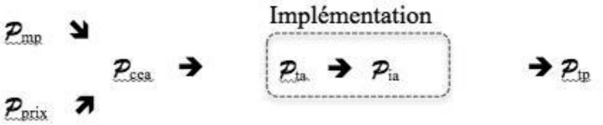


Figure 2. Dépendances entre les praxéologies.

Pour la praxéologie $\wp_{cea}$, algorithmique, la mise en œuvre de la technique mobilise des connaissances mathématiques qui sont des œuvres du milieu didactique. Parfois, ces œuvres peuvent être déjà connues de la classe : par exemple, dans l'étude du premier algorithme, les élèves savent déterminer sans problème que le point I construit est le milieu du segment [AB]. Mais parfois, elles peuvent nécessiter une étude préalable, de façon à rendre ces œuvres disponibles pour la classe (c'est le cas pour le calcul d'une moyenne pondérée ou l'utilisation d'un coefficient multiplicateur pour le calcul de prix). L'écriture d'algorithmes devient alors prétexte à l'étude ou la consolidation de notions mathématiques que les élèves ne connaissent ou ne maîtrisent pas : le calcul d'une moyenne pondérée ou du coefficient multiplicateur en première séquence, par exemple. Aussi, durant toute la séquence, praxéologies mathématiques et praxéologies algorithmiques alternent. Lorsque les algorithmes sont enfin écrits et implémentés, ils deviennent des outils d'aide à la résolution de problèmes mathématiques : l'enseignante se sert des programmes pour répondre à des questions d'ordre mathématique pouvant être posées dans son cours de mathématiques ou dans un autre cours. Ainsi justifie-t-elle les choix des tâches proposées à ses élèves : « C'était aussi une demande du professeur d'histoire-géo [*le calcul des pourcentages*] Et c'est pour ça aussi que…, le choix que j'ai fait pour votre la deuxième fiche d'algorithme, pour que vous ayez les programmes dans la machine. Normalement, vous allez aussi vous en servir dans les autres matières. »

Lors d'un cours de mathématiques « classique », l'enseignement portant sur les pourcentages et l'utilisation du coefficient multiplicateur fait travailler sur quatre types de tâches : le calcul de la remise (ou de l'augmentation), le calcul du prix après réduction (ou après augmentation), le calcul du prix initial, le taux d'évolution. On remarquera que les exercices donnés en algorithmique sont exactement de même type : écrire un algorithme calculant une remise, écrire un algorithme calculant un prix après réduction, écrire un algorithme calculant un prix après augmentation, écrire un algorithme calculant le prix initial, écrire un algorithme calculant un taux d'augmentation. On voit donc que la séquence d'enseignement de l'algorithmique est calquée, dans son déroulement, sur une séquence mathématique : le projet didactique a été construit par un sujet de l'institution mathématique. De plus, si l'algorithmique est au carrefour des mathématiques et de l'informatique, elle est ici objet d'étude au service des mathématiques. On a donc l'impression que l'enseignante, sujet de l'institution mathématique, perçoit l'algorithmique comme étant l'implémentation d'une formule mathématique, donnant le primat à des praxéologies mathématiques au dépend de praxéologies informatiques : l'écriture d'algorithmes devient un prétexte à la consolidation d'une nouvelle notion mathématique. Le programme écrit doit être utilisable dans la résolution ultérieure de problèmes mathématiques (voir figure 3) et devient alors un outil pour résoudre des problèmes.

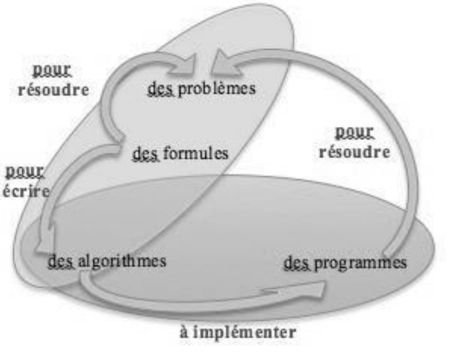


Figure 3. L'action didactique de l'enseignante, sujet de l'institution mathématique.

En conclusion, dans cette séquence, nous constatons qu'en voulant enseigner des mathématiques au travers de l'écriture d'algorithmes, l'enseignante est en premier lieu un sujet de l'institution mathématique. Elle s'est alors trouvée aux prises avec de nombreuses difficultés car, en réalité, elle a poursuivi plusieurs objectifs : enseigner des notions mathématiques, des notions algorithmiques et des notions informatiques.

Dans la deuxième séquence, l'enseignante a cette fois constitué le milieu initial en n'utilisant que des éléments connus des élèves : le théorème de Pythagore étudié au collège, la propriété de colinéarité de deux vecteurs, étudiée auparavant dans son cours de mathématiques, et des situations de vie ordinaire (voir figure 4).

Elle manifeste ainsi clairement son choix de porter son intention didactique sur des objets algorithmiques et non mathématiques. Nous faisons l'hypothèse qu'elle suppose qu'en travaillant sur des objets mathématiques connus des élèves, il sera plus aisé d'atteindre ses objectifs en matière algorithmique : faire comprendre l'instruction conditionnelle « si … alors … sinon » et faire écrire des algorithmes la mettant en œuvre.

1) Des situations familières….

Complétez les phrases suivantes :

P1 : Si $AB^2+AC^2=BC^2$ alors le triangle ABC est……………

P2 : SI …………. Alors les vecteurs $\vec{u}$ (x,y) et $\vec{v}$(x',y' ,)dans un repère orthonormé (O,I,J,) sont colinéaires

P3 : Si…………………alors les points A,B et C sont alignés sinon ils ne sont pas alignés

P4 :Si mon âge est supérieur à …… ans alors je peux passer mon permis de conduire sinon je ne peux pas

P5

- *Avec le forfait téléphonique « liberto » ,il n'y a pas d'abonnement fixe mais l'heure d'appel est facturée 12 euros*
- *.Avec le forfait « freedom », le temps de communication est illimité mais le prix de l'abonnement est de 80 euros par mois.*

Si je téléphone 3h par mois alors je dois choisir le forfait……

Si je téléphone plus de………h par mois alors je dois choisir le forfait………

4) A vous…

A vous d'écrire un algorithme qui traduit chacune des situations familières vues au 1)puis ,de la programmer sur votre calculatrice puis de le tester avec les tableaux ci-dessous :

Algorithme1 « TRIANGLE »

AB=	AC=	BC=	affichage
3	5	6	
$\sqrt{3}$	5	$2\sqrt{7}$	
1	$2\sqrt{2}$	3	
12	21	24	

Algorithme 2 « colinearité »

Vecteur $\vec{u}$	Vecteur $\vec{v}$	affichage
(-2/5 ;3)	(-1/3 ;2/5)	
(1/4 ;-5/3)	(1/5 ;-4/3)	
2/3 ;5/6)	(3/4 ;15/2)	
(-50 ;21)	(-3,1)	
(-2.3 ;18.4)	(9.1 ;-72.8)	

Figure 4. Situations proposées aux élèves.

Pour autant, lorsque nous posons notre regard sur les élèves, nous observons qu'ils ont du mal à évoluer d'un cadre conceptuel à un autre, et particulièrement d'un cadre géométrique à un cadre algorithmique. Les élèves restent soumis au domaine mathématique auquel la situation qui leur est proposée est rattachée comme l'illustre l'extrait ci-dessous qui montre la difficulté des élèves à passer d'un cadre géométrique à un cadre algorithmique :

E. Ici c'est des nombres qu'il faut demander ? Alors que c'est des vecteurs...

P. Oui. Alors il faut demander les coordonnées. Que tu écrives demander les coordonnées du vecteur U. Et entre parenthèses, c'est *a* et *b* par exemple. Tu vois c'est une bonne remarque ça.

E. Mais on ne marque pas *x*, *y*.

P. Il faut que tu marques... Il faut en demander quatre nombres. Il y a quatre entrées dans cet algorithme.

La nature même des éléments du milieu va faire obstacle à l'intention didactique, qu'ils soient ancrés dans la culture mathématique de l'élève (le théorème de Pythagore est étudié en 4e) ou qu'ils aient étudiés très récemment (la colinéarité des vecteurs) : les élèves réagissent en sujets de l'institution « mathématiques » et résistent à leur enseignante qui cherche à les amener sur un terrain algorithmique.

Par ailleurs, nous constatons que les élèves ne prennent pas la pleine mesure de la fonction d'un algorithme, c'est-à-dire effectuer des tâches répétitives ou fastidieuses, ne se servant alors des tableaux de valeurs proposés par l'enseignante que comme des outils de validations de leurs algorithmes. À aucun moment les élèves n'exprimeront l'aspect d'automatisation d'une tâche.

Au cours de notre recherche, il ressort donc que l'objet algorithme conserve son caractère hybride dans la transposition didactique externe. Par contre, il est nettement moins perceptible dans la transposition interne. Cela peut s'expliquer par le fait que l'institution ne fait référence à aucun résultat de travaux de recherche en didactique de l'algorithmique obligeant ainsi les enseignants à enseigner selon leur propre rapport à ce savoir, fruit des multiples expériences qu'ils auront vécues auparavant.

Références

ASTI. (2008). *Les rencontres de l'Orme 2008. Séminaire de l'ASTI.* http://www.epi.asso.fr/revue/docu/d0805a.htm

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné* (2e éd.). Grenoble : La pensée sauvage.

Couderette, M. (2012). *Analyse didactique de pratiques d'enseignement de l'algorithmique en classe de seconde en cours de mathématiques* (Mémoire de master). Université Toulouse 2.

Kahane, J.-P. (Éd.). (2000). *Informatique et enseignement des mathématiques*. https://www.pedagogie.ac-aix-marseille.fr/upload/docs/application/pdf/2011-08/informatique.pdf

Kahane, J.-P. (Éd.). (2002). *L'enseignement des sciences mathématiques*. Paris : Odile Jacob.

Knuth, D. (1968). *The art of computer programming* (Vol. 1). Reading, MA : Addison-Wesley.

Ministère de l'Éducation nationale. (2000). Classe de première. Mathématiques. Série scientifique. *Bulletin officiel hors-série n^o 7 du 31 août 2000*.

Ministère de l'Éducation nationale. (2009a). *Algorithmique (collection Ressources pour la classe de seconde)*. http://media.eduscol.education.fr/file/Programmes/17/8/Doc_ress_algo_v25_109178.pdf

Ministère de l'Éducation nationale. (2009b). Programme d'enseignement de mathématiques de la classe de seconde générale et technologique. *Bulletin officiel n^o 30 du 23 juillet 2009*.

Los niveles de codeterminación como herramientas para analizar las tareas de modelización matemática

Irene Ferrando Palomares
Dpto. de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Valencia, España

César Gallart y Lluís M. García Raffi
Colegio CEU San Pablo, Valencia
Dpto. de Matemática Aplicada, Universidad Politécnica de Valencia, España

Abstract. We present an experience carried out with students of grade nine (14-15 years old) solving modeling tasks with open answers. In the literature, different criteria (usually based on the modeling cycle) already exist to study the quality of this kind of tasks. Our goal in this paper is to show that a praxeological analysis based on the co-determination levels successfully complements the usual studies. Thus, a praxeological structuration of curriculum turns out to be useful to evaluate and design modeling tasks.

Résumé. Dans ce travail nous présentons une expérience mise en œuvre avec des élèves de troisième (14-15 ans), qui doivent étudier un type de tâches nouveau pour eux, avec des tâches de modélisation ouvertes. Dans la littérature, on trouve plusieurs critères (généralement fondés sur le cycle de modélisation) pour évaluer la qualité des tâches de ce type. Notre objectif est de montrer qu'une analyse praxéologique basée sur les niveaux de codétermination didactique complète bien les études habituelles. Ainsi, une structuration praxéologique des contenus travaillés en troisième se révèle utile pour évaluer et concevoir de tâches de modélisation riches.

Resumen. En este trabajo presentamos una experiencia llevada a cabo con alumnos de tercer curso de Educación Secundaria Obligatoria (14-15 años), los estudiantes debían enfrentarse a un tipo de tareas novedosas para ellos, tareas de modelización con respuestas abiertas. Ya existen en la bibliografía distintos criterios (en general basados en el ciclo de modelización) para estudiar la calidad de las tareas de este tipo. Nuestro objetivo en este artículo es mostrar que un análisis praxeológico basado en los niveles de determinación complementa de forma satisfactoria los estudios habituales. Así, una estructuración praxeológica de los contenidos del curso resulta ser útil para evaluar y diseñar tareas de modelización enriquecedoras.

IV[e] congrès international sur la TAD (Toulouse, 21-26 avril 2013)
Axe 2. *L'analyse praxéologique comme outil de l'analyse et de l'ingénierie didactiques*

Ferrando Palomares, I., Gallart, C. & García Raffi, L. M. (2017). Los niveles de codeterminación como herramientas para analizar las tareas de modelización matemática. Dans G. Cirade et al. (Éds), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* (pp. 357-371). https://citad4.sciencesconf.org

1. Introducción y objetivos del trabajo

Este trabajo se enmarca en las nuevas necesidades y expectativas de la educación matemática en el sistema educativo español: «preparar al alumno para su incorporación a estudios superiores y para su inserción laboral, y formarlo para el ejercicio de sus derechos y obligaciones en la vida como ciudadanas y ciudadanos» (RD1631/2006, anexo I, p. 685-690). Se ha tenido en cuenta que, tal y como se destaca en el informe PISA, la matematización de situaciones reales así como la interpretación, reflexión y validación los resultados matemáticos en la realidad deben ser unos de los objetivos fundamentales de todo sistema educativo, ya que «la evaluación de las matemáticas que hace PISA exige a los alumnos que se enfrenten con problemas matemáticos que están basados en algún contexto del mundo real» (Puig, 2006, p. 7). Bajo esta premisa, nuestro objetivo es analizar, usando algunas herramientas proporcionadas por la teoría antropológica de lo didáctico (TAD), una tarea de modelización.

Son numerosos los argumentos pragmáticos, formativos, culturales y psicológicos por los que la modelización se considera adecuada para la enseñanza de las matemáticas (Blum, 1993, 2002; Blum & Niss, 1991) ya que «la modelización puede contribuir a dar más sentido a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas» (Blum, 1993, p. 6). Existen algunas aproximaciones a la modelización realizadas en el contexto del Estado español, dentro de un marco de referencia más amplio, tanto a nivel universitario (Barquero, 2009; Gómez, 1999), como en la educación secundaria y el bachillerato (García, 2005; Sol, 2008) o en la formación de profesorado (participación española en el proyecto europeo LEMA). Sin embargo, todavía se encuentran reticencias por parte del profesorado a la hora de integrar este tipo de actividades en las clases tradicionales (véase Blum & Niss, 1991; Maaß, 2006; Kaiser et al., 2011).

Se pueden distinguir tres aspectos fundamentales para implementar una tarea de modelización (Lesh & Doerr, 2000):

- Diseño de tareas de modelización.
- Evaluación de las tareas de modelización (a partir de las actuaciones de los alumnos que las resuelven).
- Creación de unas herramientas de evaluación útiles para analizar las resoluciones de este tipo de tareas.

En este trabajo nos dedicaremos a analizar el segundo aspecto, la evaluación de las tareas de modelización, centrándonos en la actuación de los grupos de alumnos que las resuelven. Algunos autores proponen centrarse en un ciclo de modelización tomado como referencia, para a continuación relacionar la transición entre las fases del ciclo con las ocho competencias matemáticas y plantear una serie de cuestiones que permitan identificar las habilidades y destrezas que ponen en juego estas competencias (Maaß, 2006; Mousoulides et al., 2008). Este análisis de las tareas es bastante útil y permite comprobar que, efectivamente, las tareas propuestas son «auténticas» en el sentido de Katja Maaß (2006). Sin embargo existe otra herramienta complementaria que resulta extremadamente útil para el análisis de tareas (no necesariamente de modelización): se trata de la jerarquización de los contenidos matemáticos desde las *cuestiones* —máxima concreción— hasta la *disciplina* —en este caso, las matemáticas— pasando por los *temas*, los *sectores* y los *dominios*. Reconocer esta jerarquización permite realizar «una primera clasificación entre las restricciones presentes en el estudio escolar, evitando un desequilibrio flagrante entre lo que, teniendo en cuenta las restricciones, se tendrá en cuenta o se dejará de lado» (Chevallard, 2002, p. 2).

En efecto, tal y como argumenta Yves Chevallard (2002), una tarea será más motivadora cuando exista menos especificidad en los conocimientos que los alumnos tengan que utilizar para resolverla. De hecho, centrar las tareas en cuestiones excesivamente específicas sin tener en cuenta los niveles superiores de la jerarquización de contenidos, puede implicar, «no solo que la tarea no sea motivadora sino que no esté en absoluto motivada» (Ibid, p. 4). Así, el objetivo de este trabajo es usar la jerarquización en niveles de codeterminación como herramienta para evaluar la calidad de las tareas de modelización diseñadas.

Nos vamos a centrar en una experiencia realizada con alumnos de tercer curso de Educación Secundaria Obligatoria (ESO), 14-15 años. Hemos escogido este nivel porque los alumnos tienen unos contenidos matemáticos suficientes para trabajar tareas ricas y, sin embargo, no es fácil encontrar, entre los recursos disponibles para el profesorado, tareas de modelización ni, desgraciadamente, tareas en las que se trabajen contenidos de niveles altos de codeterminación.

Para responder a la cuestión principal que nos ocupa (¿cómo evaluar una tarea de modelización?), empezaremos por jerarquizar los contenidos de las matemáticas de tercer curso de ESO en base a los niveles de codeterminación establecidos por Y. Chevallard (2002). A continuación describiremos en detalle la experiencia, así como una de las tareas propuestas a los estudiantes. Un análisis, de las actuaciones de los alumnos que se han enfrentado a la experiencia, basado en las transiciones entre las fases del proceso de modelización, nos permitirá establecer cuáles son los contenidos trabajados en cada una de las tareas. El resultado de este análisis será el que permita concluir si, efectivamente, a través de las tareas propuestas, los alumnos han tenido en cuenta niveles de codeterminación superiores y, por tanto, si se trata, desde el punto de vista ecológico, de tareas motivadoras.

2. Esquematización de los contenidos de tercer curso de Educación secundaria Obligatoria según los niveles de codeterminación

La Teoría antropológica de lo didáctico propone una jerarquización de los niveles de codeterminación didáctica (Chevallard, 2002; Bosch & Gascón, 2009). El nivel más bajo es el formado por las *cuestiones* (en este caso matemáticas), y conforma la llamada organización puntual, que se corresponden a aquellos procesos que se trabajan mediante la ayuda de una misma técnica. Así, cada cuestión que genera un proceso de estudio en una institución didáctica forma parte de un *tema* (organización local) de forma que cada *tema* agrupa las *cuestiones* que se trabajan a través de la misma tecnología. A su vez aquellos *temas* que se desarrollan con la misma teoría se agrupan por *sectores de estudio* (pasando a una organización regional) que, a su vez, forman parte de un *área* (organización global). La unión de todas las organizaciones globales conforma la *disciplina*, en nuestro caso, las matemáticas.

Al igual que afirma Y. Chevallard (2002), consideramos que, a menudo, los profesores tienden a preocuparse únicamente de tratar de forma individual cada una de las *cuestiones* de estudio dejando de lado los *temas* o los *sectores*, niveles superiores de menor especificidad. Esta atomización implica a menudo una visión parcial de la disciplina que se trabaja ya que «en el movimiento de construcción-deconstrucción de las obras a estudias, no se reconstruye más que un puzzle que nunca podrá ser completado en conjunto» (Ibid., p. 3). Además esta focalización en las cuestiones implica, según Chevallard, una dificultad intrínseca en ofrecer tareas motivadoras a los alumnos. Y. Chevallard defiende que la única forma de construir tareas motivadoras es subiendo en los niveles de determinación matemática «las tareas motivadoras se encuentran en los niveles de determinación superiores de las organizaciones matemáticas —sectores y dominios» (Ibid., p. 4). No tener en cuenta los niveles superiores puede provocar, no sólo que las tareas no sean motivadoras, sino que no estén en absoluto motivadas (es decir, que lleven a desarrollar tecnologías que no corresponden a ninguna técnica). Por tanto la ausencia de relación entre las cuestiones planteadas en una tarea y los niveles superiores (temas, sectores y áreas) hace imposible la construcción de tareas motivadoras.

Nuestra intención es este trabajo es, basándonos en esta idea, utilizar la estructura en niveles de determinación de los contenidos de un curso de Educación Secundaria Obligatoria para analizar una tarea de modelización. Nos basaremos en las actuaciones de los alumnos al resolver la tarea pero, en primer lugar, necesitamos, una vez establecidas las definiciones relativas a los niveles de determinación didáctica, estructurar en base a ellos los contenidos de las matemáticas de tercer curso de ESO (nivel noveno, 14-15 años) establecidos por el currículo del estado Español.

En este nivel, la disciplina de matemáticas está compuesta por cinco áreas fundamentales: aritmética, álgebra, geometría, funciones y gráficas, estadística y probabilidad. En el anexo describimos, a través de unas tablas, los niveles inferiores (sectores, temas y cuestiones) relativos a cada una de las cinco áreas. Esta estructuración de los contenidos del programa nos permitirá evaluar, a partir de las actuaciones de los alumnos, la calidad de las tareas propuestas. En efecto, si observamos que, para desarrollar una tarea, el mismo alumno pone en juego contenidos correspondientes a apartados distintos de un mismo nivel (por ejemplo, cuestiones distintas que se trabajen mediante una misma tecnología), podremos establecer que la tarea se resuelve desde un nivel estrictamente superior.

Antes de analizar las actuaciones de los alumnos veamos, en el siguiente apartado, cómo se ha desarrollado la experiencia sobre la cual vamos a extraer información.

3. Descripción de la experiencia

El instituto en el que se llevó a cabo la experiencia es un centro privado ubicado en el extrarradio de la ciudad de Valencia. Los alumnos provienen de familias con un nivel económico y cultural medio-alto. Hemos trabajado con un grupo de 20 alumnos de tercer curso de ESO. La primera parte de la experiencia correspondió a la realización de un test de modelización diseñado para evaluar las competencias modelizadoras de los alumnos antes de su primer contacto con las tareas que aquí pretendemos estudiar. Los resultados de este test, comparados con los obtenidos en otro realizado al final de la experiencia, serán claves para evaluar la eficacia de nuestro experimento. Sin embargo en este trabajo nos centraremos únicamente en evaluar las tareas propuestas.

Los alumnos debían formar, libremente, grupos de dos o tres miembros antes de comenzar la actividad. Esta se llevó a cabo durante dos semanas del mes de enero de 2013 ocupando las sesiones de matemáticas (tres horas semanales) y algunas sesiones de tecnología (dos sesiones de una hora). El primer día se les proporcionó, a cada uno de los grupos, un dossier en el cual se presentan diez tareas. Tras una lectura en común del dossier, se señalan y comentan detenidamente los objetivos, criterios de evaluación y metodología a seguir durante las próximas sesiones de trabajo. El profesor-investigador que llevó a cabo la experiencia (César Gallart) informó a los alumnos sobre el proceso que se debía seguir: una vez escogida la tarea debían resolverla en grupo y, sólo en caso de auténtico bloqueo, el profesor podría plantear cuestiones dirigidas a mejorar la comprensión del problema, fijar objetivos, promover nuevas vías de resolución, o facilitar la validación de resultados, sin aportar más información de la estrictamente necesaria. Se insiste en que es el alumno el que debe asumir un papel protagonista, tomando el control del proceso y proponiendo sus propias estrategias de resolución. Finalmente debían preparar un informe con sus resultados así como una presentación para compartir con sus compañeros las soluciones obtenidas.

El siguiente apartado lo vamos a dedicar a mostrar qué criterios iniciales se han tenido en cuenta en el diseño de las tareas propuestas a los estudiantes. Describiremos en detalle una de ellas para, posteriormente y a partir de las actuaciones de los estudiantes que las han llevado a cabo, poder evaluarla con la herramienta de los niveles de codeterminación.

3.1. Diseño de las tareas

Para K. Maaβ (2006, p. 115) los problemas de modelización deben ser «auténticos, complejos y abiertos, relacionados con la realidad», además la misma autora proporciona algunos criterios básicos para clasificar las tareas de modelización (Maaβ, 2010). Dicho criterios fueron recogidos por los participantes del proyecto LEMA (http://www.lema-project.org/web.lemaproject/web/eu/tout.php) al establecer algunas directrices que deben cumplir las tareas de modelización. Por otro lado M. Blomhøj y T. H. Jensen (2006, p. 167) establecen algunos criterios que también hemos tenido en cuenta al diseñar las tareas que pretendemos evaluar. En esta misma línea, R. Lesh et al. (2002, pp. 591-645) promueven el uso de lo que él y sus colegas llaman «modelling-eliciting activities» y que se construyen a partir de seis principios básicos. Tomando en consideración algunos de los criterios y principios de los autores anteriores nos propusimos diseñar una serie de actividades de modelización que tuvieran como nexo común el centro escolar y que fueran adecuadas a los conocimientos propios de los alumnos de tercer curso de ESO. Así las tareas que propusimos a los estudiantes debían cumplir los siguientes objetivos:

- Estar centradas en el proceso de modelización.
- Ser auténticas en el sentido de que estuvieran basadas en datos reales.
- Que, para su resolución, demanden una simplificación previa de la realidad.
- Ser extra-matemáticas en el sentido de que sea necesario un proceso de traducción entre la realidad del enunciado y las matemáticas necesarias para su resolución.
- Ser abiertas, sin respuesta única.
- Ser interdisciplinares, en esta dirección ha sido especialmente interesante contar con el apoyo del departamento de tecnología.

A continuación pasamos a describir una de las tareas ofrecidas a los alumnos.

> Tarea: El problema de la sombra en el patio
> Como os habréis dado cuenta, el picudo ha obligado a talar numerosas palmeras en el patio central del Colegio, con lo que se nos presenta el problema de seleccionar nuevos árboles para plantar en su lugar y de esta manera establecer y mejorar las zonas de sombra de los recreos. Este problema también se plantea a la hora de diseñar un parque o jardín público. ¿Qué decisiones tomaríais para mejorar la zona de sombra del patio?

4. Resultados de la experiencia y análisis

4.1. Actuaciones de los alumnos

La tarea propuesta de la sombra en el patio presenta una situación bien conocida por los alumnos. Este curso, por causa de una enfermedad (el picudo), se ha tenido que talar numerosas palmeras, por lo que el patio de recreo se ha quedado prácticamente sin zona de sombra (esto corresponde a la *situación real*). Un primer acercamiento les lleva a una simplificación y formulación del problema: estudiar la sombra producida por un único árbol (*situación modelo*). A esta primera imagen personal sobre la situación se llega tras un proceso de reflexión, centrado en el problema de establecer la relación existente entre la superficie de la copa del árbol y la superficie de sombra que proyecta, y los diferentes tipos de árboles que pueden haber según la forma de su copa (corresponde al *modelo real*).

Una vez establecido su *modelo real*, utilizan el triángulo, el círculo y el rectángulo como modelos geométricos con los que idealizar la sección de la copa de los posibles árboles (esferas, poliedros), realizando con cartulina maquetas con las que simular, experimentalmente en el laboratorio, la realidad del patio a la hora del recreo. Este modelo geométrico a escala supondrá su *modelo matemático*, con el que intentarán resolver el problema planteado. Al llegar a este punto, los alumnos midieron en el patio el ángulo de inclinación de los rayos del sol durante el recreo: «Uno de nosotros se puso el extremo de una cuerda en la cabeza, otro sujetó el otro extremo justo donde acababa la sombra del primero y el tercero midió, con un transportador, el ángulo que formaban la cuerda y la sombra». A través de esta medición obtuvieron que el ángulo medía, aproximadamente, 42 grados. A continuación, en el laboratorio de Tecnología del centro utilizaron un flexo para emular el Sol, como fuente de emisión puntual no extensa, y observaron las sombras de algunas maquetas de árboles: «Con una cuerda fuimos cuadrando la posición del flexo hasta conseguir que la sombra de nuestros "árboles" y la cuerda formasen un ángulo de 42 grados. Calcamos las 3 sombras, pero no exactamente, sino aproximándolas a una figura regular, por ello los resultados fueron parecidos pero no iguales». La disparidad de las razones obtenidas para cada forma geométrica les hizo dudar sobre la adecuación de los resultados obtenidos en el patio y en el laboratorio.

Ante las dudas surgidas por sus primeros resultados, el profesor les recomendó repetir el experimento, no ya en el laboratorio, sino en el patio, fijándose en las sombras proyectadas por sus maquetas. De este modo iniciaban una nueva fase de resolución matemática del modelo, calculando *in situ* la relación entre el área de la copa de sus maquetas y el área de sombra que proyectaban, con el fin de obtener unos nuevos resultados: «Así pues repetimos el proceso pero con luz solar […]. Y efectivamente nos dio resultados diferentes a la primera vez […]. Escogimos la forma del círculo puesto que su relación nos aportaba una mayor cantidad de expansión de la sombra.»

	Círculo	Triángulo	Cuadrado
Área original	33,18 cm2	38,45 cm2	63,86 cm2
Área sombra	60,79 cm2	51,7 cm2	72,93 cm2
Relación	1,83	1,34	1,14

Tabla 1. Tabla elaborada por los alumnos para establecer la relación entre el área de la copa sección de la copa original y el área de la sombra proyectada.

Con este supuesto, y con ayuda de internet, obtuvieron las dimensiones medias de una especie de árbol (el ombú) cuya forma geométrica de la copa del árbol se ajustaba a su modelo ideal (una esfera). De este modo la solución matemática obtenida (la superficie de sombra proyecta por sus maquetas) se interpreta en la realidad en que se sitúa el problema, para obtener la solución real (superficie de sombra proyectada por un árbol de copa esférica, pues maximiza esta superficie). A continuación validaron esta solución considerando otros elementos como la distancia a la que se proyecta la sombra del árbol, el porcentaje de la superficie del patio que quieren sombrear o la superficie de sombra que proyecta el propio edificio del colegio. En esta fase de validación, el profesor aportó cuestiones que sugirieron nuevas vías de resolución: «Con vuestro modelo, ¿podéis hallar el número de árboles necesarios para sombrear un determinado porcentaje de la superficie del patio?», «¿Qué otros elementos influyen en el problema de la sombra», «Los resultados obtenidos son válidos solo para el momento del día y el período del año en el que se llevaron a cabo las mediciones, pero, ¿se podría determinar la superficie de sombra proyectada por los árboles en cualquier momento del día o del año a partir del modelo utilizado? ». La consideración de estos nuevos elementos supone iniciar un nuevo ciclo de modelización: «Sabiendo ahora la altura del árbol necesitábamos saber a qué distancia del tronco se proyectaría la sombra de la copa […] Con estos datos podemos realizar una regla de tres para averiguar donde se proyectará la sombra del ombú: aproximadamente 11m de longitud sombra».

Finalmente queda por establecer el número de árboles necesarios para sombrear un determinado porcentaje de la superficie del patio: «La sombra del edificio del Colegio cubría 552,5 m2, es decir un 10,24 % del patio. Únicamente debíamos sombrear otro 10% para obtener un 20% de sombra, previamente acordado». Para ello utilizan la expresión: $N = \frac{S}{rC}$, donde N es el número de árboles necesarios para proyectar un área S de sombra, siendo r la relación entre el área de la sección de la copa del árbol y la de la sombra proyectada y C el área de la sección de la copa del árbol. Este supondrá su modelo matemático definitivo, con el que resolver el problema: «Para finalizar dividimos 510 m^2 de área por sombrear entre los 116,3 m^2 de sombra que producía un ombú y obtuvimos que necesitaríamos aproximadamente 5 ombúes para cubrir el restante 10% de sombra de nuestro patio. La única condición que había de cumplirse es que los árboles fueran plantados con 11m de distancia entre uno y otro».

4.2. Análisis a través de los niveles de determinación

La reconstrucción del proceso de modelización seguido por los estudiantes permite determinar cuáles son los contenidos trabajados en cada una de las tareas y, posteriormente, a partir de la estructuración de los contenidos del curso según los niveles de codeterminación, establecer la calidad de la tarea propuesta.

En la primera tarea presentada se trabajan los siguientes contenidos:

- Escalas (utilización de modelos a escala de árboles).
- Figuras geométricas regulares (círculos, triángulos, rectángulos).
- Cuerpos geométricos: esferas y poliedros.
- Medida y cálculo de áreas.
- Semejanza (para realizar medidas indirectas).
- Razones de proporción (relación entre el área de la copa del árbol y el área de la sombra proyectada).
- Porcentajes.

Al observar las tablas 1 a 5 del Anexo, vemos que los contenidos anteriores pueden localizarse entre algunas cuestiones (nivel inferior) que aparecen en las tablas 1 y 3. En particular se trabajan los siguientes temas:

- Proporcionalidad y porcentajes : en el sector de las fracciones y los decimales (tabla 1)
- Semejanza y figuras planas: en el sector de la geometría plana (tabla 3)
- Cálculo de áreas, poliedros y esferas: en el sector de cuerpos geométricos (tabla 3).

Tenemos así que, al resolver la tarea de la sombra en el patio, los alumnos deben enfrentarse a cuestiones relativas a áreas distintas, aplicar tecnologías que, habitualmente, se trabajan aisladas (como las razones de proporción o los porcentajes) en sectores pertenecientes a otras áreas. Es decir, el alumnos debe relacionar cuestiones y, por tanto, escalar a niveles de codeterminación altos para poder resolver la tarea correctamente.

5. Conclusiones

Los niveles de codeterminación resultan ser una herramienta idónea para completar los análisis habituales de las tareas de modelización, es decir, aquellos basados en reconstruir el ciclo de modelización. La clasificación por áreas, sectores, temas y cuestiones, de los contenidos que se imparten en las aulas de secundaria, permite estudiar la calidad de las tareas propuestas a los estudiantes, pero creemos que, además puede resultar útil para diseñar tareas nuevas. El objetivo en fututos trabajos es determinar, a partir de las pruebas realizadas antes y después de la experiencia, si el hecho de trabajar con este tipo de tareas implica que los alumnos tengan más facilidad para relacionar contenidos que, habitualmente, se trabajan de forma aislada. Sería interesante también estudiar si el análisis praxeológico de las tareas permite desarrollar un sistema de evaluación del trabajo de los alumnos efectivo y fácil de implementar.

Referencias

Barquero, B. (2009). *Ecología de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las matemáticas* (Tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona, España.

Bosch, M. & Gascón, J. (2009). Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. En M. J. González, M. T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en educación matemática XIII* (pp. 89-113). Santander, España: SEIEM.

Blømhoj, M. & Jensen, T. H. (2007). What's all the fuss about competencies? En W. Blum, H. Galbraith & M. Niss (Ed), *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI Study*. Dordrecht, Países Bajos: Springer.

Blum, W. & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects – State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 37-68.

Blum, W. (1993). Mathematical modelling in mathematics education and instruction. En T. Breiteig, I. Huntley & G. Kaiser-Messmer (Eds.) *Teaching and learning mathematics in context* (pp. 3-14). Chichester: Ellis Horwood.

Blum, W. (2002). ICMI study 14: Applications and modelling in mathematics education – Discussion document. *Educational Studies in Mathematics, 51*, 149-171.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. Écologie & régulation. En J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, F. Ruhal (Eds.), *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 41-56). Grenoble: La pensée sauvage.

García, F. J. (2005). *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales* (Tesis doctoral). Universidad de Jaén, España.

Gómez, J. (1999). *Contribució a l´estudi dels procesos de modelització a l´ensenyament/aprenentatge de les matemàtiques a nivel universitari* (Tesis doctoral). Universitat Politècnica de Catalunya, España.

Kaiser, G., Blum, W., Borromeo Ferri, R. & Stillman, G. (2011). *Trends in teaching and learning of mathematical modelling. ICTMA 14*. Dordrecht, Países Bajos: Springer.

Maaß, K. (2006). What are modeling competencies? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38*(2), 113-142.

Maaß, K. (2010). Classification scheme for modelling tasks. *Journal für Mathematik-Didaktik, 31*(2), 285-311.

Mousoulides, N. G., Christou, C. & Sriraman, B. (2008). A modeling perspective on the teaching and learning of mathematical problem solving. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(3), 293-304.

Lesh, R. (2002). Research design in mathematics education: Focusing on design experiments. En L. English (Ed.), *International handbook of research design in mathematics education*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lesh, R. & Doerr, H. M. (Eds.) (2003). *Beyond Constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Puig, L. (2006). Sentido y elaboración del componente de competencia de los modelos teóricos locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. En P. Bolea, M.ª J. González & M. Moreno (Eds.), *Investigación en educación matemática. Actas del X Simposio de la SEIEM* (pp. 107-126). Huesca, España: Instituto de Estudios Altoaragoneses / Universidad de Zaragoza.

Sol, M. (2008). *Projectes matematics a l'educació secundària obligatioria* (Tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona, España.

Anexo

En las siguientes tablas se describen, para cada una de las cinco áreas fundamentales, sus niveles inferiores correspondientes (sectores, temas y cuestiones de estudio).

Aritmética					
Fracciones y decimales			Potencias y aproximaciones		
Racionales	Decimales	Proporcio-nalidad	Porcentajes	Potenciación	Aproximaciones y errores
Enteros. Fracciones. Recta real. Operaciones combinadas.	Exactos. Periódicos. Fracción generatriz.	Razones de proporción. Directa. Inversa. Compuesta. Repartos.	Cálculo de porcentajes. Variaciones porcentuales. Porcentajes encadenados. Interés simple y compuesto.	Exponente entero. Operaciones. Notación científica.	Redondeo. Cifras significativas. Error absoluto. Error relativo.

Geometría					
Geometría plana				Cuerpos geométricos	
Polígonos	Lugares geométricos	Semejanza	Poliedros	Esfera	Polígonos
Clasificación y elementos. Áreas. Teorema de Pitágoras.	Bisectriz. Mediatriz. Circunferencia Arco capaz.	Figuras semejantes. Escalas. Teorema de Tales.	Clasificación y elementos. Regulares e irregulares. Teorema de Euler. Plano y ejes de simetría. Áreas y volúmenes.	Globo terráqueo. Coordenadas. Husos. Mapas.	Clasifica-ción y elementos. Áreas. Teorema de Pitágoras.

Funciones y gráficas					
Relaciones funcionales				Funciones lineales	
Expresión	Grafica	Constante	Proporciona-lidad	Expresión	Grafica
Tabla de valores. Expresión analítica. Enunciado verbal. Gráficas.	Crecimiento y decreci-miento. Máximos y mínimos. Simetrías. Periodicidad	Representa-ción gráfica. Pendiente. Ecuación de una función de propor-cionalidad. Uso de modelos.	Representación gráfica. Pendiente y ordenada en el origen. Ecuación de la recta que pasa por dos puntos.	Tabla de valores. Expresión analítica. Enunciado verbal. Gráficas.	Crecimiento y decreci-miento. Máximos y mínimos. Simetrías. Periodicidad.

Estadística y probabilidad					
Estadística				Probabilidad	
Análisis	Parámetros	Análisis	Parámetros	Análisis	Parámetros
Tipos de variables: discretas y continuas. Tablas de frecuencias. Gráficos estadísticos.	Parámetros de centralización: Media, mediana, moda y cuartiles. Parámetros de dispersión: Rango y desviación típica.	Tipos de variables: discretas y continuas. Tablas de frecuencias. Gráficos estadísticos.	Parámetros de centralización: Media, mediana, moda y cuartiles. Parámetros de dispersión: Rango y desviación típica.	Tipos de variables: discretas y continuas. Tablas de frecuencias. Gráficos estadísticos.	Parámetros de centralización: Media, mediana, moda y cuartiles. Parámetros de dispersión: Rango y desviación típica.

How do students deal with the chemical knowledge during an experimental design in SCY-Lab?

Isabelle Girault and Hamid Chaachoua
Laboratory of Informatics of Grenoble, University of Grenoble, France

Resumen. Este estudio describe un modelo praxeológico de referencia adaptado a las ciencias experimentales. Este modelo sirve como herramienta para analizar los conocimientos de los alumnos en el contexto de un proceso de investigación. Los resultados muestras cuáles son las técnicas utilizadas por los alumnos durante el diseño de un experimento de química así como su habilidad para aportar algunos elementos tecnológicos. Parece que los alumnos han aprendido algunas técnicas durante esta situación de enseñanza. Para algunas tareas, han percibido la tecnología asociada, mientras que para otras la técnica parece utilizada sin ninguna comprensión de los elementos teóricos subyacentes.

Résumé. Cette étude décrit un modèle praxéologique de référence adapté aux sciences expérimentales. Ce modèle est utilisé pour analyser les connaissances des élèves dans le contexte d'une démarche d'investigation. Les résultats montrent quelles sont les techniques choisies par les élèves lors de la conception expérimentale d'une expérience en chimie, ainsi que les technologies mobilisées. Il semble que les élèves ont appris des techniques lors de cette situation d'enseignement. Pour certaines taches ils ont perçu la technologie associée, alors que pour d'autres la technique semble être employée sans compréhension des enjeux théoriques sous-jacents.

Abstract. This study describes a reference praxeological model adapted to the experimental sciences. This model is used as a tool to analyse students' knowledge in the context of a scientific inquiry. The results show the techniques chosen by the students during the design of a chemical experiment and their ability to give some elements of justification of the techniques. It seems like students learn some techniques and understand the associated technology for some tasks but this is not always the case.

IV^e congrès international sur la TAD (Toulouse, 21-26 avril 2013)
Axe 2. *L'analyse praxéologique comme outil de l'analyse et de l'ingénierie didactiques*

Girault, I. & Chaachoua, H. (2017). How do students deal with the chemical knowledge during an experimental design in SCY-Lab? Dans G. Cirade et al. (Éds), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* (pp. 373-385). https://citad4.sciencesconf.org

1. Introduction

The goal of this study is to characterize the knowledge students deal with when they follow the chemistry part of the Forensic Lab project in the technology enhanced learning environment SCY-Lab (De Jong et al., 2010). During this project, students have to design an experiment to answer the scientific problem "determine which pen has been used to write a letter". The experimental design is considered in the context of the broader activity of the experimental process: a subject has to solve a scientific problem through experimentation. Different studies have emphasized the importance of designing an experiment in a learning context. Neber and Anton (2008) observed higher-order cognitive activities (thinking) of students facing such a task. Arce and Betancourt (1997) have found that the students show better understanding of concepts related to the experiments they designed themselves.

This study is structured in two parts. The first one describes the reference praxeological model (RPM) adapted to the experimental sciences. The second part focuses on the techniques chosen by the students during the design of the chemical experiment and the justification of their techniques. The RPM is used as a tool to analyse students' knowledge. This is done by analysing the content of the students' production and the interactions taking place between the students (and the teachers) while solving the problem. A combined analysis with pre and post-test data will give more information on the techniques and technologies used by students.

2. Construction of a reference praxeological model (RPM)

We developed a conceptual framework based on epistemological and didactic considerations to analyse and act on the teaching system. Based on the ATD model, we defined a type of tasks T_e "Study a scientific problem by the experimentation", that can describe the experimental activities in science. T_e is characterized by the fact that the studied scientific problem can be solved by a process that includes an experimentation phase. We describe at a generic level[1] a RPM in relation to this type of tasks T_e, but it can be

1. In opposition to the instantiated level, the generic level is not related to the task itself but to the type of task in which it belongs.

instantiated in several studied scientific domains, giving domain specific reference praxeologies.

The description of the RPM was done according to the model defined by Chaachoua[2]. The description of a technique τ corresponds to a sequence of other types of tasks, each of them having its own praxeology. We can decompose each technique step by step until we reach an elementary level (*i.e.* a level where the types of tasks correspond to techniques that do not need to be explicit for different reasons) and we consequently elaborate a coherent RPM.

For the type of task T_e, the technique is composed of several types of tasks (T_1: reformulate the problem; T_2: design an experiment; T_3: execute the experiment; T_4: analyse the data; T_5: conclude). Each of these types of tasks is described with the same principle. We thus developed a praxeological map describing the *praxis* part of a RPM around T_e. This particular one has been applied in several domains, including physics, biology and chemistry.

The present research describes a case study in chemistry where T_e is "Identify an ink". As described above, at a generic level we can describe the technique of T_e as a sequence of types of tasks. If we consider now T_2: design an experiment, at a generic level, its technique can also be described by several types of tasks ($T_{2,1}$: define the observable in relation with the problem; $T_{2,2}$: define the experimental system (materials and measurement aspects); $T_{2,3}$: define the experiments and their order). If we instantiate the type of task T_2: design an experiment, the technique is described by a sequence of tasks that are instantiations of the type of tasks of the generic level ($T_{2,1}$: an ink is soluble and composed of several chemical species; $T_{2,2}$: use the TLC technique to solve the problem; $T_{2,3}$: choose the solvent, the chemical components and the organization of the TLC plate). The task $T_{2,3}$ is also described by a technique $\tau_{2,3}$. In the next section, we study the set of tasks (tasks 1, tasks 2, …) that compose $\tau_{2,3}$. We consider each of them as an elementary task. It means that we can associate a technique, technology and theory but the technique will not be further detailed because for the researcher (or teacher) the students' difficulties can be explained at this level of granularity.

2. This model will be presented in a separate communication proposed by Chaachoua and Ferraton in this seminar.

3. Case study in chemistry

3.1. Analysis of the knowledge with the RPM

The questions we want to answer are the following:

- What are the techniques used by students in their problem solving (task $T_{2,3}$ specifically)?
- To what extent do the students display an understanding of/justify the underlying principles of the techniques (logos, part of the praxeology) carried out during their problem solving?

Table 1 shows the selected tasks we want to explore (type of tasks $T_{2,3}$). This table also specifies for each task the technique(s) that are expected to solve these tasks, the associated technologies (justification of the tasks) and the underlying pieces of theoretical knowledge.

Tasks	**Techniques**	**Technologies**	**Theoretical knowledge**
Task 1 Choose the solvent in order to make the elution	One solvent is chosen for a specific reason (P1)	The solvent is chosen because of its capacity to solve substances: choose the solvent water for inks soluble in water (non-permanent) or the solvent ethanol for inks that are not soluble in water (permanent).	A solute is more or less soluble in a solvent. This is characterized by its solubility (T1) Migration speed of substances on the stationary phase depends on their interaction with the mobile and the stationary phase. The more a substance is soluble in the mobile phase, the fastest it will migrate on the stationary phase = T2
	Or Several solvents need to be tested to obtain	If there is an elution with several solvents, it is possible to compare the results	T2

	different profiles (P2)	and increase the chances of solubilising our samples.	
Task 2 Choose the sample to be put on the thin layer chromatography (TLC) plate	All the compounds that are related to the problem to be solved need to be tested: all the samples and the reference (P3)	TLC is an identification technique that allows the comparison of samples (inks). It is not possible to compare if all the samples are not tested with the TLC technique.	Chromatography is an identification technique (by comparison) (T3)
Task 3 Choose the elution's conditions	All the samples need to be tested in the same elution's conditions (same solvent and same type of TLC plate) (P4)	The identification of inks corresponds to a comparison of the retention factor (Rf) of the compounds. And the Rf of a chemical compound depends on the elution's conditions (solvent and plate).	T2
Task 4 Determine Rf for each component	Rf corresponds to the distance covered by the substance, divided by the distance covered by the solvent front (P5)	The value of Rf informs on the speed of migration of a chemical compound on a plate: the compound can be retained by the plate, eluted by the solvent…	In a chromatography analysis, the substances migrate at various speeds on the stationary phase (T4)

Table 1. List of tasks students have to perform during the mission and more specifically during the activity "design of the experiment", and their associated techniques, technologies and theoretical knowledge.

3.2. Methodology

The Forensic Lab mission was tested in a public school in Grenoble, France, from October to December 2011. The mission took place during nine class sessions of one hour and a half. Six sessions were dedicated to the biology cycle of the mission and three sessions to the chemistry cycle. Our study only concerns this chemistry part. The participants were 34 students of first year of “Lycée” (15 year-olds) coming from one class. The class was distributed in two sub-groups and students worked in dyads on SCY-Lab (eight dyads in the first group and 9 dyads in the second one).

Screen-record videos were collected during the three studied sessions of the Forensic Lab mission, as well as audios. The screen videos and the audios were synchronized and then analysed with the ELAN software. To identify the tasks, techniques and technologies, we used the students’ productions and also the verbal interactions between the students and between the students and the teacher. To have more information about students’ technologies, we asked them to justify their tasks in the experimental procedure (for each task, there is a specific dialogue box). We also listened to their recorded discussions while they wrote the experimental procedure, in case they say more than they write.

3.3. Results and discussion

So far, we have performed an in-depth analysis of the work of two groups of students during the mission, in order to gain an understanding of the techniques they use for the selected tasks (see table 1) and to search for elements of technology during their work. A pre and post-tests were also performed (data not shown here) but we will give elements of this data during the discussion. During these tests, questions were asked at a technique, technology or theoretical level.

Task 1: Choose a solvent

Group 1

When the students first design their experimentation, they do not choose the solvent. They write a generic sentence such as “Put the solvent in the TLC chamber”. Once they have completed their procedure, the teacher gives feedback, saying that it lacks precision. They start discussing the choice of the solvent.

Teacher: Which solvent are you going to use?

Student 1: It is water.

Student 2: It is ethanol.

Teacher: You do not agree with each other. It can be one, the other one, a mix of both…, it is your choice.

Student 1: Do we have to use both, one after each other?

Teacher: It is up to you.

Student 1: If we mix both solvents, it will not work.

Teacher: You have to think about that. You can do the test and if it does not work, you will have to change the solvent.

This discussion with the teacher helps them decide to carry out the experiment twice, first with water as the solvent and then with ethanol. So they modify their experimental procedure accordingly. The students perform the experiment with water. They look at the TLC elution and have a discussion with the teacher.

Student 1: Even the unknown ink does not move.

Teacher: This means that it is not soluble in the solvent.

Student 1: Ah yes, it is true that we need to put a second one. We will have to put alcohol after.

Later on, the teacher insists on writing a justification for the choice of the solvent in their experimental procedure. The students write: "We need ethanol because the inks are not diluted enough in water compared to ethanol."

In conclusion, this group of students uses a mixed technique between P1 (one solvent is chosen for a specific reason) and P2 (several solvents need to be tested to obtain different profiles).

They plan to use both available solvents (P2), but they also give a justification based on the results that are closer to the technology we assigned to P1: the inks are not diluted enough (*solubilised would be better*) in one solvent.

Since the teacher gave some elements of technology in his last sentence, we could not be sure that the students really understood the reason of the technique. For this purpose, we compared this result with the students' answer to the pre and post-tests. Only one student of group 11 was present for both tests. This student gives a correct answer at the theory and technology level questions only for the post-test.

This supports the idea that after the mission, this group (at least one student of this group) is able to deal with the task "choose a solvent" and understands that there is a relation between the choice of the solvent and the solubility.

Group 2

The students ask the teacher what has to be put inside the TLC chamber (which solvent).

> Student 1: What is in the TLC chamber?
>
> Teacher: It is the solvent. So which solvent? You have to choose.
>
> Student 1: Is it not ethanol that was said before?
>
> Teacher: You have water and ethanol available. Which one do you use? One, the other, a mixture, all of them? Think about it.

After that, they write in their experimental procedure "Put 5 mm of solvent in the TLC chamber" in their experimental procedure. Since the teacher did not give the answer, they do not make a choice at this moment.

The students perform the experiment without specifying the solvent in the procedure. They don't talk at all about which solvent they are using. It is actually ethanol but there is no discussion whatsoever about how they made the choice. It appears that their neighbouring pair of students performed the experiment with ethanol and they probably just repeated what the others were doing.

Once they have the results of their elution, they ask the teacher for explanations.

> Student 1: Why is there one product that is not going up.
>
> Teacher: Do you have any idea?
>
> Student 2: Because it is not soluble in the solvent.
>
> Teacher: So, if it is not soluble in the solvent, what must you do?
>
> Student 1: This means that we have to repeat the experiment with a solvent that will be able to solubilise all the 5 products.
>
> Teacher: This would be the ideal situation, but is your unknown product soluble in this solvent?
>
> Student 1: Yes, so this means that this one (showing one of the sample) is not the suspect.

The students realise that a better solvent could be chosen but the teacher reminds them that the goal of this experiment is to solve the problem and that this solvent is good enough for that purpose. In fact the students used none of the expected techniques, but rather appeared to choose one solvent for no specific reason. However, the students have expressed some ideas related to solubility. They might have understood something about the choice of the solvent. The teacher asks them to check their experimental procedure after the experiment, to see if it matches the experiment they have done, and also to justify the choice of the solvent. The students then modify the procedure by specifying the solvent as ethanol. They also justify it this way: “we chose ethanol because it seems to be a good choice”.

The justification of the students actually doesn’t justify anything! Their explanation is not based on any technology even though the students have expressed later an understanding of solubility in another context that they have not been able to directly relate to the mission:

> Student 1: Has plenty of ink on his hands
>
> Student 1: This is the waterproof pen I just used for the experiment. I can use some alcohol and it will be gone.

When looking at the results of the pre and post-tests, we can see that both students give a correct answer at the technology level for both tests. More data (such as an interview with the students) would be needed to confirm that the students make a stable relation between the choice of the solvent and solubility.

Task 2: Choose the sample to be put on the TLC plate

Group 1

The students specify in their experimental procedure that they draw a line and put on this line all the samples to be analysed.

Later on, the teacher checks the written procedure.

> Teacher: There are things that are not precise. What are the inks?
>
> Student 1: The inks, that’s the one we have, all of them.
>
> Teacher: Yes, but which ones?
>
> Student 1: It is the unknown ink and the pens’ inks.

The students use the expected technique. The students also have no difficulties with the corresponding question in the pre and post-tests regarding the technique level. No elements of justification were found in the procedure or during the verbalisations, and no questions were asked in the test at the technology level. The theory level was tested and the students give a correct answer in the tests.

Group 2

Students first write in their procedure that they draw 3 crosses and put a drop of each ink on the crosses. Indeed the choice of 3 samples corresponds to the TLC animation (available resources they are using to prepare the procedure: there are 3 compounds to be eluted in the animation).

When they perform their experiment, they deal with the samples to be tested and use all of them (unknown inks and pens) and later modify their procedure accordingly. These students use the expected technique but there are no elements of justification.

The results of the pre and post-test are the same as for group 1.

> This data confirm that the students know the technique but there is no evidence that they understand the underlying elements of theory. They might know a technique and use it in an "automatic way".

Task 3: Choose the elution's conditions

All the samples need to be tested with the same solvent and the same type of TLC plate.

As only one type of plate was presented to the students, nobody asked for a different type of plate. So, this task only concerns the solvent in this experiment. The teacher wanted to force the students to face the problem of identical elution's conditions: six samples were given and the TLC plates were already cut down to a size that was expected to be too small to put all the samples correctly on one plate. In this case, the students would need to use two TLC plate and use the same solvent for both plates.

Group 1

The students repeat the experiment with two different solvents, but for each solvent, they preferred to squeeze the samples rather than using two TLC plates. These students apply the expected technique but choose a strategy that bypasses the problem.

Group 2

Since these students only choose one solvent, they have no choice about the elution's condition, so by default they use a correct technique.

The answer of these students for the associated questions in the pre and post-tests show that they all answer correctly at the technique level in the post-test but not in the pre-test. Regarding the technology level, nobody was able to give an answer in the pre-test and only one student did not give a correct answer in the post-test.

The analysis of this data makes us believe that these students learn a correct technique while solving the problem (even if all have them did not have to directly deal with it) and most of them seem to understand what is behind the technique.

Task 4: Determine Rf for each component

Group 1

The students first choose an incorrect technique when they describe it in the procedure: Rf is the ratio of the distance of an ink on the distance of the reference ink. Later, when analysing their data, they look at the animation that describes this task and use the correct expected technique P5. The students discuss the technique but do not justify it. The results of the pre and post-tests show that the student of group 1 select the correct answer at a technique level but not at a technology level in both tests. This is coherent with what happens during the mission in SCY-Lab. However the student gives a correct answer regarding the theory level in both the pre and post-tests.

Group 2

The students write in the experimental procedure the correct technique that they found in the animation. When they need to calculate Rf, they apply this technique correctly. We do not find any element of justification of this technique in their work.

Both students select the appropriate technique only in the post-test, so it seems like that while solving the problem, they learnt this technique. Regarding the justification (technology level), only student 1 of this group gives a correct answer, and only in the post-test. However, he also selects an incorrect technique (together with the correct technique), so this tends to discredit all his answers, including the correct justification. For the theory level, they both give a correct answer in the pre and post-tests.

> This result emphasizes the difficulty to make a connection between the theory and the technique. Even if the students apparently know the theory, they seem to have difficulties to use it in a contextualized situation.

4. Conclusion

This case study gives more insight about the techniques used by the students and about their ability to give some elements of justification of the techniques. These results are based on the analysis of only two groups out of 17. Once all the work will be done, we will have a better overview of the difficulties students might have with these tasks and understand where the difficulties might be (which task and for a specific task, which level is concerned). However these preliminary results show already a diversity of situations.

We find that the students tend to learn an automatic technique for some tasks. Puntambekar and Kolodner (2005) emphasize the difficulty for students to reason about and justify their design. Students can concentrate on the technique without understanding what is behind. In this case they succeed in the expected task but this could show limits when the problem to be solved is more complex. Another study showed a similar result in chemistry when the students choose a solution to rinse a material (Giraut, d'Ham, Aturkmani & Chaachoua, 2012). They always tend to rinse with water but the validity of this technique appears when different materials are used. However in other cases, the students learn a technique and they seem to also understand the associated theoretical knowledge. This first analysis shows that this experimental design favours the learning of some techniques and for several tasks, it helped students to link Praxis and Logos elements. It is a good encouragement to pursue in that direction with further studies and is coherent with previous studies (Arce & Betancourt, 1997).

We asked students to justify the tasks they are writing in their procedure but students found this activity difficult and were most of the time not able to do it. It is important to give the opportunity to students to justify their decisions and find strategies to support this activity (Baumgartner & Reiser, 1998; Etkina et al, 2010). However, the technological elements need to be accessible to students and provided by the institution (which is not always obvious). The use of a TEL system is a good opportunity to scaffold this activity and specify automatic feedback. Based on this praxeological analysis, we could give feedback to students at a technique or technology level, depending on the difficulties they have and the learning goals.

References

Arce, J. & Betancourt, R. (1997). Student-designed experiments in scientific lab instruction. *Journal of College Science Teaching, 27*(2), 114-118.

Baumgartner, E. & Reiser, B. J. (1998, April). *Strategies for supporting student inquiry in design tasks*. Paper presented at the Annual Conference of the American Educational Research Association, San Diego, CA.

De Jong, T., Van Joolingen, W. R., Giemza, A., Girault, I., Hoppe, U., Kindermann, J., … Van Der Zanden, M. (2010). Learning by creating and exchanging objects: The SCY experience. *British Journal of Educational Technology*, *41*(6), 909–921.

Etkina, E., Karelina, A. & Ruibal-Villasenor, M. (2010). Design and reflection help students develop scientific abilities: learning in introductory physics laboratories. *The Journal of the Learning Sciences, 19*, 54-98.

Girault, I., d'Ham, C., Alturkmani, M. & Chaachoua, H. (2012). An anthropological approach to analyse a chemical knowledge during experimental design. In C. Bruguière, A. Tiberghien & P. Clément (Eds.), *E-book Proceedings of the ESERA 2011 Conference: Science learning and citizenship* (pp. 44-49). Lyon: European Science Education Research Association.
http://repositorium.sdum.uminho.pt/handle/1822/19553

Neber, H. & Anton, M. (2008). Promoting pre-experimental activities in high-school chemistry: focusing on the role of students' epistemic questions. *International Journal of Science Education, 30*(13), 1801-1821.

Puntambekar, S. & Kolodner, J. L. (2005). Toward implementing distributed scaffolding: helping students learn science from design. *Journal of Research in Science Teaching, 42*(2), 185-217.

Mathematics communication within the frame of supplemental instruction SOLO & ATD progression

Annalena Holm

Faculty of science, Lund University, Sweden

Resumen. La «Supplemental Instruction» (SI) se considera como un método de aprendizaje cooperativo/colaborativo que se utiliza en las universidades y, últimamente, también en el bachillerato en Suecia. Para evaluar la SI, se han realizado varias investigaciones en universidades en todo el mundo, pero no hay casi ninguna investigación realizada en los niveles inferiores. Este texto tiene como objetivo desarrollar una estrategia que consiste en una combinación de la ATD y la taxonomía SOLO. La estrategia se ha utilizado en un estudio piloto y la intención es usarla en el análisis de las discusiones de los estudiantes en las secciones de SI en matemáticas en el bachillerato sueco.

Résumé. « Supplemental Instruction » (SI) est une méthode de coopération entre étudiants. Plusieurs études ont été faites pour évaluer l'effet des SI sur les résultats des étudiants au niveau du troisième cycle à travers le monde, mais peu d'études ont été faites au niveau secondaire. SI est utilisé en mathématiques au niveau universitaire et récemment dans des lycées en Suède. L'objectif de ce texte est de développer une stratégie qui est une combinaison entre la TAD et la taxonomie SOLO. La stratégie a été utilisée dans une étude pilote et l'intention est de l'utiliser lors de l'analyse des discussions entre les élèves en mathématiques au cours de SI-sessions dans des lycées en Suède.

Abstract. "Supplemental Instruction" (SI) is considered as a method for cooperative/collaborative learning. It is being used at universities in many countries including Sweden, and lately in upper secondary schools. Several studies have been made to evaluate SI in universities throughout the world, but hardly any studies have been carried out at lower levels. This text aims at developing an analysis strategy that is a combination of ATD and the SOLO-taxonomy. The combination has been used in a pilot study. The intention is to use the strategy when analysing students' discussions in mathematics at SI-sessions in Swedish upper secondary school.

IV[e] congrès international sur la TAD (Toulouse, 21-26 avril 2013)

Axe 2. *L'analyse praxéologique comme outil de l'analyse et de l'ingénierie didactiques*

Holm, A. (2017). Mathematics communication within the frame of supplemental instruction SOLO & ATD progression. Dans G. Cirade et al. (Éds), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* (pp. 387-405). https://citad4.sciencesconf.org

1. Introduction

The teacher and the teachers' choice of method are considered having a high influence on what students learn (Hattie, 2012). Education research may add to understanding of what possibilities students have to learn within a specific method, and both quantitative and qualitative methodologies have been used during decades to explore this issue (Good & Grouws, 1979; Hattie, 2009; Hiebert & Grouws, 2007).

Findings that point at the need of more education research are those stated by Jakobsson, Mäkitalo & Säljö (2009). They tested students' knowledge in environmental science and compared students' results in written tests by results from group discussions. Jakobsson et al. emphasize that written tests just give limited information about students' knowledge, and they conclude that if one wants to know what a student has learnt one has to do more than just letting him/her answer questions individually.

Research findings have inspired the new curriculum for upper secondary school that was introduced in 2011 in Sweden (Skolverket, 2012-08-06). The new mathematics curriculum poses challenges for teachers and includes explicit competencies that students are expected to obtain. To meet the curricula demands, and to strengthen the students' mathematics knowledge, a couple of schools in southern Sweden have introduced the so-called "supplemental instruction" or "SI". SI is considered a special form of collaborative/cooperative learning, which is a family of educational methods based on a philosophy saying that students learn better if learning together in small groups (Johnson & Johnson, 1999; Slavin, 1995). Such an extra effort with problem solving and mathematics communication is supported by the new Swedish mathematics curriculum. This new concept of SI in Swedish upper secondary school has not been thoroughly analysed yet.

This text presents a pilot study focusing on mathematics communication and supplemental instruction at Swedish upper secondary schools. The first paragraph will describe the study context as well as the concept supplemental instruction. Then follows the theoretical frameworks are described and a strategy is suggested for observing and analysing students learning progression. Finally, it is discussed whether the suggested strategy can be useful when analysing and developing methods for mathematics education in general and mathematics discussions in particular.

2. Study context & theoretical frameworks

2.1. Study context - Supplemental instruction

One method for mathematics education is *Supplemental Instruction* (McCarthy, Smuts & Cosser, 1997; Ogden, Thompsson, Russel & Simons, 2003; Malm, Bryngfors & Mörner, 2010, 2011a, 2011b, 2011c).

> The idea behind it is that learning a subject is enhanced by exchange of thoughts and ideas between students. The supplemental instruction sessions are guided by a senior student. This senior student takes the role of a facilitator and aids clarification of tough questions within the subject by asking questions, initiating work in small groups, and coordinating the presentation of conclusions. (Malm et al., 2011b, p. 2)

SI is used by many universities in the world (Malm et al., 2010, 2011), and has recently been introduced in upper secondary schools in Sweden. The many studies that have been done throughout the world to evaluate the outcomes of SI in universities point at SI being effective when supporting "weak" students in mathematics (Malm et al., 2011c). Hardly any studies have been made at lower levels.

One study, however, has evaluated SI in Swedish upper secondary school (Malm et al., 2012). This evaluation of SI "focused on several areas to obtain an indication of how the SI program is working." (Malm et al., 2012, p. 5) These areas covered parameters concerning student attendance, students' view on math and science development, study strategy development and leadership development. Malm et al. conclude that the major benefit is a distinct improvement in leadership ability among the senior students (so called "SI-leaders"), but also new study strategies among the SI-participants and general skills like teamwork (Malm et al., 2012, p. 17).

2.2. Theoretical frameworks

The anthropological theory of the didactic (ATD) is a theoretical framework for analysing and for developing mathematics education, which offers a handful of tools (Winsløw, 2011). One of these is the notion of *praxeology*, and one of the overarching perspectives is *the paradigm of questioning the world* (Chevallard, 2012, p. 10).

The SOLO-taxonomy is also used as a theoretical framework in the present pilot study. SOLO stands for “structure of the observed learning outcome” and was developed by John Biggs and Kevin Collis (1982). SOLO names and distinguishes five different levels according to the cognitive processes required to obtain them (see table 1). In this text a combination of ATD and SOLO is discussed.

3. Aim

The aim of the present text is to discuss a pilot study focusing on the combination of the ATD-praxeology [1] and the SOLO-taxonomy. The reason for this is the intention to find a strategy that can be used when analysing discussions in mathematics in upper secondary school. The focus is students learning, and as “students” we consider both SI-leaders as well as SI-participants. The project does not particularly focus on so-called weak students.

This paper focuses on the question:

To what extent is a combination of SOLO and ATD a suitable strategy when analysing mathematics discussions at SI-sessions in Swedish upper secondary school?

The outcomes of the pilot study will be used in a more comprehensive main study dealing with what at the SI-meetings can influence learning progression of students’ mathematics discussions. Learning progression will be defined as progression relative to (1) the SOLO-taxonomy and (2) the ATD-praxeology.

The intention is also to find out to what extent Swedish mathematics curricula relate to SOLO and/or ATD and to what extent SOLO and ATD are relevant in the Swedish context. The study outcomes will finally be used in an experiment with the research question: is it possible within an extended SI with larger problems to contribute to students learning?

1. In the text we use the simplified expression of *“ATD-praxeology”*, meaning the *“ATD notion of praxeology”*.

4. Theory

4.1. The SOLO-taxonomy

In the early 1980s Biggs and Collis (1982) developed the SOLO-taxonomy for evaluating learning outcomes among students at tertiary level. They state that SOLO describes a hierarchy where each partial construction [level] becomes a foundation on which further learning is built (Biggs 2003, p. 41; Brabrand & Dahl, 2009, p. 536).

Later Claus Brabrand and Bettina Dahl (2009) used the SOLO-taxonomy for analysing (1) what curricula focus on and (2) what students actually learn. By comparing texts and speaking, with a table of verbs (see table *1*) the authors state it is possible to understand on which level of knowledge the text/speech is.

SOLO-2 *"uni-structural"*	SOLO-3 *"multi-structural"*	SOLO-4 *"relational"*	SOLO-5 *"extended abstract"*
paraphrase define identify count name recite follow (simple) instructions...	combine classify structure describe enumerate list do algorithm apply method...	analyse compare contrast integrate relate explain causes apply theory (to its domain)...	theorize generalize hypothesize predict judge reflect transfer theory (to new domain)...

Table 1. SOLO-levels and active verbs.

Brabrand & Dahl (2009, p. 543) discuss whether the SOLO-taxonomy is applicable when analysing progression in competencies in university curricula. They conclude that SOLO can be used when analysing science curricula but they question whether SOLO is a relevant tool when analysing mathematics curricula. They write:

> … for mathematics it is usually not until the Ph.D. level that the students reach SOLO 5 and to some extent also SOLO 4. The main reason is that to be able to give a qualified critique of mathematics requires a counter proof or counter example as well as a large overview over mathematics which the students usually do not have before Ph.D. level. …In fact, the same SOLO

> verbs can be used for different contents; hence progression in difficulty is not always reflected by the SOLO-progression in verbs." (Brabrand & Dahl, 2009, pp. 543-544)

Other researchers, however, claim that SOLO is useful in various contexts. Ursula Lucas & Rosina Mladenovic (2009) have done a qualitative study that aims at developing a theoretical approach to the identification of variation in students' understanding. By using the SOLO-taxonomy they analyse students' discussions in an accounting course. They state that SOLO is useful and that it is possible to estimate students' knowledge by analysing what students really say.

John Pegg (2010, pp. 35-36) has described three studies where SOLO is used to analyse primary and secondary students' learning of mathematics. J. Pegg and David Tall (2005) argue for the use of SOLO in school development. Pegg writes that SOLO helps to describe observations of students' performance. John Hattie and Gavin Brown (2004) describe SOLO as a useful tool when dealing with mathematics education. They use a strategy where mathematics exercises are formulated by using SOLO, and they claim it is possible to use SOLO when analysing children's mathematics knowledge and when describing the processes involved in asking and answering a question on a scale of increasing difficulty or complexity.

4.2. ATD

Carl Winsløw (2011) argues that it is necessary to consider the impact on didactics of curricula, regulations and policies. He writes: "It is easier said than done to include the more 'general' levels in the research perspective in a way that is relevant to didactic research…" (Winsløw, 2011, p. 131). He claims that ATD can help to uncover the shortcomings or even paradoxes of didactic practices. Winsløw also states that ATD is useful when proposing ambitious ways to *transform* education (Winsløw, 2011, p. 135). Also Marianna Bosch and Josep Gascón (2006, p. 59) argue that ATD has the tools to analyse the institutional didactic process.

Yves Chevallard (2012, p. 10), who first developed the theory of ATD, argues that within *the paradigm of questioning the world*, the curriculum is defined in terms of questions. Chevallard also states that "inquiry-based" teaching can end up in some form of "fake inquiries", and he says that this is most often because the generating question of such an inquiry is but a naive trick to get students to study what the teacher will have determined in advance. Chevallard (2012, p. 3) compares "the paradigm of questioning the world" with "epistemological monumentalism" which he argues is the traditional way of teaching mathematics. Students are there asked to "visit monuments" i.e. "knowledge comes in chunks and bits" without time for background or deeper understanding.

Winsløw (2011, p. 124) explains that *the ATD-praxeology* is a four-tuple [T / τ / θ / Θ] consisting of: a *type of tasks T,* a *technique* τ, a *technology* θ and a *theory* Θ. The four – if fully understood and used – can help to construct better education. Mortensen (2011, pp. 519-520) explains that *task & technique* are called the "practice block" or the "know how", and *technology* & *theory* are called the "theory block" or the "know why". A technique is used to solve a special task. A technology justifies the technique and a theory gives a broader understanding of the field.

Winsløw (2008) discusses how to use the notion of *praxeology* when studying advanced mathematics. Joaquim Barbé et al. (2005) suggest how to use ATD when studying classroom activities at upper secondary school. They also describe what is called a *didactic praxeology.* They describe the didactic praxeology using six distinct "moments" which can appear in different order and not necessarily starting with the first one. These moments are used when analysing what is happening in a classroom.

Altogether ATD is described as a theory *showing the shortcomings* or even paradoxes of didactic practices. Winsløw (2011, p. 135) also states that ATD is useful when proposing ambitious ways to *transform* education. Also Bosch and Gascón (2006, p. 59) argue that ATD has the tools to *analyse* the institutional didactic processes.

4.3. Why a combination?

As already mentioned one intention of the pilot study was to find out whether a combination of SOLO-taxonomy and ATD can be useful when analysing SI. Winsløw (2011) and Mortensen (2011) describe how to use the notion of praxeology when preparing and analysing teaching and learning. Much work has been done within the frame of ATD for developing curricula and as I understand the paradigm of questioning the world, ATD calls for more open situations and open-ended problem solving in classrooms.

Brabrand and Dahl (2009) use the SOLO-taxonomy when analysing university curricula. Hattie and Brown describe how SOLO can help the teacher formulate questions that measure different SOLO-levels. As the title tells, the first book by Biggs and Collis (1982) about SOLO focused on “evaluating the quality of learning”. The authors write that they focus on a systematic approach in teaching in closed situations with formulated expectations. They do not deal with “open-ended” questions or “open situations”. On the other hand, they say that “there are several further implications” and they hope that research will discover those implications (Biggs & Collis, 1982, pp. 163 & 182).

Combining different theoretical frameworks is nothing new in education research. Susanne Prediger, Angelica Bikner-Ahsbahs and Ferdinando Arzarello (2008, p. 176) argue for what they call *networking* and state that there is a need for connecting theories in a more systematic way.

By combining ATD with SOLO one may be able to catch the advantages of both. SOLO with its concrete questions to be asked and ATD with its notions of praxeology and “institutional didactic process”.

5. Method

5.1. Research design

The focus of the pilot study, and the subsequent main study, are students’ mathematics discussions (a “phenomenon”) in small groups in upper secondary school (a “context”) (Robson, 2011, p. 136). The method is qualitative with a combination of theoretical development of a strategy and empirical tests of this strategy. The design is flexible as the method is developed step-by-step as the project continues (Robson, 2011, p. 132).

The main study (see figure 1) uses data from two Swedish upper secondary schools. At these schools SI is a compulsory complement to the ordinary teaching at certain programs. The aim is to encourage students to work together in order to enhance their mathematics learning. Groups vary in size from 5 to about 16 students per group. At both schools SI is scheduled as one meeting per week. Within the frame of the main study different kinds of data are gathered. This is done with emphasis on observations and video recording of SI-meetings. Questionnaires are answered by students and SI-leaders (senior students); short interviews are conducted with SI-leaders and SI-mentors (teachers guiding the SI-leaders). “Semi structured interviews” are used (Robson, 2011, p. 286). A combination of the SOLO-taxonomy and the ATD-praxeology is used as a tool – or “eyeglasses” – when students’ mathematics discussions are observed and analysed.

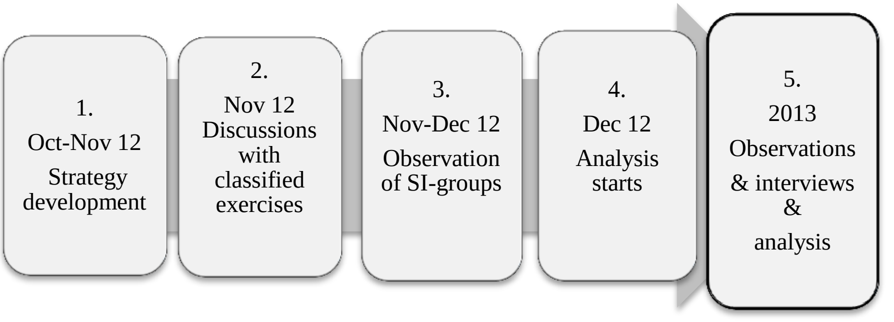


Figure 1. Flowchart of the pilot study (Nov 2012) and the main study (2012-13).

5.2. The pilot study

A combination of the ATD-praxeology and the SOLO-taxonomy was developed and used. Two mathematics discussions at upper secondary schools in south and west Sweden were observed and videotaped. At both schools the groups consisted of 5 students. The students were 16-17 years old, and they were asked to solve a problem, which had been classified by the researcher in advance (see table *2*). The meetings lasted 40 minutes at one school and 60 minutes at the other. At those two specific group-meetings the SI-leaders (senior students) did not participate. The intention of the pilot study was to try if the suggested strategy (see appendix *1*) was useful when analysing students’ discussions. Learning activities during SI-sessions with SI-leaders present were later observed in the main study.

6. Results from pilot study

SOLO and the ATD-praxeology were used when classifying an exercise that the two groups were asked to discuss (see table *2*). This exercise was part of a former national test, which in 2010 was intended for all students in the first grade of Swedish upper secondary school (Skolverket, 2012-08-06).

SOLO-level	**Exercise: A roll of paper**	**Praxeology**
	A rectangular sheet of paper can be rolled to make a tube (cylinder) as shown in the figure.	
SOLO-2	Such a tube is made by rolling a square piece of paper with side length 10 cm. ***The diameter of the tube will be about 3.2 cm. Find the volume of this tube (cylinder).**	Technique
SOLO-2/3	***Show that the diameter of the tube will be about 3.2 cm if the side length of the sheet of paper used is 10 cm**	Technique
SOLO-3	If the length and width of the paper are different, you can make two different tubes (cylinders) depending on how you roll the paper. ***Starting with rectangular sheets of paper with dimensions 10 cm × 20 cm, two different tubes are made. Find the volumes of the two tubes (cylinders).**	Technique
SOLO-4 SOLO-4	***Compare these two volumes and calculate the ratio between them.** ***Investigate the ratio between the cylinder volumes using sheets of paper with other dimensions. What affects the volume ratio between the tall and the short cylinder?**	Technique Technology
SOLO-5	***Show that your conclusion is true for all rectangular papers.**	Technology

Table 2. An exercise was classified by SOLO-taxonomy and the ATD-praxeology. (For figures see Primgruppen (2013-03-22).

The two groups appeared to find it quite easy to discuss the exercise and they solved it step by step. Both groups were considered to reach ATD-technology and SOLO 3.

There were occasions when SOLO and ATD did correlate and there were other occasions when they did not. Table 3 shows part of the discussion at school B and how the discussion can be analysed by SOLO and ATD. The students discussed the volume of the cylinder. They did not remember the formula and therefore they tried different strategies. Finally one student remembered the formula and they managed to solve the first exercise.

Session-minutes	Quotes translated into English	SOLO-taxonomy	ATD-praxeology	Comments
0-1	(a) A square paper. It is 10. Ok then it is rolled up. So it will be about 3.2 cm.		Task	Two groups discuss the exercise. Student (a) and (e) start.
0-1	(e) I just want to say that you ... draw a little bit more so it becomes rectangular not square. Or, it is a rectangle. (a) No. It is ... (reads the task) A pipe is made from a square paper. (e) They write this in the beginning ... (reads the task) A rectangular paper can ...	SOLO-1		Student (e) misunderstands the relation between “square” and “rectangular”.
1-2	(a) D-m I’ve forgotten how to do this. (e) It is the diameter times the length or height ... (a) Is that so? (e) I think so. (a) But no. It does not become square … (a) It is supposed to be CM3. It just gets CM2. It does not work.	SOLO-1 SOLO-3/4	 Technique/ Technology?	Student (a) and (e) try to find a relevant technique. Student (a) notices that their technique doesn’t work.

1-2	d) How do you count ... We were supposed to have the area of the circle. (b) Wait what are we supposed to figure out? (reading task) (d) Volume ... then we need the area of the base (b) What?	SOLO-3	Technique	A parallel discussion goes on between student (d) and student (b). Student (d) comments what (a) just said.
	(a) Yes exactly (b) The area of the base? ... (d) Is not the radius times the radius times pi?	SOLO-3	Technique	The two groups start to discuss with one another. Student (d) takes the command and finds the technique

Table 3. Quotes from group discussion at school B are analysed by SOLO and by ATD-praxeology. Quotes are translated from Swedish and commented by the observer.

According to the preliminary analysis it seems like SOLO is *easy to use* when observing students mathematics discussions. The table of active verbs (see table *1*) clarifies the SOLO-levels and the technique to use SOLO when asking questions (Hattie & Brown, 2004) brings the taxonomy near praxis in the classroom. The ATD-level “technology” expects the student to “know why” a technique is being used while SOLO 4 deals with both “explain” and “analyse”. It seems harder to reach high levels of the ATD-praxeology than of SOLO. ATD also seems to pick up *more aspects* of teaching and student outcomes (see appendix 1).

7. Discussion

The pilot study aimed at combining the ATD-praxeology with the SOLO-taxonomy. A strategy was suggested and tried when studying mathematics discussions in upper secondary school. The intention is to use the strategy when analysing learning as a group process, and to adapt the theoretical model for analysing the results of empirical studies. Supplemental instruction has not been studied in this way before and the combination has not been used to study Swedish upper secondary school mathematics.

The study was a pilot study, and the outcomes have not been fully analysed yet. The strategy seems to be useful, but the combination of SOLO and ATD will be further tested and developed before one can tell whether it can answer questions about progression in students' mathematics discussions.

It was found that the SOLO-taxonomy and the ATD-praxeology partly elucidate different dimensions of the students' learning. ATD is a theoretical framework for understanding *teaching situations*, and the analysis in terms of praxeologies clarifies whether or not the students explained the use of a special technique. SOLO is a framework for *learning quality*, and it classifies to what extent students analyse what they do. But maybe they are two sides of the same way to study "level of knowledge". These ideas have to be further developed.

The work is to be continued and it is to be seen as part of the development of knowledge about how mathematics discussions can be guided. It is also part of the development of useful strategies for analysing these discussions. The work is heading for valid information about *what at the SI-meetings influence progression of students' mathematics discussions and to what extent SOLO and ATD are useful when analysing these discussions.*

Acknowledgements

I would like to express my gratitude to my supervisors Gerd Brandell, Susanne Pelger and Joakim Malm who have provided invaluable feedback on earlier versions of this text.

References

Barbé, J., Bosch, M., Espinoza, L. & Gascón, J. (2005). Didactic restrictions on the teacher's practice: The case of limits of functions in Spanish high schools. *Educational Studies in Mathematics, 59*(1-3), 235-268.

Biggs, J. B. (2003). *Teaching for quality learning at university*. Maidenhead, England: Open University Press.

Biggs, J. B. & Collis, K. F. (1982*). Evaluating the quality of learning: The SOLO taxonomy, structure of the observed learning outcome.* New York, NY: Academic Press.

Bosch, M. & Gascón, J. (2006). Twenty-five years of the didactic transposition. *ICMI Bulletin, 58,* 51-65.

Brabrand, C. & Dahl, B. (2009). Using the SOLO taxonomy to analyse competence progression of university science curricula. *Higher Education, 58*(4), 531-549.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. Écologie & régulation. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Eds.), *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 41-56). Grenoble: La pensée sauvage.

Chevallard, Y. (2012). Teaching mathematics in tomorrow's society: A case for an oncoming counter paradigm. In S. J. Cho (Éd.), *The proceedings of the 12th International congress on mathematical education* (pp. 173-187). Springer.

Dunkels, A. (1996). Engineering student mathematics with cooperative small groups. In A. Dunkels (Ed.), *Contributions to mathematical knowledge and its acquisition* (pp. 135-163). Luleå, Sweden: University of Technology, Department of Mathematics.

Good, T. L. & Grouws, D. A. (1979). The Missouri mathematics effectiveness project: An experimental study in fourth-grade classrooms. *Journal of Educational Psychology, 71*(3), 355-362. doi: 10.1037/0022-0663.71.3.355

Hattie, J. (2009). *Visible learning.* New York, NY: Routledge.

Hattie, J. (2012). *Visible learning for teachers.* New York, NY: Routledge.

Hattie, J. A. C., & Brown, G. T. L. (2004, September). *Cognitive processes in asTTle: The SOLO taxonomy*. asTTle Technical Report #43, University of Auckland/Ministry of Education.

Hiebert, J. & Grouws, D. A. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 341-404). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Jakobsson, A., Mäkitalo, Å. & Säljö, R. (2009). Conceptions of knowledge in research on students' understanding of the greenhouse effect:

Methodological positions and their consequences for representations of knowing. *Science Education, 93*(6), 978-995. doi:10.1002/sce.20341

Johnson, D.W. & Johnson, R.T. (1999). *Learning together and alone: Cooperative, competitive and individualistic learning* (5th ed.) Boston, MA: Allyn and Bacon.

Lucas, U. & Mladenovic, R. (2009). The identification of variation on students' understanding of disciplinary concepts: the application of the SOLO taxonomy within introductory accounting. *Higher Education, 58*(2), 257-283.

Malm, J., Bryngfors, L. & Mörner, LL. (2010). Supplemental instruction (SI) at the faculty of engineering (LTH), Lund University, Sweden. An evaluation of the SI-program at five LTH engineering programs autumn 2008. *Journal of Peer Learning, 3,* 38-50.

Malm, J., Bryngfors, L. & Mörner, LL. (2011a). Improving student success in difficult engineering education courses through supplemental instruction (SI) – what is the impact of the degree of SI attendance*? Journal of Peer Learning, 4*, 16-23.

Malm, J., Bryngfors, L. & Mörner, LL. (2011b). Supplemental instruction for improving first-year results in engineering studies. *Studies in Higher education, 37*(6), 655-666. doi:10.1080/03075079.2010.535610

Malm, J., Bryngfors, L. & Mörner, LL. (2011c). Supplemental instruction: Whom does it serve*? International Journal of Teaching and Learning in Higher Education*, *23*(3), 282-291.

Malm, J., Bryngfors, L., Mörner, LL., Edman, G. & Gustafsson, L. (2012). Using supplemental instruction to bridge the transition from secondary to tertiary education. *International Journal of Education, 4*(3), 31-48.

McCarthy, A., Smuts, B. & Cosser, M. (1997). Assessing the effectiveness of supplemental instruction: A critique and a case study. *Studies in Higher Education, 22*(2), 221-231.

Mortensen, M. F. (2011). Analysis of the educational potential of a science museum learning environment: visitors' experience with and understanding of an immersion exhibit. *International Journal of Science Education*, *33*, 517-545.

Ogden, P., Thompsson, D., Russel, A. & Simons, C. (2003). Supplemental instruction: Short- and long-term impact. *Journal of developmental education, 26*(3), 2-8.

Pegg, J. (2010, August). *Promoting the acquisition of higher-order skills and understanding in primary and secondary mathematics.* Paper presented at the meeting "Teaching mathematics? Make it count: What research tells us about effective teaching and learning of mathematics", Melbourne, Australia.
http://research.acer.edu.au/cgi/viewcontent.cgi?article=1081&context=research_conference

Pegg, J. & Tall, D. (2005). The fundamental cycle of concept construction underlying various theoretical frameworks. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *37*, 468-475.
doi:10.1007/BF02655855

Prediger, S., Bikner-Ahsbahs, A. & Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: first steps towards a conceptual framework. *ZDM Mathematics Education, 40,* 165-178.
doi:10.1007/s11858-008-0086-z

Primgruppen. (2013-03-22). *Research group for assessment of knowledge and competence,* Stockholm University, Sweden.
www.prim.su.se/matematik/kurs_a/prov_vt2010/Part1.pdf

Robson, C. (2011). *Real world research*. Chichester, England: John Wiley & Son.

Skolverket. (2012-08-06). *The Swedish national agency for education.*
www.skolverket.se

Slavin, R. (1995). *Cooperative learning: Theory, research and practice.* (2nd ed). Boston, MA: Allyn and Bacon.

Winsløw, C. (2008). Transformer la théorie en taches : la transition du concret à l'abstrait en analyse réelle. In A. Rouchier & I. Bloch (Eds.), *Perspectives en didactique des mathématiques* [CD]. Grenoble: La pensée sauvage.

Winsløw, C. (2011). Anthropological theory of didactic phenomena: Some examples and principles of its use in the study of mathematics education.

In M. Bosch et al. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 117-138). Barcelona, Spain: CRM.

Appendix 1: An overview of SOLO & ATD

SOLO "Structure of the observed learning outcome" i.e. a theoretical framework for analysing *learning quality*.		**ATD** A descriptive, analytic and normative theoretical framework for designing and understanding *teaching situations.*		
SOLO-level (Biggs & Collis, 1982*).*	**SOLO-clarification** (Hattie & Brown, 2004)	**ATD-praxeology** **(**Winsløw, 2011)	**ATD-clarifica-tion** Morten-sen, 2011**)**	**Levels of didactic co-determination and examples** **(**Chevallard, 2002)
				Civilisation **Society** **School** **Pedagogy**
				Discipline/ mathematics
				Domain/ algebra
		Theory, part of the knowledge-block	Know **why** Abstract concepts that justify techno-logy	**Sector/** polynomials
SOLO-5 **Extended abstract** Generalize transfer theory to new domain	The whole is generalised to a higher level of abstraction.	**Technology,** part of the knowledge-block	Know **why** Justifica-tion of techni-ques	

SOLO-4 Relational Analyse, explain causes, apply theory	Two or several aspects are integrated. An organising pattern on the given material.	**Technique & Technology**		
SOLO-3 Multi-structural Combine, describe, do algorithm	Two or more aspects are picked up, used separately or in two or more steps with no integration of ideas.	**Technique**, part of the practice-block	Know **how** to solve a task	**Theme/** pol. equations
SOLO-2 Uni-structural Count, name, follow instructions	One aspect is picked up, obtained directly from the problem.	**Technique**		**Subject/** quadratics
SOLO-1 Pre-structural	No aspect is picked up			
		Task, part of the practice-block		subject

À propos de l'écologie du discours heuristique

Pierre Job et Maggy Schneider
LADIMATH/CIFEN, Université de Liège, Belgique

Abstract. Using linear algebra as an example, we explain what a heuristic discourse could be for this field and how difficult it can be to make it live in Belgian secondary school whether it is led by a teacher or even a researcher in the field of didactics of mathematics.

Resumen. Con el ejemplo del álgebra lineal, presentamos en qué podría consistir un discurso heurístico para esta disciplina en la educación secundaria, así como las dificultades para hacerla vivir en esta institución, tanto desde el punto de vista de los profesores como de los investigadores en didáctica de las matemáticas.

Résumé. À travers l'exemple de l'algèbre linéaire, nous exposons en quoi pourrait consister un discours heuristique pour cette discipline dans l'enseignement secondaire et les difficultés à le faire vivre dans une telle institution, tant du point de vue du professeur que du chercheur en didactique des mathématiques.

IV[e] congrès international sur la TAD (Toulouse, 21-26 avril 2013)
Axe 2. *L'analyse praxéologique comme outil de l'analyse et de l'ingénierie didactiques*

Job, P. & Schneider, M. (2017). À propos de l'écologie du discours heuristique. Dans G. Cirade et al. (Éds), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* (pp. 407-420). https://citad4.sciencesconf.org

1. Introduction

La section 2 expose ce que nous entendons par discours heuristique et l'intérêt qu'il y aurait à en faire vivre dans l'enseignement secondaire et/ou à l'entrée à l'université, notamment concernant l'algèbre linéaire. La section 3 traite des difficultés à mettre en place un tel discours. Des raisons génériques sont avancées telle la nature « cachée » (en un sens qui sera précisé) des praxéologies auxquelles ces discours sont rattachés et le caractère hybride des argumentations dont ils peuvent être porteurs, s'opposant ainsi à une certaine volonté de désyncrétisation de la part des institutions savantes et par suite d'enseignement. Nous illustrons pour terminer ces raisons génériques en évoquant la manière dont un projet de recherche visant à mettre en place un tel discours n'a pu être géré tant par un chercheur en didactique des mathématiques que par un enseignant accueillant ce chercheur dans sa classe, ne pouvant concilier des argumentations tantôt algébrique, tantôt géométrique.

2. Nature et intérêt d'un discours heuristique

Afin de faire saisir la pertinence du concept de discours heuristique tel que nous l'entendons, on ne peut passer sous silence les liens qui l'unissent aux concepts de situation fondamentale/adidactique et à la distinction opérée notamment par Maggy Schneider (2009) entre praxéologie « modélisation » et praxéologie « déduction ».

Avec des concepts comme celui de limite et ceux de l'algèbre linéaire en général, on touche aux limites de l'opérationnalité de la notion de situation fondamentale au sens strict d'un savoir *S*, développée par Guy Brousseau (1998), entendue comme tâche pour laquelle *S* constituerait une réponse optimale. Effectivement, l'évolution et finalement l'adoption de tels savoirs sont en partie le fruit d'un consensus au sein de l'institution qui les a vus naître. Concernant le concept de limite, par exemple, on sait actuellement que l'analyse non standard propose une alternative viable à celui-ci comme fondation de l'analyse, en donnant un corps cohérent aux conceptions infinitésimales autrefois bannies pour servir de soubassement. Les limitations de cet entendement de la notion de situation fondamentale font ressortir avec force la relativité institutionnelle des savoirs et mettent de ce fait l'approche préconisée par la TAD au cœur même de la TSD. Un savoir est toujours subordonné à une institution donnée, cette subordination pouvant être modélisée de diverses manières par le quadruplet type de tâches, technique, technologie, théorie.

Cette mise en perspective institutionnelle de la notion de situation fondamentale n’est pas sans conséquences sur la production et l’usage d’ingénieries. Elle nous amène inéluctablement à modifier un certain entendement du caractère fondamental d’une situation en le découplant de son éventuelle déclinaison adidactique comme argumenté par P. Job et M. Schneider (2010). En effet, comment produire des situations adidactiques pour des savoirs qui ne sont plus les réponses optimales à certaines tâches mais les réponses choisies par une institution pour assurer le bon fonctionnement de son écologie interne ? Sans que ces deux caractères s’excluent absolument, la séparation entre caractère adidactique et fondamental pose donc la double question de la mise en scène d’un savoir au travers d’une situation et de la nature de son caractère fondamental. En est-on finalement réduit, dans un revers dramatique dont l’histoire est coutumière, à devoir présenter les savoirs par simple ostension ?

La réponse nous apparaît globalement négative et trouve une issue moins drastique au détour de l’idée de rencontre culturelle-mimétique, déjà présente dans la TAD, idée que nous envisageons à l’aune du concept de discours heuristique et dont nous avons examiné dans l’un de nos travaux (Job, 2011) la viabilité écologique pour le concept de limite, signant ainsi un nouvel entendement de la notion de situation fondamentale. Suivant M. Schneider (2009), une situation fondamentale au sens large d’un concept doit être pensée comme l’élaboration d’un discours, que nous qualifierons d’heuristique, autour de ce dernier, étendant l’acceptation initiale donnée par Lakatos (voir ci-dessous), c’est-à-dire un discours explicitant les raisons d’être du savoir en question, sa place dans une praxéologie de référence pour l’institution considérée : les tentatives *a priori*, les succès, les échecs et les raisons pour lesquelles cette praxéologie prendra, en définitive, la forme adoptée. La nature du discours heuristique sera donc différenciée selon l’institution dans laquelle on se place.

À ce titre, il est intéressant de distinguer, comme le fait M. Schneider (2009), deux types de praxéologies définissant deux institutions différentes : les praxéologies modélisation et déduction. Dans le premier type de praxéologies (modélisation), la tâche fondamentale est de déterminer les caractéristiques d'objets dont l'existence ne repose pas encore sur une définition formelle. Ces objets existent en tant qu'objets mentaux partagés, ou du moins pensés comme tels, par certaines institutions. Les justifications données dans ces praxéologies aux techniques employées pour résoudre la tâche fondamentale reposent souvent sur des arguments pragmatiques. Une technique est validée si les résultats obtenus sont en accord avec les résultats obtenus par le biais d'autres techniques qui peuvent éventuellement appartenir à d'autres domaines que le domaine considéré, qu'ils soient mathématiques ou non. Ce va-et-vient justificatif est caractéristique du type de discours heuristique à mettre en œuvre et cadre, selon nous, avec ce que Chevallard (1999) nomme un discours technologique. Dans ce type de discours il est donc monnaie courante de devoir harmoniser des argumentations hybrides relevant de domaines considérés par le mathématicien comme distincts.

Dans le second type de praxéologies (déduction), la tâche fondamentale consiste à définir les objets mentaux des praxéologies modélisation afin de rendre explicite ce qui ne l'était pas encore en vue de construire une théorie déductive. Souvent, les techniques employées dans les praxéologies modélisation servent de base aux définitions des praxéologies déduction. Un discours heuristique dans ce cadre est celui dont fait état Lakatos (1984), initiateur du concept. Il coïncide avec une forme très exigeante de première rencontre avec un savoir consistant à produire des définitions de concepts en concomitance avec l'élaboration des énoncés et preuves où ils interviennent, par un jeu itératif de (tentatives de) preuves et de réfutations. Lakatos oppose le discours heuristique au style déductiviste où les mathématiques sont présentées comme un ensemble toujours plus vaste de vérités éternelles et immuables. Cette opposition entre discours heuristique et style déductiviste marque la volonté de ce dernier de produire des textes d'introduction aux mathématiques mettant en avant les raisons d'être des savoirs mathématiques rejoignant en cela les critères développés par Chevallard (1999) pour évaluer les praxéologies.

Avec ces deux types de praxéologies et les discours heuristiques associés nous n'avons pas la prétention d'englober l'ensemble du développement des mathématiques. Néanmoins cette distinction s'est avérée opérationnelle notamment dans le cas de l’analyse : voir les travaux d’Emmanuelle Rouy (2007) ainsi que ceux de P. Job (2011). Il semble qu’elle puisse également jouer un rôle important dans le cadre de l’algèbre linéaire. En effet, Catherine Lebeau et Maggy Schneider (2010) mettent en évidence des questionnements d’élèves et d’étudiants sur la légitimité des modélisations algébriques des droites et plans de l’espace tant par des équations cartésiennes que vectorielles. Certains se demandent si une équation $ax + by + cz + d = 0$ ne représenterait pas une droite plutôt qu’un plan. Et d’autres encore s’interrogent sur la coplanarité des combinaisons linéaires de deux vecteurs.

Ces questionnements contrastent avec une pratique commune dans l’enseignement secondaire belge consistant à prendre pour une évidence la caractérisation vectorielle des droites et plans pour ensuite en déduire les formes cartésiennes et paramétriques. Cette transparence des modélisations algébriques perçue par l’institution scolaire est interpellante. Elle renforce l’idée de la nécessité de développer un discours heuristique expliquant aux élèves les différentes modélisations algébriques adoptées pour les droites et plans usuels de l’espace. Cette question est traitée par C. Lebeau et M. Schneider (2010). Dans le même temps, elle appelle à mettre en lumière les raisons pour lesquelles la modélisation algébrique de l’espace est considérée comme une évidence et donc en filigrane à explorer les raisons pour lesquelles un discours heuristique relatif à l’algèbre linéaire serait vraisemblablement difficile à imposer dans l’enseignement secondaire belge. C’est ce dernier point que nous abordons avec le paragraphe suivant.

3. Difficultés à faire vivre un discours heuristique relatif à l’algèbre linéaire dans l’enseignement secondaire belge

3.1. Des raisons génériques : institutions « cachées », discours technologiques hybrides et désyncrétisation

Dans l’un de nos travaux (Job, 2011), nous mettions en évidence le peu de crédibilité épistémologique dont les praxéologies scolaires relatives au concept de limite peuvent jouir. Une analyse similaire est conduite par E. Rouy (2007) vis-à-vis du concept de dérivée. Les raisons de ce manque de crédibilité tiennent entre autres à l’incapacité de l’institution scolaire à se situer par rapport aux praxéologies modélisation et déduction. On n’est ni dans l'une ni dans l'autre. Et pour cause, ces praxéologies engendrent des institutions difficiles à percevoir et que nous avions qualifiées de « cachées » (Job & Schneider, 2010). Cette caractéristique de ces institutions fournit un premier argument quant à la difficulté à faire vivre les discours heuristiques correspondants. Comment faire vivre un discours dont on ne perçoit pas la nature et moins encore l'intérêt ?

Une des raisons pour lesquelles ce type d'institutions est difficile à identifier est liée à une certaine volonté de désyncrétisation des savoirs dont Chevallard (1991) fait état dans la théorie de la transposition didactique. Il y questionne en effet les processus que Verret situe au principe même d'une « transmission scolaire bureaucratique », à savoir la dépersonnalisation du savoir, sa désyncrétisation et une programmabilité de son acquisition. Le risque existe alors d'une dénaturation du statut épistémologique du savoir, lorsqu'on passe de son usage savant à ses usages scolaires. Nous pensons, en particulier, que le discours heuristique, auquel nous venons de donner un sens plus large que celui que lui octroie Lakatos, entre en tension avec la désyncrétisation du savoir délimité en « savoirs partiels pouvant s'exprimer dans un langage autonome » qui s'accompagne de ce que Chevallard (1999) appelle une « déconnexion franche du “cœur” théorico-technologique de l'œuvre d'avec ses “applications” ». En effet, un discours heuristique revêt le plus souvent une nature syncrétique en juxtaposant notamment des raisonnements hybrides, l'autonomie dont il est question ci-dessus ne pouvant voir le jour qu'au terme d'un tel discours.

Enfin, à un autre niveau, complémentaire cependant, relevant plus cette fois de la culture mathématique, il est probable qu'un discours technologique-heuristique ne reçoive pas l'aval d'un mathématicien dont la philosophie serait platonicienne. En effet, dans cette conception des mathématiques – voir Job (2011) sur ce point –, les objets mathématiques sont découverts car ils existent indépendamment des humains : les savoirs mathématiques ne sont pas construits. Or un discours heuristique est essentiellement constructif et tendrait donc à être en porte-à-faux avec une telle philosophie. À la rigueur, un mathématicien platonicien pourrait consentir à exposer les rouages par lesquels il aurait découvert un nouveau concept, mais à titre d'initiation à la recherche, sans doute pas en tant que nécessité épistémique pour des élèves/étudiants.

3.2. Un exemple éclairant

Illustrons notre propos par un exemple relatif à l'algèbre linéaire, théorie particulièrement paradigmatique du point de vue qui nous intéresse en ce qu'elle étudie les propriétés des espaces vectoriels, applications linéaires et multilinéaires, en faisant abstraction des significations nombreuses de ces objets dans plusieurs branches des mathématiques (analyse, géométrie, probabilités, …) et d'autres disciplines scientifiques aussi différentes que la physique ou l'économie.

Dans cet exemple, nous examinons comment un doctorant en didactique des mathématiques, par ailleurs considéré comme un bon mathématicien (il donne des cours dans une institution de niveau universitaire), s'empare d'un projet de recherche relatif à l'algèbre linéaire consistant, à partir d'une problématique de nature géométrique, à faire émerger des rudiments d'algèbre linéaire chez des élèves de l'enseignement secondaire belge, tels les concepts de combinaison et d'indépendance linéaires, de rang (dont le théorème de Rouché-Fontené), de déterminant, de dualité (au sens de Frobenius). Mettons en lumière toutes les difficultés éprouvées par ce premier à mettre en place un discours heuristique permettant de faire vivre ce projet, notamment à gérer l'hybridation argumentative évoquée ci-dessus.

Quelques-unes des étapes prévues dans ce projet étaient les suivantes. L'étude de systèmes linéaires de 2 équations à 2 inconnues représentant des droites dans un plan devait déboucher sur l'élaboration d'un algorithme permettant d'organiser la discussion d'un système quelconque de ce type. Cette première étape avait pour fonction de faire entrer les élèves dans un nouveau type de contrat : il ne s'agit plus seulement de résoudre des systèmes numériques, il s'agit de construire ce que nous avions appelé, pour eux, une synthèse structurée. Le point de vue géométrique concerne ici l'inventaire des cas possibles de positions relatives de deux droites dans un plan et le point de vue algébrique organise ces cas à partir du calcul du mineur formé par les coefficients des inconnues et puis de celui des mineurs bordés. Le mineur est introduit par le professeur comme ostensif porteur des données en jeu et du traitement qu'il convient d'en faire et constituera plus tard un élément structurant le calcul de déterminants. Notons que, pour ce type de systèmes, le point de vue géométrique seul peut conduire à cette structuration, des droites confondues pouvant être considérées par les élèves de ce niveau comme un cas particulier de droites parallèles.

Mais, par ailleurs, on peut déjà faire remarquer que l'unicité de la solution est garantie par le même critère, que les termes indépendants soient nuls ou non, ce qui permet d'expliquer que l'analyse du système homogène correspondant au système initial est un bon point de départ, le remplacement d'un terme indépendant nul par un non nul signifiant qu'on remplace la droite concernée par une autre qui lui est parallèle.

L'étude de systèmes linéaires de 3 équations à 2 inconnues n'est jamais travaillée au niveau de l'enseignement secondaire belge. De tels systèmes ont été proposés ici, en raison des opportunités qu'ils offrent *a priori* pour une première entrée dans l'algèbre linéaire. D'abord, un tel système contient plus d'équations que d'inconnues et, dans un plan, un point peut être déterminé à partir de deux de ces contraintes. La troisième équation représente alors une contrainte qui n'ajoute rien aux précédentes ou, au contraire, qui n'est pas compatible avec elle, les coordonnées du point trouvé ne la respectant pas. Organiser la rencontre avec de telles situations permet de dissocier du parallélisme strict l'absence de solution du système en même temps qu'elle introduit aux faisceaux de droites, le mot « faisceau » étant entendu ici au sens commun du terme comme « assemblage de choses semblables, de forme allongée, liées ensemble » (Le Petit Robert). Pour déterminer si trois droites, non parallèles deux à deux, forment un faisceau, il faut alors résoudre un système de deux équations extraites du système initial, dont le mineur est non nul et faire vérifier la troisième équation par la solution trouvée. Ce travail, dans le cas paramétré, fait apparaître l'annulation d'un calcul dont la mémorisation suppose une disposition en tableau des paramètres en jeu : on introduit ainsi la représentation matricielle et le calcul d'un déterminant d'ordre 3 qu'elle permet d'organiser d'une manière structurée.

Par ailleurs, un choix bien calibré de valeurs des coefficients des inconnues et des termes indépendants dans l'étude de quelques systèmes numériques met en évidence, dans les cas de faisceaux évoqués plus haut, la dépendance dite inclusive des équations, l'une d'elles pouvant être « combinaison linéaire » des deux autres. Si k et k' sont les coefficients de cette combinaison, on peut montrer alors que le critère revient à étudier la compatibilité d'un système de 3 équations dont les 2 inconnues sont, cette fois, k et k' et non plus x et y. On retombe alors sur le même calcul de déterminant, les paramètres étant, dans leur ensemble, les mêmes que ceux du système précédent mais disposés tout autrement : lignes et colonnes de la disposition matricielle sont échangés, leur signification géométrique passe à l'arrière-plan au profit d'une propriété structurelle des déterminants de matrices composées de trois triplets. Ce peut être le moment d'introduire une notation qui fait fi de toute interprétation géométrique : le choix d'une seule lettre doublement indicée.

La notion de faisceau, quant à elle, évolue d'une configuration géométrique vers une définition algébrique. Il s'agit, à ce stade, de justifier que si $P(x, y) = 0$ et $Q(x, y) = 0$ sont les équations, dans un plan, de deux droites sécantes, alors l'équation générale $k\,P(x, y) + k'\,Q(x, y) = 0$ avec $(k, k') \neq (0, 0)$ recouvre toutes les droites passant par l'intersection des deux premières. On s'approche ainsi de la notion de faisceau linéaire ponctuel dans un espace affine. Mais cette notion algébrique élargit, à son tour, l'idée qu'on se fait d'un faisceau puisque, si les deux droites de départ sont parallèles, elle représente toutes les droites parallèles à ces deux-là.

Sur la base de telles considérations, on peut construire un algorithme de discussion de tous les systèmes linéaires de trois équations à deux inconnues, en partant ou non de systèmes homogènes, cet algorithme, de nature algébrique, pouvant servir à justifier un fait géométrique, à savoir la description de tous les cas de positions respectives de trois droites dans un plan ainsi que l'exhaustivité de la liste de tels cas.

Les systèmes linéaires de 2 équations à 3 inconnues et de 3 équations à 3 inconnues, vues comme contraintes portant sur des éléments de $\mathbb{R}^3$, sont étudiés non seulement sur la base des acquis antérieurs mais aussi sur la connaissance des caractérisations paramétriques et cartésiennes des droites et plans de l'espace usuel. La notion de faisceau de plans est d'emblée algébrique et cela crée une différence importante avec le cas des droites : des plans d'un même faisceau, non parallèles, ont une droite d'intersection, et non un seul point alors que c'est bien à des points que se réfèrent les solutions du système. On a donc, dans le cas de trois plans « en feuillet », une infinité de solutions en même temps qu'une dépendance inclusive de leurs équations et il faut exiger une matrice du système avec trois lignes ou trois colonnes linéairement indépendantes pour avoir une solution unique. Là aussi, l'algorithme de discussion algébrique d'un système linéaire 3×3, possiblement organisée en s'appuyant sur les systèmes homogènes, permet d'établir la liste exhaustive des positions relatives de trois plans dans l'espace usuel.

Ce panorama permet ainsi, dans une dialectique entre géométrie et algèbre, de pointer des constituants majeurs de l'algèbre linéaire : dépendance et indépendance linéaire, déterminants, matrices et rang, faisceaux linéaires, systèmes homogènes, dimension d'un espace. Ils demeureront des référents utiles associés à un vocabulaire parlant (les hyperplans, par exemple) même lorsque l'interprétation géométrique ne sera plus possible. Ce panorama permet aussi de montrer que la discussion de systèmes de plusieurs types reste touffue et qu'une synthèse « éclairante » en est très difficile car elle demande une coordination de trois paramètres, ainsi que le montre le théorème de Rouché-Fontené. Sauf à considérer les systèmes linéaires en termes d'applications linéaires, ce qui permet d'exploiter le théorème du rang, ou encore à montrer comment la recherche s'éclaire par les relations qui existent entre la dualité du double point de vue équations/paramétrage de l'ensemble de solutions, la dualité en géométrie projective et celle portant sur les espaces duaux. Ainsi, déjà même pour l'étude des systèmes linéaires, la théorie apporte ici une économie de pensée.

Voilà donc un scénario autour duquel peut s'organiser un discours qui, articulant géométrie et algèbre, remonte d'une problématique élémentaire aux prémices d'une théorie des mathématiques supérieures. Dans l'expérimentation qui nous intéresse, seule l'étude des systèmes 2×2, 2×3, 3×2 et 3×3 a pu être gérée et nos données ne concernent pas les réactions des élèves mais la manière dont cette étude fut dirigée par le doctorant dont c'était le projet. Indiquons les étapes marquantes dans la manière dont ce dernier a géré cette ingénierie. Commençons par le plan.

L'introduction du concept de déterminant se limite essentiellement à une terminologie et à une notation (deux barres verticales). L'aspect unificateur et l'éclairage fourni par ce dernier ne sont pas mis en avant comme ils pourraient l'être et ce malgré les entrevues préalables avec le doctorant visant à cadrer son travail. Ainsi dans la « synthèse structurée » proposée aux élèves pour les systèmes 2×2, les différents cas sont mis sur un même pied, sans d'ailleurs réellement faire usage du concept de déterminant. Ce sont des rapports de coefficients qui sont comparés sans même envisager ce qu'il en advient si les dénominateurs sont nuls alors que précisément l'emploi du déterminant permet de s'affranchir de telles considérations. Une technique de substitution est d'ailleurs mise à contribution pour résoudre les systèmes générant des dénominateurs dont la nullité n'est pas toujours gérée. Ainsi, pour un système $ax + by = c$, $mx + ny = d$, la synthèse proposée à la forme suivante.

- Lorsque $a/m \neq b/n$, le déterminant est non nul et les deux droites sont sécantes. Le système admet une solution unique.
- Lorsque le déterminant est nul avec $a/m = b/n = c/d$, les deux droites sont parallèles confondues et le système admet une infinité de solutions.
- Lorsque le déterminant est nul avec $a/m = b/n \neq c/d$, les deux droites sont strictement parallèles et le système n'a aucune solution.

Une telle structuration ne permet évidemment pas de mettre en évidence le fait que les termes indépendants d'un système 2×2 n'entrent pas en ligne de compte dans l'existence d'une solution unique, ni non plus l'interprétation géométrique correspondante : si deux droites passant par l'origine ne sont pas confondues, les translations quelconques de ces droites fournissent des droites encore sécantes.

L'emploi du déterminant pour exprimer l'unique solution d'un système 2×2 lorsqu'elle existe n'est pas non plus mis en évidence. Il en résulte un traitement laborieux des systèmes 2×3, notamment concernant le concours de trois droites. Au lieu de prendre l'éventuelle solution des deux premières équations exprimées par des déterminants et de l'injecter dans la troisième, faisant apparaître un déterminant d'ordre 3, toute la résolution par substitution des deux premières équations est à nouveau reprise. Il en résulte une lourdeur importante dans les calculs. On passe également à côté de la possibilité de mettre à moindre frais en évidence des propriétés élémentaires mais importantes des déterminants : la possibilité de les développer selon une ligne quelconque. Il est interpellant de constater combien ces éléments sont négligés alors qu'ils constituaient une partie importante de l'ingénierie dont les enjeux avaient été préalablement discutés avec le doctorant.

Dans la foulée de l'étude des systèmes 2×3, le concept de faisceau est abordé mais n'est pas mis à profit pour servir de marchepied comme prévu initialement. On fait pour l'essentiel constater aux élèves sur des exemples qu'une combinaison de deux équations de droites sécantes donne l'équation d'une troisième droite qui fait partie du même faisceau que les deux premières. Le concept d'indépendance linéaire n'est pas introduit et l'unification par l'algèbre des faisceaux de droites tant concourantes que parallèles n'est pas mise en œuvre. Cette fusion aurait par ailleurs pu servir de marchepied pour l'introduction d'une géométrie projective : si algébriquement on ne distingue pas les faisceaux concourants et parallèles, ne pourrait-on envisager une géométrie étendue où l'on pourrait travailler à armes égales ? Signalons qu'il ne faisait pas partie du contrat du doctorant de mener à son terme l'introduction d'une géométrie projective.

La synthèse structurée proposée pour gérer les systèmes 2×3 est semblable à celle proposée pour les systèmes 2×2 : tous les cas sont mis sur un pied d'égalité et exprimés à l'aide de fractions. Les déterminants d'ordre 2 et 3 ne servent pas véritablement de fil conducteur de cette structuration.

Envisageons le déroulement dans l'espace à présent. Le passage aux faisceaux de l'espace se fait non pas sur une base algébrique comme envisagé initialement, relayant ainsi l'idée d'une économie de pensée offerte par l'algèbre, mais sur une base géométrique. L'étude géométrique proposée est d'ailleurs singulière. Ainsi trois plans formant une « tente » sont considérés comme faisant partie d'un même faisceau !

Le temps mis pour gérer les systèmes 2×3 ne permettra pas de déboucher sur une synthèse structurée pour 3×3 et donc pas non plus sur une ébauche du théorème de Rouché-Fontené et du concept de rang. Il est cependant intéressant de relever la nature du discours heuristique initialement envisagé pour faire émerger ce théorème. Le rang aurait été introduit comme nombre de lignes non nulles après application de l'élimination de Gauss. Quel est le lien avec l'approche envisagée jusque-là ? Quel est le lien entre dépendance linéaire, rang et déterminants ?

Au final, il ressort de l'analyse de la conduite de cette ingénierie une incapacité à articuler géométrie et algèbre de manière instrumentale. Là où l'algèbre aurait pu se substituer avantageusement à la géométrie en fournissant un traitement unificateur et exhaustif, on traîne dans des considérations géométriques morcelantes et aucune argumentation n'est développée assurant que tous les cas de figure ont été envisagés. Dans le sens contraire, la géométrie n'est pas mise à profit pour orienter des dérivations algébriques qui n'en finissent pas. Géométrie et algèbre ne sont pas mises à contribution pour s'épauler l'une l'autre, créant ainsi une véritable argumentation hybride, mais de manière quasi scolaire, où une dominante géométrique est saupoudrée de quelques touches algébriques. On voit sur cet exemple toute la difficulté à faire vivre un discours heuristique autour de l'algébrique linéaire.

Ceci ne faisait pas partie de notre propos initial mais, dans le prolongement de l'exemple traité, on voit apparaître un questionnement sur le *topos* d'un doctorant en didactique des mathématiques [1]. Que peut-il raisonnablement contenir ? La question est délicate dans la mesure où le travail attendu est un travail de *recherche* pour lequel il n'existe en général pas de texte de référence sur le sujet étudié auquel il suffirait de se conformer pour être assuré d'une quelconque réussite. Nous laissons cette question en suspens, tout en retenant qu'elle mériterait d'être traitée.

Références

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné* (2e éd.). Grenoble : La pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques, 19*(2), 221-266.

Job, P. (2011). *Étude du rapport à la notion de définition comme obstacle à l'acquisition du caractère lakatosien de la notion de limite par la méthodologie des situations fondamentales/adidactiques* (Thèse de doctorat). Université de Liège, Belgique

Job, P. & Schneider, M. (2010). Une situation fondamentale du concept de limite ? Question de langage, de culture ? Comment la TAD permet-elle de problématiser cette question. Dans A. Bronner et al. (Éds), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 615-632). Montpellier : IUFM.

1. Nous remercions les relecteurs pour avoir soulevé ce point.

Lakatos, I. (1984). *Preuves et réfutations : essai sur la logique de la découverte mathématique*. Paris : Hermann.

Lebeau, C. & Schneider, M. (2010). Équations incomplètes de plans et obstacles à la nécessité épistémique. *Recherches en didactique des mathématiques, 30*(1), 11-45.

Rouy, E. (2007). *Formation initiale des professeurs de l'enseignement secondaire supérieur et changements de rationalité mathématique entre l'institution secondaire et l'institution universitaire. Le cas éclairant du thème des dérivées* (Thèse de doctorat). Université de Liège, Belgique.

Schneider, M. (2009). Ingénieries didactiques et situations fondamentales. Quel niveau praxéologique ? Dans C. Margolinas et al. (Éds), *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp. 175-205), Grenoble : La pensée sauvage.

La modelización a través de los recorridos de estudio e investigación: el caso de la comparación de tarifas de telefonía móvil

Esther Rodríguez-Quintana
Dpto. Psicología Evolutiva y de la Educación,
Universidad Complutense de Madrid, España

Mercedes Hidalgo-Herrero y Tomás Ángel Sierra
Dpto. Didáctica de las Matemáticas,
Universidad Complutense de Madrid, España

Abstract. This paper focuses on a study and research course (SRC) involving the comparison of mobile phone rates. It has been experimented with first year students of Bachillerato (16-17 years old) with the aim of promoting the functional nature of graphical representations of functions. Within the framework of the anthropological theory of the didactic (ATD), we analyse the role of modelling as a tool to organize the school mathematical activity, as well as the didactic gestures and dialectics that have favoured the development of the SRC.

Résumé. Nous présentons un parcours d'étude et de recherche (PER) autour de la comparaison de tarifs de téléphonie mobile. Ce parcours, que nous avons expérimenté avec des élèves de première année de *Bachillerato* (16-17 ans), se propose de donner vie au caractère fonctionnel des représentations graphiques de fonctions. Dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (TAD), nous analysons le rôle de la modélisation comme moyen d'articuler l'activité mathématique scolaire et les gestes et dialectiques didactiques qui ont favorisé le développement du PER.

Resumen. Presentamos un «recorrido de estudio e investigación» (REI), en torno a la comparación de tarifas de telefonía móvil, experimentado con alumnos de primer curso de Bachillerato (16-17 años) que pretende dar vida al carácter funcional de las representaciones gráficas de funciones. Analizamos el papel de la modelización, dentro del marco de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD), como medio para articular la actividad matemática escolar, y los gestos y dialécticas didácticos que han favorecido el desarrollo del REI.

IV[e] congrès international sur la TAD (Toulouse, 21-26 avril 2013)
Axe 2. *L'analyse praxéologique comme outil de l'analyse et de l'ingénierie didactiques*

Rodríguez-Quintana, E., Hidalgo-Herrero, M. & Sierra, T. A. (2017). La modelización a través de los recorridos de estudio e investigación: el caso de la comparación de tarifas de telefonía móvil. Dans G. Cirade et al. (Éds), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* (pp. 421-452). https://citad4.sciencesconf.org

1. Introducción

En el marco de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD), la modelización constituye una herramienta fundamental para hacer —y aprender— matemáticas. La búsqueda de respuestas a una cuestión problemática constituye el motor de los aprendizajes y en su abordaje se produce una (re)modelización constante del sistema en que sitúa dicha cuestión. Así, la modelización se desarrolla en los siguientes estadios (Chevallard, 1989; Bolea, 2003):

1. Planteamiento de la situación problema y de cuestiones que no tienen una respuesta inmediata.
2. Construcción del modelo; identificación y designación de las variables que lo caracterizan consideradas pertinentes, así como de las relaciones entre las variables.
3. Trabajo dentro del modelo, con un trabajo manipulativo formal que permitirá responder a las cuestiones planteadas.
4. Planteamiento de nuevas cuestiones cuya formulación no sería posible sin disponer del modelo del sistema y del trabajo realizado con su ayuda.

El modelo ideal de proceso de estudio que propone la TAD para el aprendizaje de las matemáticas a través de la modelización es el recorrido de estudio e investigación (REI). Un REI se caracteriza (Chevallard, 2005) porque se inicia con una cuestión importante, viva y rica, con fuerte poder generador, y porque el objetivo del estudio no viene definido como un conjunto de saberes designados de antemano, sino como un conjunto de cuestiones cruciales —derivadas de dicha cuestión inicial— a las que la comunidad de estudio se propone aportar una respuesta. Se recupera así la relación natural entre cuestiones y respuestas de la actividad científica.

Los REI pueden describirse mediante una estructura arborescente de cuestiones y respuestas que surgen con la movilización de los medios, saberes y respuestas disponibles. Son una herramienta apropiada tanto para describir los procesos de estudio existentes o posibles, como para implementar en el aula secuencias de enseñanza basadas en la actividad matemática de modelización (Barquero, 2009; García et al., 2006).

El REI sobre la comparación de tarifas telefónicas que presentamos aquí fue desarrollado con motivo del trabajo de tesis doctoral realizado por Esther Rodríguez-Quintana (2005). Para su diseño se partió del estudio de materiales curriculares, libros de texto, informes de evaluación del sistema educativo, etc. y se estructuró en términos de cuestiones que requirieran la utilización de algunas funciones y su representación gráfica, pretendiendo así luchar contra el «monumentalismo» (Chevallard, 2004, 2005) observado en los materiales estudiados sobre este objeto de estudio.

Tomamos como hipótesis a priori del REI un modelo praxeológico que pretendía dar vida al papel instrumental de las representaciones gráficas de funciones y movilizar los siguientes conocimientos matemáticos:

- La construcción de la expresión algebraica de la función-tarifa (funciones afines y funciones a trozos).
- La utilización de las gráficas para realizar la comparación de tarifas dado que el «coste» de la comparación algebraica (sistema de ecuaciones) es muy alto cuando hay más de dos funciones o más de dos casos a considerar.
- El uso de las gráficas como medio para comprobar la validez de las soluciones dadas inicialmente de modo algebraico y representar los resultados de forma sintética.
- El uso gráfico de la función parte entera para el caso de tarifas «por pasos», dado que los alumnos no habían estudiado aún esta función.

Con las experimentaciones del REI perseguíamos los siguientes objetivos:

a) Estudiar la arborescencia posible del REI, es decir, analizar qué posibles cuestiones podían surgir en la búsqueda de respuestas a la cuestión generatriz y el tipo de técnicas utilizadas (aritméticas, gráficas y/o algebraicas).
b) Contrastar el REI como herramienta para hacer vivir en el aula el valor funcional de las representaciones gráficas a través de la modelización.
c) Buscar diferentes dispositivos de estudio que favorezcan su desarrollo (medios y respuestas disponibles en la cultura, organización de grupos, reparto de roles, etc.) y analizar su ecología, esto es, las condiciones que se requieren para que el proceso se organice y funcione de forma normalizada y las que se requerirán para modificarlo en una dirección determinada.

Así, fue necesario desarrollar un *análisis clínico de lo didáctico* (Chevallard, 2011), tanto de la *topogénesis* —rol de profesor y alumnos—, la *mesogénesis* —dialéctica de los medios y los media disponibles— y la *cronogénesis* —gestión temporal del proceso—.

El resto del artículo se estructura en tres bloques: en el primero se describe la experimentación del REI, el segundo sintetiza los modelos matemáticos que sustentan el REI y en el tercer bloque se presentan las conclusiones del trabajo.

2. Experimentación del REI: cómo elegir una tarifa de telefonía móvil

2.1. Consideraciones previas

Existen diferentes restricciones que dificultan la puesta en funcionamiento de un REI y que han sido estudiadas en investigaciones anteriores (Rodríguez-Quintana, 2005; García, 2005; Sierra, 2006; Barquero, 2009; Ruíz-Munzón, 2010; Serrano, 2013). Las más destacadas para el objetivo que nos ocupa provienen de las siguientes condiciones:

- Necesidad de evaluar la actividad realizada, dado que las técnicas de modelización tiene un carácter más difícilmente visible, menos algoritmizable y atomizable y en consecuencia más difícilmente evaluable;
- Necesidad de que el saber aparezca como definitivo e incuestionable;
- Exigencia de un aprendizaje rápido, lo que dificulta objetivos a largo plazo;
- La estructuración del saber relativo a un área de conocimiento en «bloques», «temas» y «contenidos», lo que dificulta el desarrollo de propuestas didácticas de carácter abierto, especialmente durante un periodo experimental, donde la evolución natural del REI, de gran interés para el investigador, puede chocar fuertemente contra el interés por abordar con carácter ordenado y secuencial unos determinados contenidos o procedimientos y no otros.

Los investigadores eligieron la opción de desarrollar la propuesta didáctica en un contexto extraescolar y dirigido por uno de los investigadores, intentando de ese modo superar algunas de las restricciones impuestas por la institución.

El REI fue experimentado con dos grupos de 22 y 24 alumnos de primer curso de Bachillerato (16-17 años). Se desarrolló en 18 y 19 sesiones, respectivamente, de dos horas, dos días a la semana, tras finalizar su periodo lectivo y en aulas de los propios centros. Ambos grupos eran heterogéneos en rendimiento escolar, dado que varios alumnos pensaban que se trataba de clases de refuerzo. Queremos destacar que, a pesar de que se aumentó el número de sesiones previstas en un principio, todos los alumnos iniciales participaron hasta el final, realizando bastante trabajo fuera del horario de la clase extraescolar.

Para el contraste de las hipótesis se tuvo en consideración tanto la grabación en vídeo de las sesiones, como el audio de cada pequeño grupo de trabajo y todos los materiales que se elaboraron.

2.2. Experimentación del REI

Presentamos aquí una síntesis del desarrollo de la primera experimentación del REI, incluyendo en las conclusiones algunos aspectos sobre la segunda experimentación (para una lectura detallada ver Rodríguez-Quintana, 2005).

Se partió de la cuestión generatriz:

$\boldsymbol{Q_0}$: *¿Qué tarifa de telefonía móvil nos interesa más contratar?*

En la primera sesión la profesora explicó que el objetivo del taller era estudiar qué tarifa de telefonía móvil nos interesaba más contratar. Los alumnos mostraron gran interés, iniciando un debate sobre qué información había que tener en cuenta para elegir la tarifa. Comenzaron planteando qué datos habían considerado ellos. A medida que avanzaban las sesiones, replanteaban el problema en función de la información real de tarifas que iban obteniendo.

Sobre el desarrollo de las cuestiones, es necesario considerar que primero se trabajó con datos ficticios basados en información que iban averiguando los alumnos y, posteriormente, se pasó a analizar los datos reales. Además, desde la segunda sesión, los alumnos decidieron desarrollar un espacio web donde publicar toda la información obtenida sobre las tarifas para que los usuarios pudieran utilizarla (Q_{WEB}), porque no encontraban nada semejante en internet. Así, responder a esta cuestión se convirtió en el objetivo que dirigió el proceso de estudio.

La tabla 1 muestra las características de las tarifas que propusieron los alumnos para mostrar la influencia de diferentes variables en el coste de la llamada:

Tarifa	c_e (€)	c_u (€)	Ft_{pm}	Ft_{rm}
A	0,12	0,15	segundos	segundos
B	0,12	0,2	segundos	segundos
D	0,12	0,15	completo	segundos
E	0,12	0,15	completo	½ minuto
F	0,12	0,2	completo	segundos

Tabla 1. Característica de tarifas de telefonía móvil ficticias consideradas.

Donde c_e = coste por establecimiento de llamada; c_u = coste por unidad de tiempo (minuto); Ft_{pm} = forma de tarificación del primer minuto; Ft_{rm} = forma de tarificación del resto de minutos.

La figura 1 sintetiza la secuencia de cuestiones surgidas en las experimentaciones a partir de la cuestión:

***Q*₁**: *¿Qué datos hay que tener en cuenta para comparar tarifas de telefonía móvil?*

Todos afirmaron haber tenido en cuenta para elegir su tarifa el c_u. Un alumno propuso considerar también el c_e, ya que todas las tarifas que él conocía lo incluían. Muchos alumnos no sabían si su tarifa incluía c_e y plantearon averiguarlo para el siguiente día y, por el momento, estudiar la tarifa del alumno que conocía el c_e y el c_u (tarifa A). Entonces propusieron la cuestión:

$\boldsymbol{Q_2}$: *¿Cómo calcular el coste de una llamada?*

Aunque $\boldsymbol{Q_{\mathbf{WEB1}}}$ surgió en la segunda sesión, dicha cuestión determinó abordar las cuestiones $\boldsymbol{Q_2}$ a $\boldsymbol{Q_8}$ destacando la influencia de cada variable en el coste de la llamada y sintetizando diariamente el trabajo realizado para publicarlo en internet. Inicialmente utilizaron técnicas aritméticas. Las algebraicas surgieron cuando decidieron calcular el coste con gran variedad de duraciones y necesitaban justificar el resultado obtenido frente a los demás.

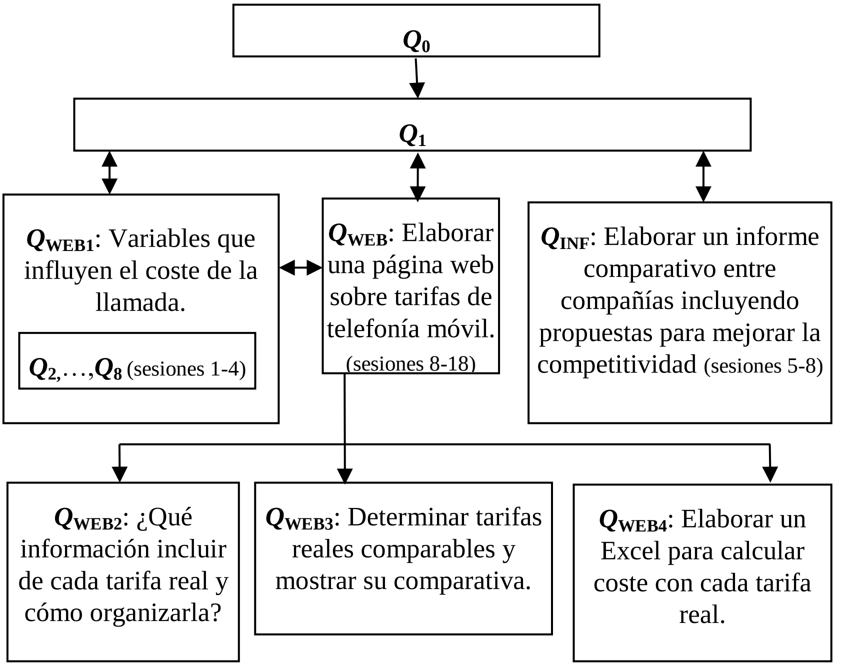


Figura 1. Secuencia de cuestiones y sesiones dedicadas.

La expresión para calcular el coste de la llamada fue del siguiente tipo:

$$C(t) = c_e + c_u t$$

Los alumnos propusieron inicialmente duraciones de llamada con números enteros, pero posteriormente surgió:

***Q*$_{21}$**: *Calcular el coste para t < 1.*

Se tomaron inicialmente valores simples para *t* (20, 30, 40 segundos) y posteriormente más complejos (41 segundos, 23 segundos, etc.). Matizaron entonces que *t* debía tomarse en minutos. La dificultad de transformar los segundos en minutos para ejecutar los cálculos provocó más errores y que la técnica algebraica se generalizara para justificar los resultados.

Un alumno advirtió haber visto en su factura llamadas que duraban 0 segundos con coste 0 y que la expresión algebraica anterior no tenía en cuenta este caso. Así surgió:

***Q*$_{22}$**: *¿Y si t = 0?*

Comprobada la advertencia realizada, se obtuvo la expresión algebraica siguiente:

$$C(t) = \begin{cases} c_e + c_u t & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

No conociendo la mayoría de los alumnos la existencia de c_e, mostraron interés por estudiar:

***Q*₃**: *¿Tiene el mismo coste hablar t minutos en una llamada o en varias?*

y su derivada:

Q_{31}: *¿Qué relación hay entre una llamada de 3 minutos y 3 de un minuto o entre una llamada de 1 minuto y 2 de 30 segundos?*

Se generalizó entonces el uso de la expresión algebraica de la función coste de la llamada, donde sustituían los valores concretos de la tarifa A.

Posteriormente, los alumnos mostraron interés por hallar el coste medio por minuto $C_m(t)$, utilizando técnicas aritméticas, dividiendo la suma total del coste de cada llamada por la suma total de las duraciones de las llamadas.

Para buscar una relación más general surgió:

Q_{32}: *¿Qué relación existe entre la duración de la llamada y el $C_m(t)$?*

Sin hallar la expresión algebraica del $C_m(t)$, utilizaron la gráfica, una hipérbola. Interpretaron que el $C_m(t)$ tendía al coste por minuto cuando t tendía a infinito. Es decir, que la función tenía una asíntota horizontal en $c_u = 0{,}15$. Entonces un alumno propuso comparar la tarifa A con su tarifa, donde $c_u = 0{,}2$ y surgieron dos nuevas cuestiones:

Q_4: *Dadas dos tarifas, ¿cuál es más cara y para qué valores?*

Q_{41}: *Comparar el coste de las tarifas A y B.*

Dedujeron, a simple vista, que es más cara B porque tiene mayor precio por minuto. Pero la profesora propuso **Q_{42}**.

Q_{42}: *¿Es más cara B que A para cualquier duración de la llamada?*

Quizá porque lo propuso la profesora, los alumnos hicieron comprobaciones y confirmaron que sí. La mayoría utilizaron la gráfica (ver figura 2), aunque algunos solamente hallaron el precio para diferentes duraciones. Al exponer lo realizado, acordaron más adecuado mostrarlo gráficamente en la web, y propusieron:

Q_{43}: *¿La diferencia de coste entre A y B varía en función de t?*

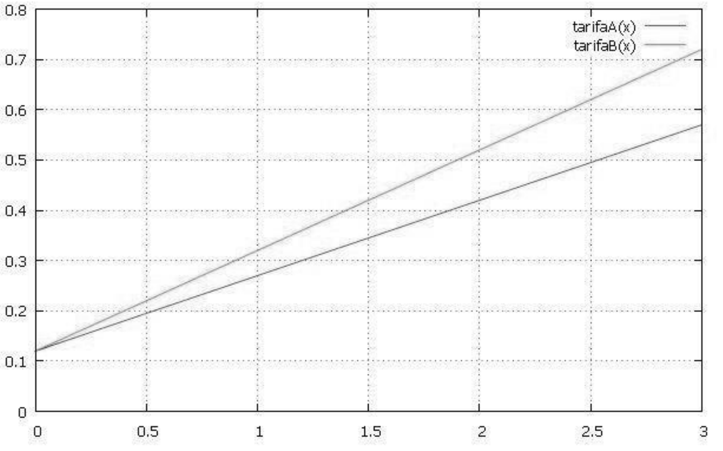


Figura 2. Gráfica comparación tarifas A y B.

Confirmaron que la de B siempre era mayor. Durante el primer minuto eran muy cercanas pero se iban distanciando 0,05 euros por cada minuto.

Varios alumnos preguntaron si el $C_m(t)$ siempre sería también mayor en B y surgió:

***Q*₄₄**: *¿Qué relación existe entre el coste medio de las tarifas A y B?*

Los alumnos realizaron la gráfica de cada función (ver figura 3). Para la de B una hipérbola con una asíntota horizontal en y = 0,2. Obtuvieron que $C_m(t)$ es máximo en llamadas de 1 segundo de duración y tiende a 0,2 cuando t tiende a infinito.

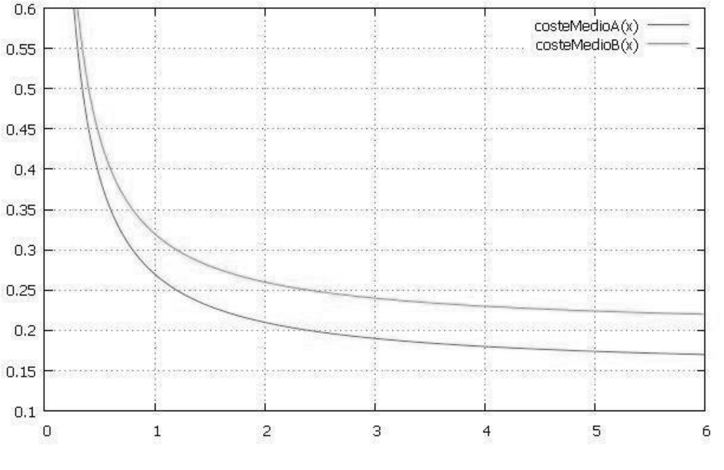


Figura 3. Gráfica comparación de $C_m(t)$ de tarifas A y B.

Se pudo así confirmar que la gráfica de A, semejante pero con la asíntota en $y = 0{,}15$, siempre queda bajo la de B.

Un alumno, sabiendo que su tarifa cobraba el primer minuto completo, planteó analizar cómo influía en el coste. Incluyeron la tarifa D y propusieron $\boldsymbol{Q_5}$ y sus derivadas***:***

$\boldsymbol{Q_5}$: *Comparar los costes de las tarifas A y D.*

$\boldsymbol{Q_{51}}$: *Comparar A y D para* $t > 1$.

$\boldsymbol{Q_{52}}$: *Comparar A y D para* $t < 1$.

$\boldsymbol{Q_{53}}$: *Comparar en D el coste de una llamada de t minutos y varias llamadas cuya suma es t minutos.*

$\boldsymbol{Q_{54}}$: *Qué tarifa (A o D) es más cara y para qué valores.*

Comprobaron que el coste coincide para duraciones superiores a un minuto. Para hallar el coste en D para $t < 1$, sumaron 0,12 y 0,15.

Acordaron incluir en la web las gráficas de las tarifas A y D (ver figura 4) para mostrar más claramente la influencia del cobro completo del primer minuto, y decidieron utilizar el ejemplo extremo de comparación de 60 llamadas de un segundo frente a una llamada de 60 segundos, en cuyo primer caso se cobraría el precio por minuto 60 veces. Concluyeron que la gráfica muestra mejor qué tarifa es más cara y para qué valores. Surgió así la cuestión:

$\boldsymbol{Q_{55}}$: *¿Cuál es la relación entre el* $C_m(t)$ *de A y de D?*

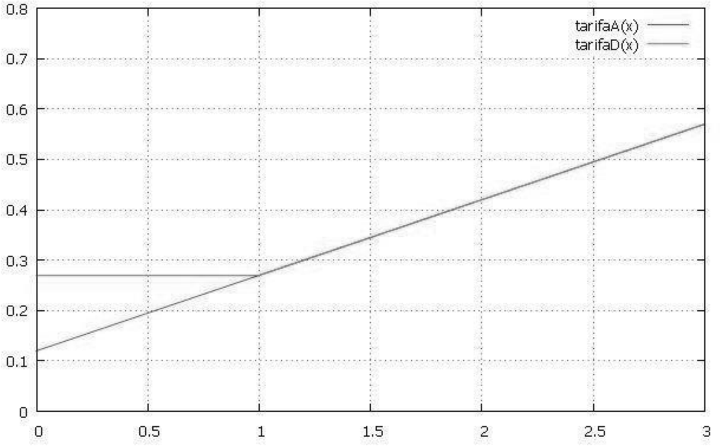


Figura 4. Gráfica comparación de tarifas A y D.

Observaron que ambas gráficas coincidían para $t > 1$ (ver figura 5). Para $t < 1$, un grupo de alumnos llegó a la conclusión de que la gráfica para D sería horizontal. En la puesta en común, los alumnos que realizaron la gráfica correctamente pudieron explicárselo a los demás.

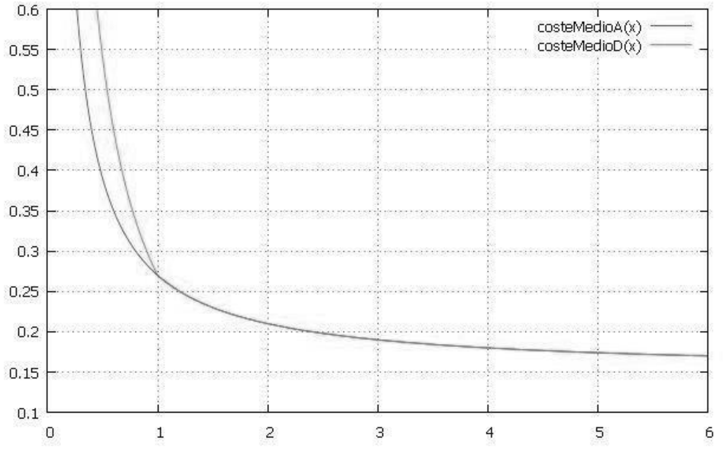


Figura 5. Gráfica comparación de $C_m(t)$ de tarifas A y D.

Como podemos observar en la figura 5, la gráfica de coste medio de D decrece hasta un minuto (porque se cobra completo) y posteriormente se comporta como la de A. Así, D tiene mayor $C_m(t)$ que A para $t < 1$ y después coinciden.

Los alumnos propusieron $\boldsymbol{Q_6}$, para confirmar si B era más cara siempre:

$\boldsymbol{Q_6}$: *Comparar los costes de las tarifas B y D.*

Tras realizar las gráficas (figura 6), apareció la dificultad de hallar el punto de corte, estando implicada una función definida a trozos, que no habían estudiado aún. Intentaron hallarlo con la expresión algebraica, sin considerar que la función de D estaba definida a trozos. Hallaron como punto de corte (0, 0), pero, tras intentar resolverlo infructuosamente, algunos observaron gráficamente el punto de corte cercano a $t = 1$. Entonces calcularon para qué valor de t en la tarifa B el coste coincidía con el de un minuto en la tarifa D. Así dedujeron gráficamente que antes de ese valor de t es más cara D y después es más cara B.

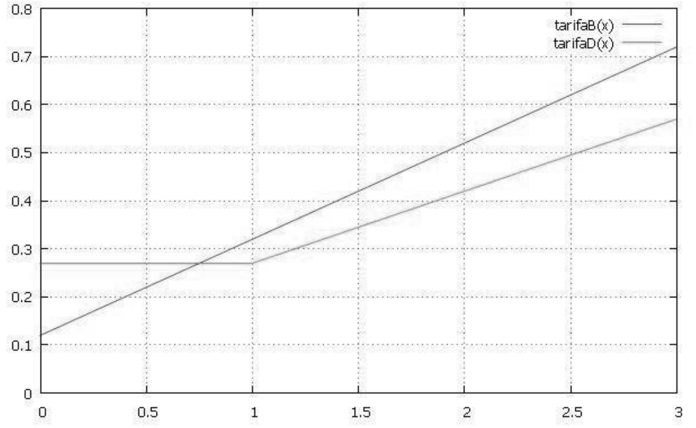


Figura 6. Gráfica comparación de tarifas B y D.

Un alumno, que había averiguado que su tarifa cobraba el primer minuto completo y el resto por pasos de 30 segundos, propuso incluir la tarifa E y abordar la cuestión:

Q₇: *Comparar el coste de las tarifas D y E.*

Aunque no sabían expresar algebraicamente la función definida a trozos, obtuvieron la gráfica de E partiendo de la de D y «horizontalizando», a partir del primer minuto, los fragmentos de recta cada 30 segundos, tomando *t* el valor más alto de cada intervalo, obteniendo una gráfica semejante a la mostrada en la figura 7.

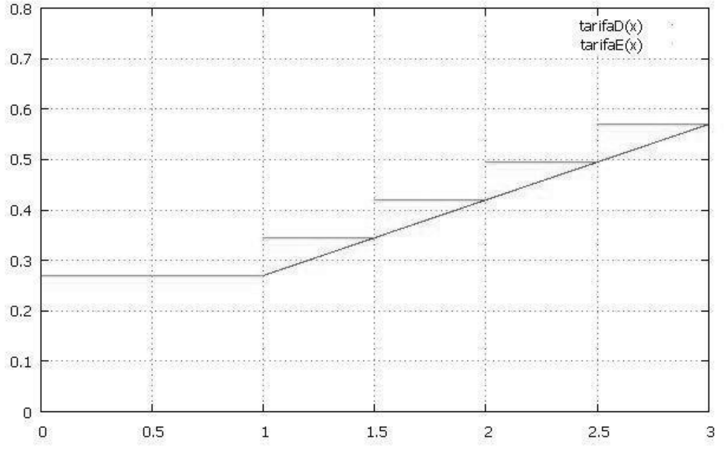


Figura 7. Gráfica comparación de tarifas D y E.

Gráficamente determinaron que a partir del primer minuto—donde ambos costes coinciden—la tarifa E es más cara excepto para los múltiplos de 0,5 minutos, donde los costes vuelven a coincidir.

Como con el resto de comparaciones, propusieron la cuestión $\boldsymbol{Q_{71}}$:

$\boldsymbol{Q_{71}}$: *Comparar el $C_m(t)$ de D y E.*

Decidieron seguir utilizando las gráficas (ver figura 8), y concluyeron que en ambas el $C_m(t)$ coincide hasta $t = 1$, siendo máximo en un segundo y decreciendo rápidamente hasta un minuto. Después, en D sigue decreciendo, aunque más lentamente, mientras que en E aumenta (produciéndose un salto) y va decreciendo hasta 1,5 minutos, y vuelve a saltar cada 0,5 minutos, disminuyendo hasta el siguiente salto.

Un grupo propuso indicar en la web que es más barata una tarifa que cobra por segundos que por pasos de 30 segundos. Otro grupo indicó que eso no sería verdad para todos los casos y propuso $\boldsymbol{Q_{72}}$.

$\boldsymbol{Q_{72}}$: *Si dos tarifas sólo difieren en que una cobra por pasos de 30 segundos y otra por segundos, ¿será más barata la segunda para cualquier t?*

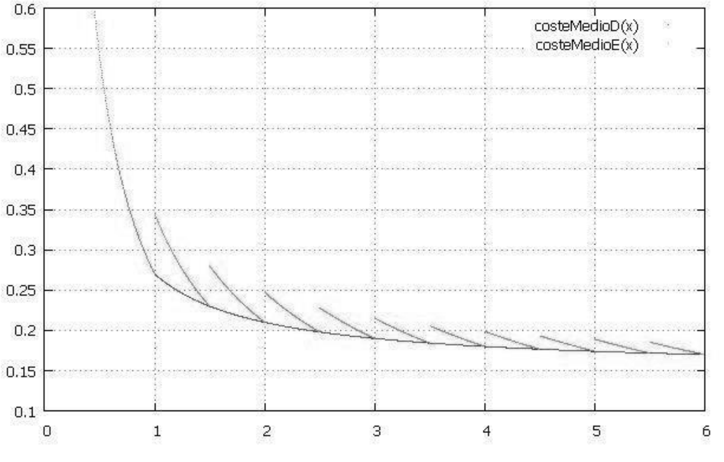


Figura 8. Gráfica comparación de $C_m(t)$ de tarifas D y E.

Concluyeron que no, porque coincidirán en el coste durante el primer minuto (si las dos lo cobran completo) y para los t múltiplos de 0,5.

Algunos alumnos proponen $\boldsymbol{Q_8}$, para analizar qué ocurre si la tarifa es más cara pero cobra por segundos a partir del primer minuto.

$\boldsymbol{Q_8}$: *Comparar los costes de las tarifas E y F.*

Elaboraron la gráfica de la función coste para la tarifa D a partir de la de B, «horizontalizando» el coste hasta un minuto en su valor máximo (ver figura 9).

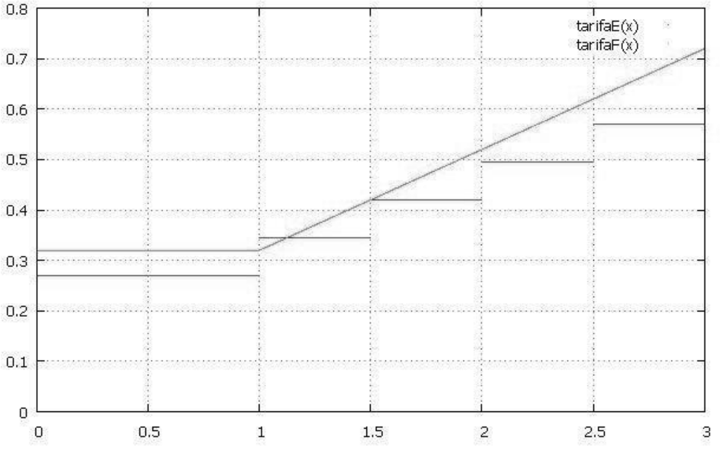


Figura 9. Gráfica comparación de tarifas E y F.

Para comparar la gráfica de una recta con la gráfica de una función parte entera y determinar para qué valores una es más cara que la otra hicieron lo siguiente: observaron gráficamente los puntos de corte y comprobaron que había que igualar la expresión algebraica de la función coste de F a 0,345 y a 0,42 (coste que en E correspondía al coste para $1 < t < 1{,}5$ y a $1{,}5 < t < 2$, respectivamente). Interpretaron entonces que, coincidiendo el coste en $t = 1{,}125$ y en $t = 1{,}5$, E era más barata excepto para $1 < t < 1{,}125$, en que era más barata F.

Consideraron finalizada la comparativa para mostrar en la web la influencia de cada variable en el coste de la llamada y se retomó $\boldsymbol{Q}_{\mathbf{WEB}}$ (ver figura 1). Se concluyó que debía incluir: a) la tabla de datos de las tarifas «ficticias» y sus gráficas de coste; y b) un espacio dedicado a explicar la influencia de cada variable en la función coste y en la función $C_m(t)$, incluyendo las gráficas superpuestas de dos en dos.

Decidieron transformar las gráficas, que habían sido desarrolladas manualmente, en Excel, para darles un «carácter más formal». Para las tarifas con función parte entera, fueron definiendo cada trozo, «horizontalizando» a partir de la función afín.

Para $\boldsymbol{Q}_{\mathbf{WEB2}}$ utilizaron tablas semejantes a la tabla 1, pero incluyendo información que hasta ahora no habíamos considerado (consumo mínimo mensual, de tarjeta o de contrato, coste por mensaje, etc.).

Para responder a $\boldsymbol{Q}_{\mathbf{WEB3}}$, consideraron fundamental incluir las gráficas de la función coste de cada tarifa, incluyendo el IVA. Además, incluyeron una comparativa entre las tarifas que se consideraron comparables (de mañana o de tarde; contrato-tarjeta, etc.), situándolas superpuestas con diferentes colores.

El libro Excel elaborado para abordar $\boldsymbol{Q}_{\mathbf{WEB4}}$ calculaba el coste para todas las tarifas existentes en función del consumo realizado, para permitir la comparación del coste mensual entre ellas y/o con una factura existente. Surgió un análisis muy interesante sobre la relación entre el detalle de datos exigidos sobre el consumo y la exactitud del precio en cada tarifa que el archivo Excel podía ofrecer al consumidor. De este modo, surgieron tres versiones de codificación en Excel que denominaron: normal, «para vagos» y «para muy vagos», cada una de las cuales exigía menos información que la anterior pero ofrecía menos precisión sobre el coste con cada tarifa.

También tuvo lugar un interesante trabajo estadístico sobre qué cuantía incluir a las tarifas que cobran por pasos de 30 segundos en las versiones implementadas en Excel que no exigían indicar la duración exacta de cada llamada.

Además, los alumnos desarrollaron informes comparativos entre compañías ($\boldsymbol{Q}_{\mathbf{INF}}$), con la idea de vendérselo a la que resultara más favorecida. Pero posteriormente decidieron desarrollar propuestas para mejorar la competitividad de cada una y así poder vendérselo a todas. Finalmente resultó que eran difícilmente comparables por la existencia de precios distintos para diferentes fragmentos horarios y utilizaron el coste medio por minuto, estudiando cuánto se podía reducir una tarifa en determinados horarios para que el coste medio diario del minuto fuera menor (y poder utilizarlo como publicidad) pero reduciendo el precio sólo en los horarios en que menos se hablaba para que siguiera siendo rentable para el empresario. Sin embargo, a partir de este trabajo, decidieron incluir un aviso en la web informando de que el coste medio del minuto diario era engañoso y que había fijarse en el coste del minuto en los fragmentos en que uno hablaba más por móvil.

En las dos experimentaciones del REI que acabamos de describir, se puede observar cómo la modelización articula el proceso de estudio. El sistema era analizado recursivamente y, en función de los recursos disponibles, se avanzaba en la búsqueda de respuestas, (re)modelizando el sistema y planteando nuevas cuestiones. Sin embargo, las experimentaciones también muestran hasta qué punto el propio desarrollo del REI excede con creces el análisis matemático a priori que habíamos realizado y que presentamos a continuación.

3. Los modelos matemáticos en las tarifas de telefonía móvil

La elección de la cuestión generatriz $\boldsymbol{Q_0}$ venía motivada por un análisis a priori de los modelos matemáticos potenciales que permiten abordarla y que presentamos a continuación. Partimos de un sistema económico en el que se plantea la cuestión inicial siguiente:

$\boldsymbol{q_0}$: *¿Cuál es tarifa de telefonía móvil más barata?*

Una problemática inicial que se puede plantear en este sistema vendría desarrollada por las siguientes cuestiones derivadas:

$\boldsymbol{q_1}$: *¿Cuánto nos costará una llamada de teléfono móvil de una duración determinada?*

$\boldsymbol{q_2}$: *¿Qué influencia tiene el coste por establecimiento de llamada en el coste total de la llamada?*

$\boldsymbol{q_3}$: *Dadas dos tarifas ¿cuál interesa más contratar?*

Para poder avanzar, necesitamos primero una delimitación del sistema de tarifas y de las variables que lo caracterizan. Debemos por lo tanto considerar una nueva cuestión:

$\boldsymbol{q_4}$: *¿Qué variables caracterizan el sistema para su análisis?*

Una primera respuesta puede ser: el coste total de una llamada (C), el tiempo de duración de la llamada (t), el coste de establecimiento de llamada (c_e), el coste por unidad de tiempo (c_u) y el coste medio (C_m). Consideramos t como variable independiente del sistema, C y C_m como variables dependientes, c_e y c_u como parámetros. La relación entre ellos vendrá dada por las siguientes expresiones dependiendo de la cuestión que se quiera abordar:

A) Para estudiar el coste de una llamada:

$$C(t) = c_e + c_u t$$

B) Para estudiar la influencia del c_e según t:

$$C_m(t) = \frac{c_e + c_u t}{t} = \frac{c_e}{t} + c_u$$

C) Para estudiar el coste de una llamada en el caso de tarificaciones por pasos de tiempo:

$$C(t) = c_e + \frac{c_u}{u/p}\left(\left[\frac{t}{p}\right] + 1\right)$$

donde c_u representa el coste por paso, $[x]$ es la función parte entera, u la unidad de tiempo, y p tamaño del paso.

3.1. Estudio de las técnicas para abordar las cuestiones

Para buscar elementos de respuesta a las cuestiones planteadas, compararemos las tres funciones anteriores empleando las tres técnicas que acostumbran a conocer los alumnos del bachillerato español: aritmética, gráfica y algebraica.

Técnica aritmética.

A) Consideremos una llamada que dure t minutos, conociendo c_e y c_u. La técnica consiste en multiplicar c_u por t y sumar c_e. Por ejemplo, si c_u es 0,15€ y c_e es 0,12€:

Tiempo	Coste
1	0,12 + 0,15
20	0,12 + 0,15·20

Tabla 2. Cálculo aritmético de *C*(*t*).

Podemos construir una tabla para distintos valores de t, por ejemplo utilizando una hoja de cálculo (tabla 3).

t	C
0,25	0,1575
1,25	0,3075
2,25	0,4575
3,25	0,6075
4,25	0,7575
5,25	0,9075
6,25	1,0575

7,25	1,2075
8,25	1,3575

Tabla 3. Cálculo aritmético con Excel.

B) De forma análoga, en el caso de $\boldsymbol{q_2}$, se obtiene, por ejemplo para $C_m(t) = (0{,}12/t) + 0{,}15$:

t	C/t
0,25	0,63
1,25	0,246
2,25	0,20333333
3,25	0,18692308
4,25	0,17823529
5,25	0,17285714
6,25	0,1692

Tabla 4. Cálculo aritmético del coste medio para el caso $c_e = 0{,}12$ y $c_u = 0{,}15$.

La tabla 4 permite observar que el $C_m(t)$ decrece según aumenta la duración de la llamada, pero no el carácter hiperbólico de la función.

C) Para $\boldsymbol{q_3}$ también puede emplearse la técnica aritmética, que conduciría, de acuerdo con la tabla 5, a elegir la Tarifa 1.

Sin embargo, esta no es la más económica para llamadas de larga duración, pues, por ejemplo, para una llamada de 5 unidades de tiempo de duración, el coste según la Tarifa 1 sería 1,12€, en tanto que según la Tarifa 2 sería 1,05€. Las técnicas gráfica y algebraica, como se verá más adelante, tienen un mayor alcance y permiten seleccionar mejor la Tarifa que más interesa.

$c_e = 0{,}12$ $c_u = 0{,}2$		$c_e = 0{,}15$ $c_u = 0{,}18$	
t'	C'	t''	C''
0	0,12	0	0,15
0,1	0,14	0,1	0,168
0,2	0,16	0,2	0,186
0,3	0,18	0,3	0,204
0,4	0,2	0,4	0,222
0,5	0,22	0,5	0,24
0,6	0,24	0,6	0,258

0,7	0,26	0,7	0,276
0,8	0,28	0,8	0,294
0,9	0,3	0,9	0,312

Tabla 5. Cálculo aritmético para la comparación de dos tarifas.

Si ahora queremos comparar los costes medios $C_m(t)$, el alcance de la técnica aritmética resulta también escaso y pueden obtenerse conclusiones equivocadas por los mismos motivos que para la comparación del coste.

Técnica gráfica.

A) Tras realizar las tablas, si queremos abarcar más valores de t, una estrategia más eficaz será dibujar la gráfica de la función. Si conocemos que la función es una recta, basta con utilizar dos pares (tiempo, coste) para representarla gráficamente. Pero no es necesario conocer su expresión algebraica, ya que podemos emplear Excel para estudiar el comportamiento global de una tarifa analizando la gráfica de su función (ver figura 10), donde se observa el comportamiento lineal en el crecimiento de C.

$c_e = 0{,}12$	$c_u = 0{,}15$
t	C
0	0,12
0,25	0,1575
1,25	0,3075
2,25	0,4575
3,25	0,6075
4,25	0,7575
5,25	0,9075
6,25	1,0575
7,25	1,2075
8,25	1,3575

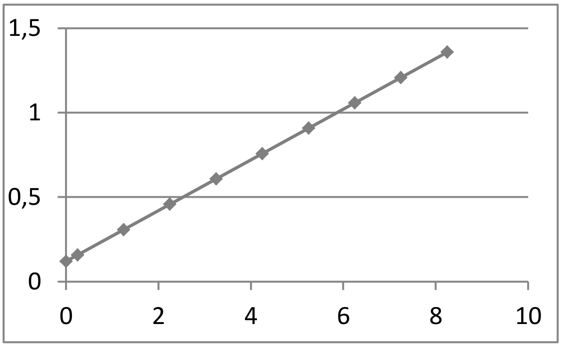


Figura 10. Técnica gráfica con Excel para una tarifa.

B) Igualmente se puede analizar gráficamente la función del $C_m(t)$ (ver figura 11), donde se observa su comportamiento hiperbólico y la existencia de una asíntota horizontal en $y = 0{,}15$.

$c_e = 0{,}12$ $c_u = 0{,}15$	
t	C/t
0,25	0,63
1,25	0,246
2,25	0,20333333
3,25	0,18692308
4,25	0,17823529
5,25	0,17285714
6,25	0,1692
7,25	0,16655172
8,25	0,16454545
10	0,162

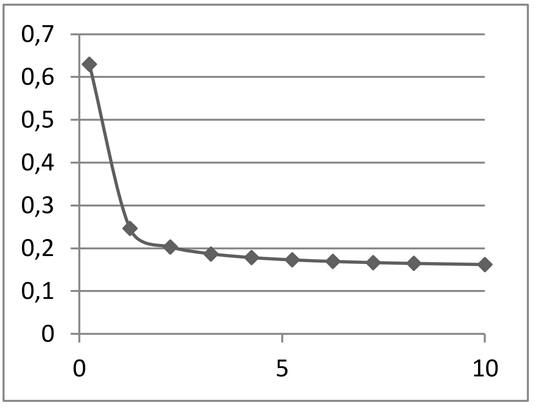


Figura 11. Técnica gráfica para el coste medio de una tarifa.

C) Para responder a $\boldsymbol{q_3}$, resulta también bastante eficaz dibujar la gráfica de la función de cada tarifa, permitiéndonos observar la influencia del valor de los parámetros en la función. Por ejemplo, con Excel pueden realizarse diferentes gráficas para los diferentes valores de los parámetros c_e y c_u correspondientes a cada tarifa. Para los valores de la tabla 6 se obtienen las gráficas de la figura12.

Tarifa 1 $c_e = 0{,}12$ $c_u = 0{,}15$	
t	C
0	0,12
0,25	0,1575
1,25	0,3075
2,25	0,4575
3,25	0,6075
4,25	0,7575
5,25	0,9075
6,25	1,0575
7,25	1,2075
8,25	1,3575

Tarifa 2 $c_e = 0{,}12$ $c_u = 0{,}2$	
t'	C'
0	0,12
0,25	0,17
1,25	0,37
2,25	0,57
3,25	0,77
4,25	0,97
5,25	1,17
6,25	1,37
7,25	1,57
8,25	1,77

Tarifa 3 $c_e = 0{,}15$ $c_u = 0{,}18$	
t''	C''
0	0,15
0,25	0,195
1,25	0,375
2,25	0,555
3,25	0,735
4,25	0,915
5,25	1,095
6,25	1,275
7,25	1,455
8,25	1,635

Tabla 6. Tablas de valores para varias tarifas.

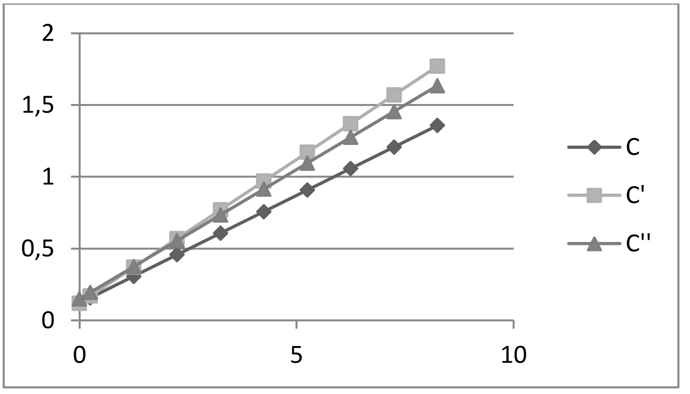


Figura 12. Técnica gráfica para comparar varias tarifas.

Así, podemos analizar el comportamiento del parámetro que constituye la ordenada en el origen, c_e, y el de la pendiente, c_u, de cada función afín. La comparación de llamadas de corta duración puede apreciarse en la figura 13, donde hemos ampliado las gráficas de la figura 12 en el intervalo [0, 2].

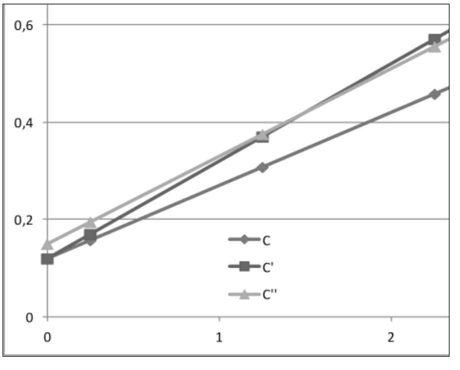


Figura 13. Técnica gráfica: ampliación comparación tarifas.

Observamos que la Tarifa 3 es inicialmente más cara que la Tarifa 2 por tener un mayor c_e pero que la Tarifa 2 es más cara que la Tarifa 3 a partir de una determinada duración de llamada por tener un mayor c_u. Superando las limitaciones de la técnica aritmética, la técnica gráfica permite decidir la tarifa mejor según sea t, pues se observa cómo es el comportamiento de cada tarifa a lo largo de un mayor período de tiempo.

Por otro lado, si queremos comparar el $C_m(t)$ entre varias tarifas, se puede realizar la gráfica a partir de una tabla de valores y estudiar cómo dicho coste medio tiende al coste por unidad de tiempo (figura 14). Se puede observar con claridad la tendencia asintótica de las tres funciones hacia y =

c_u. Así, podemos concluir que, en llamadas de larga duración, interesa más la tarifa que tenga menor coste por unidad de tiempo.

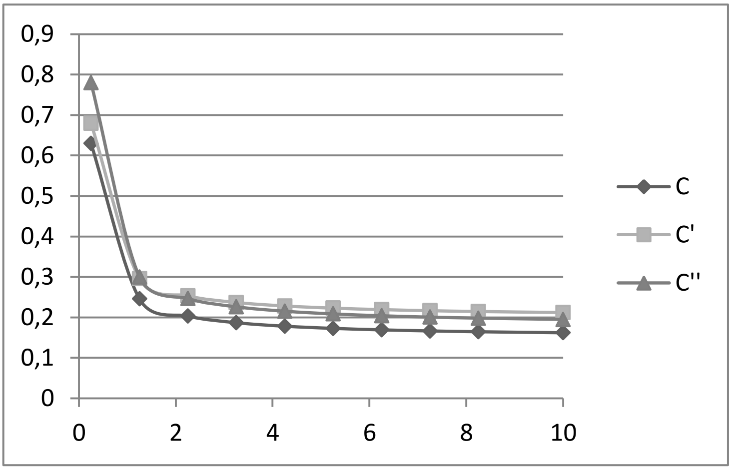


Figura 14. Técnica gráfica: comparación de costes medios.

La técnica algebraica.

A) La técnica algebraica, para responder a ***q₁*,** nos conducirá a la expresión:

$$C(t) = c_e + c_u t$$

Podemos estudiar la influencia de los parámetros en dicha expresión: el coste mínimo de una llamada cualquiera es c_e y, como c_u es positivo, a mayor t mayor será el coste.

B) Para responder a $\boldsymbol{q_2}$, la técnica algebraica nos lleva a analizar la expresión:

$$C_m(t) = \frac{c_e}{t} + c_u \, .$$

Podemos concluir que, como c_e y c_u son positivos, el coste medio es decreciente, es decir, a mayor duración de la llamada menor es el coste medio, ya que c_e/t decrece según se incrementa t. El coste medio cada vez estará más cerca de c_u y por tanto la función $C_m(t)$ tiene una asíntota horizontal $y = c_u$.

C) En el caso de $\boldsymbol{q_3}$, la técnica algebraica permite la comparación de tarifas teniendo en cuenta todos los posibles valores de los parámetros.

Consideremos las dos tarifas siguientes:

Tarifa 1
c_e^1

Tarifa 2
c_e^2

c_u^1	c_u^2
$C(t)=c_e^1+c_u^1 t$	$C(t)=c_e^2+c_u^2 t$

Tabla 7. Características genéricas de las tarifas 1 y 2.

Ahora, con las dos tarifas de la tabla 7, se desea saber para qué valores de t se verifica si $C_1(t)<C_2(t)$, $C_1(t)>C_2(t)$ ó $C_1(t)=C_2(t)$.

Cuando los c_u son iguales, $c_u^1=c_u^2$, será más barata la tarifa que tenga menor c_e. Cuando los c_e son iguales, $c_e^1=c_e^2$, será más barata la tarifa que tenga menor coste por unidad de tiempo. Como los c_u de ambas tarifas son positivos, ambas expresiones son funciones afines crecientes. Si una de las tarifas tiene mayores ambos costes, siempre será mayor.

Pero si una tiene mayor c_e y la otra mayor c_u, habrá dos intervalos, uno donde la Tarifa 1 sea más barata y otro donde lo sea la Tarifa 2, y sólo habrá un t_i en el que ambas tarifas coincidan. Para determinar los intervalos basta buscar el valor de t_i para el que ambas funciones coinciden:

$$C_1(t)=c_e^1+c_u^1 t=c_e^2+c_u^2 t=C_2(t)$$
$$(c_u^1-c_u^2)t=(c_e^2-c_e^1)$$
$$t_i=\frac{(c_e^2-c_e^1)}{(c_u^1-c_u^2)}$$

Además, como ninguna tiene ambos costes mayores que los de la otra, t_i siempre es positiva. Antes de t_i, será más cara la que tenga mayor c_e, y a partir de t_i será más cara la que tenga mayor c_u. Por ejemplo, supongamos que $c_e^1>c_e^2$ y $c_u^1<c_u^2$, entonces:

$$C_1(t)=c_e^1+c_u^1 t\le c_e^2+c_u^2 t=C_2(t)\Leftrightarrow$$
$$(c_u^1-c_u^2)t\le(c_e^2-c_e^1)\Leftrightarrow$$
$$t\ge\frac{(c_e^2-c_e^1)}{(c_u^1-c_u^2)}=t_i$$

Es decir, inicialmente es más barata la Tarifa 2, con menor c_e, y tras t_i es más barata la Tarifa 1, con menor c_u.

Para comparar dos tarifas atendiendo al $C_m(t)$, el análisis se puede realizar análogamente y se obtiene el mismo resultado para el tiempo en el que ambas coinciden:

$$t_i=\frac{(c_e^2-c_e^1)}{(c_u^1-c_u^2)}$$

La técnica algebraica aquí explicada puede considerarse como la tecnología que permite justificar las técnicas aritmética y la gráfica.

Estudio del sistema de tarificación por pasos.

La comparación por la función coste de tarifas que aplican pasos puede realizarse empleando la técnica aritmética, aunque su alcance es limitado, como ya explicamos para el caso de tarificaciones sin pasos. Sin embargo, resulta sencillo con el uso de tablas de valores y las representaciones gráficas, siempre que se utilicen valores de t que difieran en 0,1 unidades de tiempo (para observar líneas rectas en los intervalos). Con Excel se obtienen las gráficas de la figura 15 para un tamaño de paso de una unidad de tiempo y los costes siguientes:

$$C(t) = 0{,}12 + 0{,}15 * \left(\left[\frac{t}{1}\right] + 1\right) \qquad C'(t) = 0{,}12 + 0{,}2 * \left(\left[\frac{t}{1}\right] + 1\right)$$

$$C''(t) = 0{,}15 + 0{,}18 * \left(\left[\frac{t}{1}\right] + 1\right)$$

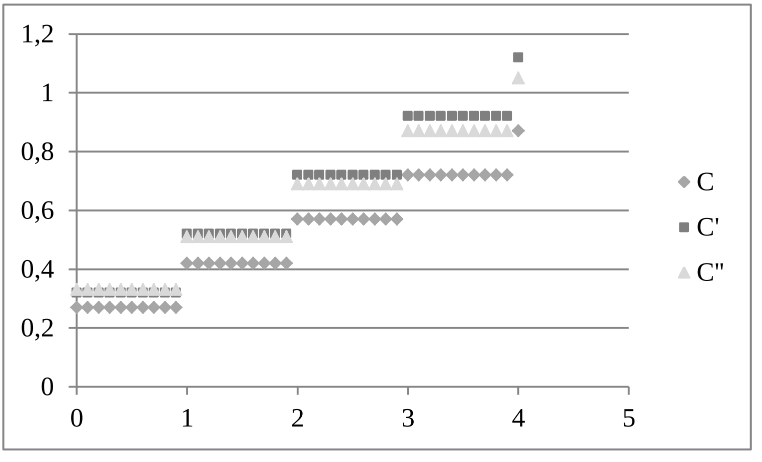


Figura 15. Técnica gráfica para comparar tarifas por pasos.

La función de tarificación está definida a trozos y es discontinua. En la figura 16 comparamos una de ellas (c_e = 0,12; c_u = 0,15) con la correspondiente función afín. Se observa una «horizontalización» de la función afín asignando a cada valor t del intervalo de cada paso el mayor coste para dicho intervalo.

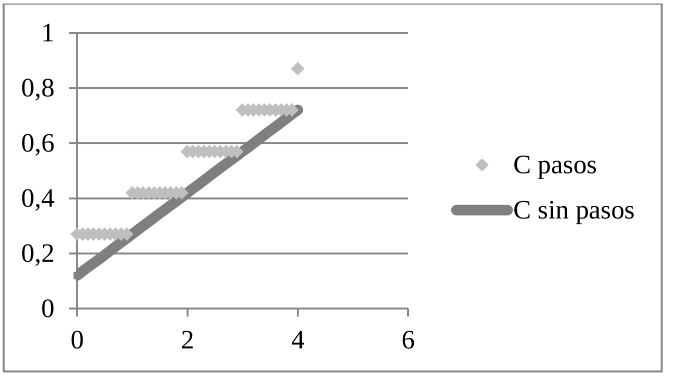


Figura 16. Técnica gráfica: comparación de tarifas por pasos y sin pasos.

El estudio comparativo de los costes medios puede llevarse a cabo también empleando la técnica gráfica. Siguiendo un proceso análogo al descrito para la función de coste de llamada, se obtienen las gráficas (figura 17) correspondientes a los costes medios siguientes:

$$C_m(t) = \frac{0{,}12}{t} + 0{,}15 * \frac{\left(\left[\frac{t}{1}\right]+1\right)}{t}$$

$$C'_m(t) = \frac{0{,}12}{t} + 0{,}2 * \frac{\left(\left[\frac{t}{1}\right]+1\right)}{t}$$

$$C''_m(t) = \frac{0{,}15}{t} + 0{,}18 * \frac{\left(\left[\frac{t}{1}\right]+1\right)}{t}$$

Observándose que los costes medios son funciones definidas a trozos y discontinuas, con la misma tendencia hiperbólica que con las tarifas sin pasos y tendencia a c_u.

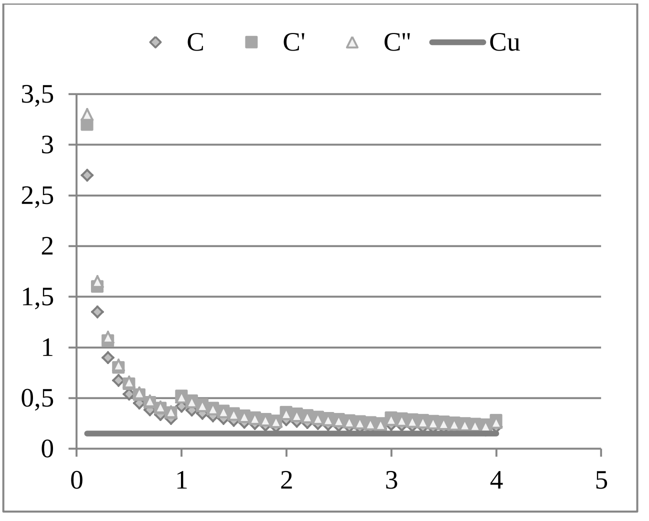


Figura 17. Técnica gráfica: comparación de costes medios por pasos.

Hasta aquí hemos considerado diferentes tipos de tarifas donde varían los parámetros c_e y c_u y la forma de considerar el tiempo de llamada (por segundos o por pasos). Creemos que las tarifas analizadas son suficientemente representativas, de modo que, aunque existen otras posibles tarifas, pueden considerarse como combinaciones de las tarifas ya analizadas con las tres técnicas expuestas.

4. Análisis y conclusiones

A continuación abordaremos cada uno de los tres objetivos del estudio propuestos en el apartado 1.

4.1. Arborescencia del REI

El análisis de los modelos matemáticos que permiten buscar elementos de respuesta a la elección de tarifa de telefonía móvil, descrito en el apartado 3, nos permite prever algunas de las cuestiones posibles, las técnicas que pueden utilizarse para abordarlas, y las relaciones que pueden establecerse entre ellas. Las experimentaciones nos permiten contrastar el modelo praxeológico *a priori*, estudiando la posible arborescencia del REI.

En este caso, por ejemplo, no estaba previsto en el modelo praxeológico *a priori*, la consideración del $C_m(t)$, que se incorporó tras el desarrollo de la primera experimentación del REI. Del mismo modo, en esta primera experimentación decidieron desarrollar un informe comparativo entre compañías —con la consideración del $C_m(t)$ a partir de diferentes c_u para diferentes intervalos horarios—, que tampoco estaba previsto y que sigue mostrándonos la posible arborescencia del REI.

En cambio sí estaba previsto el estudio del efecto de la modificación del c_e, que no fue abordado en esta primera experimentación porque no lo consideraron necesario debido a que en la realidad el c_e coincidía en todas las tarifas.

En la segunda experimentación se decidió estudiar la influencia de la variabilidad del c_e y se desarrolló un *trabajo de la técnica* más completo en relación con la función coste de la llamada. Consideraron gran cantidad de valores para el c_u y el c_e, con y sin cobro del primer minuto completo, con y sin cobro del resto del tiempo por pasos (con la comparación de un total de 21 tarifas diferentes). Además, se estudió cuál debería ser el c_u de una tarifa con función afín para que coincidiera en el coste de una tarifa con función definida a trozos en determinados valores de t (en los extremos izquierdo o derecho de cada fragmento, o el centro de cada fragmento, o para los t múltiplos de un valor).

En ambos grupos, los modelos incluyeron, en la fase final, la consideración del coste de los SMS y el IVA, así como de otros factores que podían afectar a la elección: el consumo mínimo exigido, la necesidad de que se tratara de móvil de tarjeta (para limitar el consumo mensual), que fuera necesario considerar, en los contratos familiares, el consumo de los diferentes miembros de la familia para que en el global fuera la más rentable, etc.

Además, dado el constante cambio que presentan las tarifas de telefonía móvil, sería necesario ir (re)analizando los posibles modelos matemáticos implicados. Por ejemplo, actualmente no existe la tarificación por pasos en las llamadas de voz. Sin embargo, la tarificación por pasos sí se utiliza, en telefonía móvil, para el consumo de datos de internet.

Por otro lado, cada vez existe más información en la web sobre comparativas de tarifas que se incorporarían como *respuestas de los media* al proceso de estudio.

También sería interesante analizar en qué medida los modelos construidos para dar respuesta al sistema de servicios de telefonía móvil pueden ampliarse a otros sistemas de tarificación, como el de energía eléctrica, el de gas natural, etc.

4.2. Razón de ser de las representaciones gráficas

El REI ha permitido hacer vivir en el aula el valor funcional de las representaciones gráficas. El uso de los gráficos ha mostrado su razón de ser en la comparación de funciones —en especial cuando existen varias tarifas o trozos a comparar o cuando no se conoce la expresión algebraica, como en el caso de la función definida a trozos—, así como para mostrar a otros el funcionamiento de una función-tarifa de un modo claro y sencillo.

Las gráficas han sido utilizadas tanto para contrastar información previamente obtenida con técnicas aritméticas o algebraicas como para obtener información, a partir de su interpretación, que posteriormente se contrastaba y/o complementaba con otras técnicas.

Se ha podido comprobar cómo, en el discurso tecnológico que ha caracterizado la praxeología local desarrollada en el proceso de estudio, ha preponderado la *función explicativa* (por qué la técnica es correcta, pertinente y eficaz), frente a la función justificativa (que cada técnica sirve para lo que tiene que servir y da el resultado que tiene que dar). El no privilegiar una técnica como la manera evidente de resolver las tareas de un tipo en cuestión, ha favorecido que se hayan analizado las limitaciones de unas frente a otras y que queden patentes así sus razones de ser.

4.3. Dispositivos de estudio que han favorecido el desarrollo del REI

Los *dispositivos de estudio* que han favorecido el desarrollo del REI serán analizados en términos de los *gestos didácticos* que permiten afrontar adecuadamente las *dialécticas* que propone Chevallard (2004, 2006, 2007, 2009, citado por Barquero, 2009).

La cuestión generatriz se mostró de gran interés y con gran riqueza arborescente, mostrando, en relación con la *dialéctica de circunscribirse y salir del tema*, la necesidad de, cuando la cuestión es tomada en serio, tener libertad para salirse del tema o incluso salirse de la disciplina de referencia. Los alumnos, por ejemplo, desarrollaron un importante trabajo para utilizar un lenguaje adecuado —expresión y ortografía—. También profundizaron en el manejo de Excel y del espacio web (cómo comprar un dominio, qué tipo de información puede publicarse y cómo). E incluso estudiaron sobre marketing, analizando qué tipo de técnicas podían utilizar para hacer más competitivas las compañías y cómo exponer la información en el espacio web para que fuera atractivo y útil para los usuarios.

En relación con la *dialéctica del individuo y el colectivo*, el REI ha permitido que el grupo funcionara como una comunidad de estudio. Los estudiantes asumieron la responsabilidad de búsqueda de respuestas a la cuestión, y esto especialmente a partir de la propuesta por parte de los alumnos de crear de una web para los usuarios de telefonía móvil y de confirmar que no existía nada semejante en la red. Sin embargo, fue el profesor el que tuvo que ir reduciendo su tendencia a dirigir el proceso, sobre todo en relación con la planificación —organización de tareas, distribución de grupos—, debido a que lo asumía como responsabilidad del que enseña en vez de considerarlo parte del estudio de la cuestión del mismo modo que la elección de las técnicas, la evaluación o la síntesis, por ejemplo.

Así, la *dialéctica de las preguntas y las respuestas* fue claramente dirigida por los alumnos, determinando, a partir del análisis de sus propias necesidades, las cuestiones que sería necesario abordar para satisfacerlas. En este sentido, la libertad de no tener que abordar unos determinados contenidos y/o procedimientos, permitió que los alumnos se responsabilizasen del estudio de la cuestión, dado que el profesor no tenía que limitar las cuestiones y su forma de abordarlas a unos determinados contenidos que hubiera que tratar. Por eso, creemos que un currículo organizado en torno a cuestiones que se deben estudiar, en vez de contenidos o procedimientos a tratar, favorecería que éstas pudieran ser tomadas en serio por los alumnos.

El objetivo del espacio web mantuvo viva y abierta la cuestión sesión tras sesión y favoreció una correcta *dialéctica de la recepción y difusión de respuestas*, de carácter claramente *antimonumentalista*. Los alumnos, organizados en grupos con diferentes roles que ellos mismos asignaban en función de los objetivos, se responsabilizaban de sus respuestas y defendían su validez frente a las de otros en función de la justificación de su utilidad y fiabilidad. La creación del espacio web favoreció también la necesidad de sintetizar la información de un modo claro y conciso.

Para el desarrollo del REI, debe producirse una adecuada *dialéctica de los medios y los media*. Los *media* puestos en juego fueron tanto sus conocimientos y apuntes de clase como, sobre todo, la información encontrada en internet. Así, encontramos, con carácter recursivo, una modelización inicial del sistema que se fue modificando con las respuestas disponibles en los media, produciéndose respuestas provisionales que los alumnos se encargaban de contrastar y validar de modo contante.

El carácter *no-didáctico* del *medio* y el propio interés de los alumnos hicieron que las respuestas fueran validadas por su propia experiencia y por la contrastación entre grupos de trabajo de la comunidad de estudio.

A un nivel más concreto, por ejemplo, las expresiones algebraicas fueron utilizadas, cuando se conocían, para justificar los resultados al surgir errores. Excel fue utilizado, a su vez, para comprobar la validez de expresiones algebraicas propuestas y de las fórmulas utilizadas para crear la gráfica de cada función-tarifa.

En relación con la completitud de las praxeologías construidas, en las que se debe considerar también el adecuado desarrollo de cada uno de los *momentos de estudio* (Bosch, Fonseca y Gascón, 2004), en el REI se pudo observar una importante dedicación al momento de la *justificación*, al de la *evaluación* y, especialmente, al del *trabajo de la técnica*.

Los alumnos se percibieron gradualmente como expertos en relación con la cuestión abordada, desarrollando un extenso trabajo de la técnica previo al análisis de tarifas reales, durante el cual iban analizando los diferentes tipos de variables implicados en el coste de la tarifa. Asumieron así la responsabilidad tanto de la evaluación, como de la justificación—que surgió al tener que exponer a otros el trabajo realizado y explicar por qué se había hecho así y no de otro modo (qué comparaciones se habían realizado, por qué, qué técnicas se habían utilizado y por qué).

Para la evaluación de la capacidad de transferencia de los aprendizajes, se utilizó una prueba final individual escrita en ambas experimentaciones. En ella debían comparar tarifas de telefonía fija a partir de la información real que se les facilitaba y que aparecía de forma confusa (unos precios en céntimos y otros en euros, organizados de modo diferente para cada tarifa). Estas tarifas, además, incluían «bonos». La media de los dos grupos fue de 8,5 y 8,25 sobre 10.

Finalmente, cabe preguntarse si los profesores deberían ser los responsables de diseñar y experimentar los REI. Creemos que deben ser los investigadores en didáctica, en colaboración con los profesores y los demás sectores de las instituciones educativas, los que desarrollen REI, estudiando su estructura y dinámica posibles, así como las condiciones que favorecen su adecuado desarrollo y las restricciones que dificultan su integración en el actual sistema de enseñanza de las matemáticas.

Agradecimientos

Financiado por el proyecto EDU2012-39312-C03-02 *La modelización matemática en la formación del profesorado de Infantil y Primaria en matemáticas y en ciencias naturales*.

Referencias

Barquero, B. (2009). *Ecología de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las matemáticas* (Tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona, España.

Bolea, P. (2003). El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares. En *Monografía del Seminario Matemático García de Galdeano, 29*. Zaragoza, España: Universidad de Zaragoza.

Bosch, M., Fonseca, C. & Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en didactique des mathématiques, 24*(2-3), 205-250.

Chevallard, Y. (1989). *Arithmétique, algèbre, modélisation. Étapes d'une recherche.* Marsella, Francia: IREM d'Aix-Marseille.

Chevallard, Y. (2004, mayo). *Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire*. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=45

Chevallard, Y. (2005). La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire : transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire. En C. Ducourtioux & P.-L. Hennequin (Eds.), *La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire* (pp. 239-263). Paris: APMEP et Animath.

Chevallard, Y. (2011). La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. En C. Margolinas et al. (Eds.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp. 81-108). Grenoble: La pensée sauvage.

García, F. J. (2005). *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales* (Tesis doctoral). Universidad de Jaén, España.

García, F. J., Gascón, J., Ruíz, L. & Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38*(3), 226-246.

Rodríguez-Quintana, E. (2005). *Resolución de problemas, metacognición y enseñanza de las matemáticas: una visión integradora desde el enfoque antropológico* (Tesis doctoral). Universidad Complutense de Madrid.

Ruiz-Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional* (Tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona, España.

Serrano, L. (2013). *La modelización matemática en los estudios universitarios de economía y empresa: Análisis ecológico y propuesta didáctica* (Tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona, España.

Sierra, T. A. (2006). *Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas: Los sistemas de numeración y la medida de magnitudes* (Tesis doctoral). Universidad Complutense de Madrid.

Contextualization in teaching physics through instruments of educational robotics: analysis of activities by “verisimilar praxeologies”

Milton Schivani

Dpto. de Ciência Exatas e Tecnológicas (DCET),
Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC), Brasil.

Maurício Pietrocola

Dpto. de Metodologia do Ensino e Educação Comparada,
Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo (FEUSP), Brasil.

Resumen. La idea de una enseñanza de la física contextualizada está cada vez más presente en el discurso de los profesores y educadores, reforzada también por los documentos oficiales del Ministerio de Educación de Brasil. Buscamos promover secuencias didácticas que podrían contribuir a lograr este proceso mediante el uso de las herramientas disponibles en robótica educativa. Basándonos en la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) se crea la noción de «praxeología verosímil » para analizar de una manera estructurada y organizada los elementos praxeológicos realmente explorados en las secuencias didácticas.

Résumé. L’idée d’un enseignement de la physique contextualisé est à chaque fois plus présent dans le discours des professeurs et des éducateurs, et elle est aussi renforcée par les documents officiels du ministère de l’Éducation du Brésil. Nous cherchons à promouvoir des séquences didactiques qui pourraient contribuer à réaliser cette contextualisation par le biais d’outils disponibles en robotique éducative. Basée sur la théorie anthropologique du didactique (TAD), nous proposons la notion de « praxéologie vraisemblable » pour analyser de façon structurée et organisée quels sont les éléments praxéologiques qui interviennent de fait dans de telles séquences didactiques.

Abstract. The idea of a contextualized physics education is increasingly present in the discourse of teachers and educators, reinforced also by the official documents of the Ministry of Education of Brazil. We seek to promote didactic sequences that assist the realization of this process by means of instruments available in educational robotics. Based on the anthropological theory of the didactic (ATD) the notion of “verisimilar praxeology” is created to analyze in a structured and organized way which praxeological elements are in fact operated in such didactic sequences.

IV[e] congrès international sur la TAD (Toulouse, 21-26 avril 2013)
Axe 2. *L’analyse praxéologique comme outil de l’analyse et de l’ingénierie didactiques*

Schivani, M. & Pietrocola, M. (2017). Contextualization in teaching physics through instruments of educational robotics: analysis of activities by “verisimilar praxeologies”. Dans G. Cirade et al. (Éds), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l’école et dans la société* (pp. 453-465). https://citad4.sciencesconf.org

1. Introduction

The idea of a contextualized physics education is increasingly present in the discourse of teachers and educators, also reinforced by the official documents of the Ministry of Education of Brazil, becoming one of the targets of most curricula (2000, 2002). In general, among the many facets of contextualization discussed these scenarios are: the approach of school knowledge to the daily life of students; as a motivator of learning; prerequisite for promoting interdisciplinarity; reflection on the transformations undergone by school knowledge (Ricardo, 2011).

One of the questions that arise is how to promote didactic activities that really help to accomplish this process? What materials and methodological strategies should be used?

The growing increase of the resources and technological innovations is allowing further situations of teaching and learning and among them should be highlighted the instruments present at Educational Robotics (ER) (Papert, 1993; Li et al., 2009; Frangou et al., 2008; Ruiz-del-Solar & Avilés, 2004). The robotics in the educational setting, particularly in the teaching of physics, can be thought of as a set of dynamic tools, capable of positively influencing the learning process in different situations and levels of education. Several studies have shown the possibility to develop abilities such as logical problem solving and mathematicians as well as work creative processes, enrich critical thinking and promote scientific alphabetization (Chalmers et al., 2012; Cabral, 2011; Church et al., 2010; Mitnik et al., 2009; Barak & Zadok, 2009; Lowe et al., 2008; LaCombe et al, 2004).

Our hypothesis is that material of this nature potentiates the insertion of a wide range of real contexts in the development of activities and issues, and also at different levels of the formal education process, from Elementary School to the Technical and Higher Education. Robotics kits may use fitting pieces of hard plastic in the form of girders, full bricks, plates, shafts, pulleys and gears with different dimensions and passive of connections between them, beyond software, processing modules and sensors (e.g. magnetic field, accelerometer, ultrasonic and rotation; Church et al., 2010; Barak & Zadok, 2009). Thus, it is possible to create several constructions (vehicles, androids, houses, drawbridges, freight elevators, machinery so on.), increasing the "mimicry" of a wide range of "real" contexts. We also highlight that all this can be realized by making use of the same set of pieces or kit, reducing the cost of new mountings (LaCombe et al, 2004).

On the other hand, there is the risk of not knowing how to pedagogically adapt this material (educational robotics), which can generate activities that reinforce an only limited use of techniques to accomplish specific tasks, without actually having a concern with learning conceptual content. As emphasize Mitnik et al (2009), most of the activities developed with robotics kits are directed to the treatment of contents very intimately related to the robotics, such as programming, construction of robots, artificial intelligence or the construction and development of algorithms. With this, one runs the risk of focusing precisely on the most "controllable" part of the innovation, i.e., in its technical dimension, restricting the teaching and learning of the students to the processes involved in the assembly and operation of robots. We would be in a situation with a pretense of contextualization but serving merely as an illustration, with no didactic purposes.

It is worth mentioning that we are dealing here with a genuine didactic contextualization aim in the perspective presented by Ricardo (2011). In this perspective the contextualization must not merely reduce the social aspects of science education on a physical space known to the students, but worry about breaking with the traditional practices of teaching, so that reality is perceived as an object of reflection, in the expectation that the knowledge taught is meaningful to the student, to the extent that can be mobilized in contexts outside the school walls (Ricardo, 2011, p. 37-38).

So how can we analyse activities or didactic sequences that make use of these instruments to fathom how many of them dialogue (or not) with the situation you want to contextualize? This also implies to analyse how much is being contemplated (or not) the didactic intention in this activity.

This is why we aim to essentially promote the analysis and development of activities that, minimally, have a resonance between the practice ("do") and the theories and concepts ("why do this way"), as well as evaluate the aimed and/ or achieved level of contextualization.

To achieve these objectives, we based our investigation in the anthropological theory of the didactic (ATD) (Chevallard, 1999), which enables you to model the knowledge through the notion of "praxeological organization" (PO).

2. Praxeological organization (PO)

This PO is expressed by the set of symbols referenced formally by [T / τ / θ / Θ], where T is the *type of tasks*, which can branch in numerous *tasks* [t]; τ represents the *technique*; θ refers to the *technology* and Θ to the *theory* on the technique. This PO is posited as an "organization" that gives two distinct, but correlated blocks: the *practical-technical* block, which can be understood as the know-how, and *technological-theoretical* block, linked to knowledge, or rather a logic discourse that justifies and understands the practical-technical block (Chevallard, 1999).

In accordance with ATD, a *task* evokes an action, a way of doing something, thus making the *practical-technical block* a *praxeological organization*. In the context of robotics, understanding the concept of *task* is very important, since the activities, even if they are dealing with a single physical phenomenon or concept may require an extensive set of "do", since the assembly of robots needs programming and calculation of physical magnitudes into play and an appropriate use of sensors and processing modules.

A praxeology related to T (task) requires a way to do solve $t \in T$. This is called a *technique* [τ]. Thus a *technique* is a direct reference to a particular way of accomplishing $t \in T$. A technique τ makes sense only when connected to a task. For example, to perform the task *"calculate the speed of the vehicle in Rectilinear Uniform Motion (RUM)"*, one can make use of various techniques to collect the necessary data, since the use of ultrasound sensors or movement, to the use of chronometers for obtaining experimental time "spent" moving a specific distance in RUM.

Technology [θ] is seen as a rational discourse that seeks to explain and clarify a determined technique that justifies its use and/or efficiency. It can also promote, where possible, the emergence of new techniques [τ_1, τ_2, ...]. Thus, θ is aimed at the triad: Justification – Explanation – Production of new techniques (Chevallard, 1999). A technology in general is always underpinned by a theory [Θ], understood as a broader discourse that serves to interpret and justify the technology.

In terms of contextualization to support the teaching of physics education through robotics, we realize that the notion of *praxeological organization* can help highlight and interconnect the practical-technical block with the technological-theoretical block between didactic activity and social practice as a reference.

We are not only interested in the execution of a particular task by itself, nor solely focused on the ludic aspect. Our intention is to show that robotics offers a means of producing situations of teaching and learning through tasks much closer to those present in real situations of daily life. For this, we developed the notion of "*verisimilar praxeology*" presented below.

3. Verisimilar praxeology (VP)

Essentially, the concept of *verisimilar praxeology* (VP) would refer to the set that contains the praxeological constituents identified in the PO social practice of reference, i.e., a human activity embedded in a real situation (which is the basis of the contextualization), compared with the set containing the praxeological constituents identified in the didactic PO that intends to contextualize the social practice of reference. The illustrations below (figure 1 and figure 2) can provide more clarity about this notion.

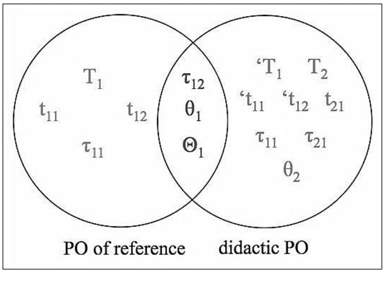


Figure 1. Verisimilar praxeology by intersection.

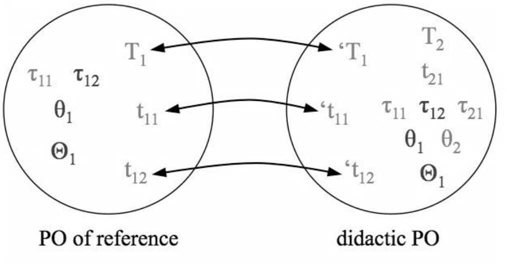


Figure 2. Verisimilar praxeology by correspondence.

The figure 1 presents a situation of *Verisimilar Praxeology* when occurs the existence of an intersection of two sets. In this case, we note the existence of a theory, a technology and a technique contained both in the PO of reference as in the didactic PO. However, if a particular praxeological element, a task or type of tasks, for example, is not identical to the two sets but has one similarity, we can say it is a *verisimilar praxeology* by correspondence (figure 2).

Thus, one can fathom in a structured and organized praxeology which praxeological elements are in fact exploited in the didactic sequence that aims to deal with a contextualization in school. In other words, one can fathom which tasks, techniques, technology and/ or theories identified in the social practice of reference that support the contextualization, are perpetuated in the didactic sequence.

We thus seek to evaluate the degree of verisimilar praxeology (VP) contained in a didactic sequence that makes use of instruments from educational robotics and that intends to contextualize a particular social practice of reference.

4. Methodological aspects

The investigated context refers to the transport of loads making use of small forklifts, common in supermarkets' wholesalers and material construction stores. The didactic sequence relates to the framework developed by the *Center for Research on Curriculum Innovation* (NUPIC[1]) in partnership with *Lego Education of Brazil* (Lego ZOOM[2]) (Pietrocola et al, 2009). For the construction of the forklift in a didactic situation, the kit of robotics *Lego Mindstorms NXT*[3] is used

Both the analysis of the social practice of reference (in this case, transporting cargo through a forklift) and the didactic activity (forklift) require a systematic organization in order to recognize the main praxeological constituents (T, τ, θ and Θ). We therefore developed a conceptual map (Novak & Cañas, 2008), which allows a more profound and subtle approach to determine these praxeological constituents.

> Concept maps are graphical tools for organizing and representing knowledge. They include concepts, usually enclosed in circles or boxes of some type, and relationships between concepts indicated by a connecting line linking two

1. http://www.nupic.fe.usp.br. Accessed on December 1, 2012.
2. http://www.legozoom.com. Accessed on December 1, 2012.
3. http://mindstorms.lego.com/en-us/default.aspx. Accessed on December 1, 2012.

> concepts. Words on the line, referred to as linking words or linking phrases, specify the relationship between the two concepts. We define concept as a perceived regularity in events or objects, or records of events or objects, designated by a label. The label for most concepts is a word, although sometimes we use symbols such as + or %, and sometimes more than one word is used. Propositions are statements about some object or event in the universe, either naturally occurring or constructed. Propositions contain two or more concepts connected using linking words or phrases to form a meaningful statement. Sometimes these are called semantic units, or units of meaning. (Novak & Cañas, 2008).

This graphical tool was originally developed to analyse the conceptual representations established by students about topics in primary school science (Novak & Musonda, 1991). However, today its use is varied and used in several sectors (Novak & Cañas, 2010), since computing and software engineering to the use "in corporations to help teams clarify and articulate the knowledge needed to solve problems ranging from the design of new products to marketing to administrative problem resolution." (Novak & Cañas, 2008, p. 16).

Figure 3 presents a conceptual map developed with the aim of answering what are the main components and physical principles governing the operation of an electric forklift and how is the cargo transportation assured? Already the concept map shown in figure 4 indicates how the didactic activity (forklift) is structured in relation to the assembly and to the main physical concepts dealt with?

5. Results and discussion

The two conceptual maps developed (figures 3 and 4) indicate some praxeological elements common to both situations, pointing to aspects of *verisimilitude*. For example: it is clear that there's a need for a support point (fulcrum) and a counter weight (composed of the motors and batteries) positioned at a certain distance from the fulcrum (located on the axis that makes the front wheels) for the correct operation of the forklift and safe transport of the cargo. This is identified both in the PO of the social practice of reference (figure 3) and in the didactic PO (figure 4).

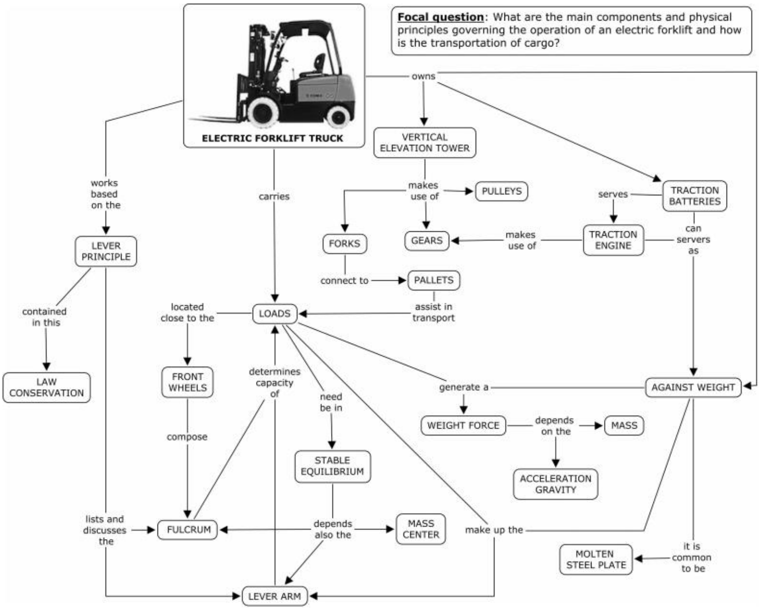


Figure 3. Conceptual map relating the main structural and conceptual aspects from PO of the social practice of reference.

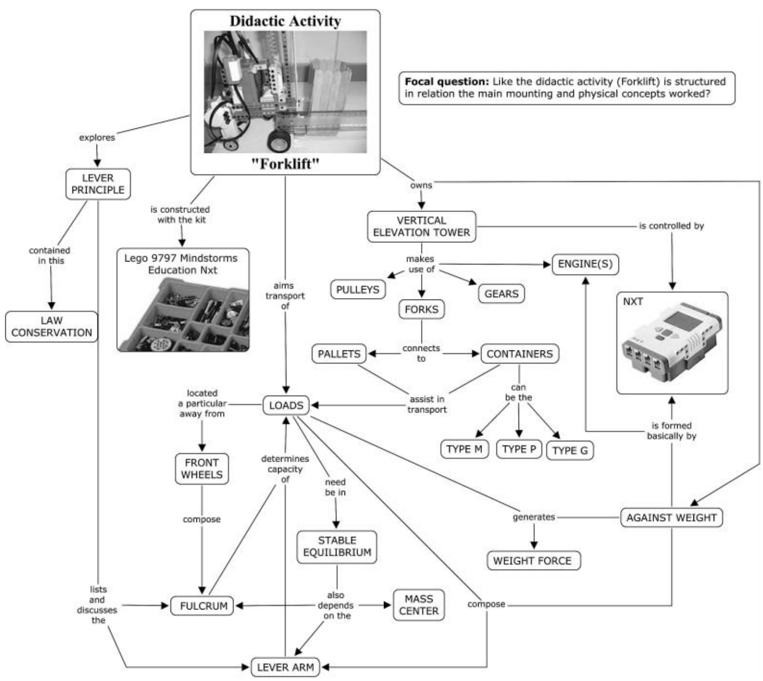


Figure 4. Conceptual map relating the main structural and conceptual aspects identified in the didactic PO.

We can now identify the existence of a single technique (τ) to accomplish the same task type (T) (transport of the cargo). The comprehension of this technique, in terms of the technology (θ), involves the understanding of the concept *moment of a force* by means of the *lever principle*. We then identify a verisimilar praxeology by intersection, with the type of tasks, technique and technology common in both POs. On the other hand, despite having the same type of tasks (T_3, see table 1), the didactic PO also contains tasks and techniques which have only one similarity with the PO of reference, for example the own development and construction of a forklift by making use of a robotics kit, thus corresponding to what is called VP by correspondence.

Depending on the didactic intention of the teacher to explore that context through the educational robotics, it is still possible to discuss conservation laws, i.e. the theory (Θ) that enables to better understand and justify the technology (lever principle). However, the analysis of the identified didactic PO (figure 4), we note we cannot advance the same in terms of deepening the discussion of the technological-theoretical block, since it leaves out the element Θ (theory), in other words, it does not discuss the conservation law despite the fact that this energy is contained in the lever principle.

Through the law of conservation of energy we can identify the element Θ, because while the counterweight of the forklift performs work (in the social practice of reference in the didactic activity) – applying a force weight over one end of the lever arm responsible for potency –, the other end performs work on the cargo, maintaining the forklift in stable equilibrium.

Despite the lack of deepening of the discussion concerning the theory Θ, we can see that the contextualization did not reduce the social aspects of science education to the physical space proximal to the students; in fact, it introduced elements that were explored in the didactic activity within a verisimilar praxeology. The greater the number of praxeologically similar elements between the context and the didactic activity, the greater the degree of verisimilitude will be.

The educational robotics in that case favored control and change variables to discuss the lever principle, for example, changing the distance between the center of mass of the load and the fulcrum and increase the load capacity to be transported. It is interesting to note that the activity can thus have a more investigative character, and that the challenge proposed happens to be in reduced scale: in safely transporting boxes of different sizes containing small glass balls. Beyond the cargo transportation, the didactic PO still involves other types of tasks, as well as their techniques and technologies (see table 1 and table 2).

Types of tasks (*T*)	**Tasks (*t*)**
T_1 – Construct a forklift.	t_1 – Construct a forklift with a tower of elevation to carry a given load (small glass balls).
T_2 – Programming the processing module.	t_2 – Program the processing module to activate the movement of the elevation tower and forklift.
T_3 – Transporting cargo.	t_3 – Transporting a certain number of balls with the Forklift in three different situations: with container type P, M and G.
T_4 – Analyze the maximum load supported by the forklift.	t_{41} – Verify experimentally that the maximum load to be transported by container type M and G.
	t_{42} – Investigate the relationship between cargo capacity and cargo center.

Table 1. Activity “forklift” in terms of types of tasks and tasks.

Tasks (*t*)	**Technique (τ)**	**Technology (θ)**
t_1	τ_1 – It is used the kit from Lego Mindstorms NXT following the manual mounting which, in turn, presents step-by-step the schemas of installation and fittings. Used motors, battery and NXT own to serve as a counterweight.	θ_1 – *Moment of a force*.
t_2	τ_2 – Software is used *NXT Mindstorms 2.0* to development of programming, which, in turn, is previously provided by the instructor, the student leaving only enter the program in NXT composing the structure of the forklift.	θ_2 - Computational Logic Programming
t_3	τ_3 – Supporting the container in “fork” of the forklift, varying the distance between the fulcrum (support point) the center of mass of the load (determined by the container size and distribution of the load), thus configuring the *lever arm*.	θ_3 - Adoption of the *lever principle.*
t_{41}		
t_{42}	τ_4 – Construction of a graph “Cardo Capacity X Cargo Center”, based on the data from t_3 and t_{41}.	θ_4 - Mathematical Functions and Graphs.

Table 2. Activity “forklift” in terms of techniques and technologies.

6. Final considerations

The anthropological theory of the didactic proved a strong ally in the initiative to better show the structure and dynamics of activities contained in educational robotics. This was done in terms of types of tasks, techniques, technologies and theory.

The educational robotics, especially when facing the teaching of physics, allows in fact a broad approach that can encompass all constituents that praxeologies comprise, which however is not enough. It is also necessary to pay attention to the know-do without forgetting the logical discourse that permeates and helps in understanding this know-do, plus, of course, the appropriate times and specific approach of study. Thus, the context is not lost in an activity that could be considered as empty and “alienated”, with no direct correlation with the phenomenology to be contextualized.

Our research involves analyses that are yet in development of other activities and contexts, such as electricity generation, barcode and radar. However, preliminary studies offer good clues to guide the next steps. Summarized, we find that the ATD, especially with respect to its structural component (the notion of praxeology), shows up as a potentially appropriate theoretical tool to understand the limits and possibilities of robotics in situations involving tasks that require specific knowledge of physics, especially to highlight praxeological elements that actually are explored in PO teaching that seeks to contextualize a given phenomenology and/ or human activity.

References

Barak, M. & Zadok, Y. (2009). Robotics projects and learning concepts in science, technology and problem solving. *International Journal of Technology and Design Education, 19*(3), 289-307.

Cabral, C. P. (2011). *Robótica educacional e resolução de problemas: Uma abordagem microgenética da construção do conhecimento*. (Dissertação Mestrado). Porto Alegre, Brazil: Faculdade de Educação da UFRGS.

Chalmers, C., Chandra, V., Hudson, S. M. & Hudson, P. B. (2012). Prospective teachers teaching technology and building aspirations with robotics [author’s versión]. In. *Going for Gold!* Reshaping teacher education for the future, Australian Teacher Education Association (ATEA), Adelaide, S. Aust.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques, 19*(2), 221-266.

Church, W., Ford, T., Perova, N. & Rogers, C. (2010, March). *Physics with robotics: Using Lego® Mindstorms® in high school education*. Paper presented at the Association for the Advancement of Artificial Intelligence (AAAI), Spring Symposium Series, Stanford University, California.

Frangou, S. et al. (2008). Representative examples of implementing educational robotics in school based on the constructivist approach. In *Workshop Proceedings of SIMPAR 2008* (pp. 54-68).

Li, L.-Y., Chang, C.-W. & Chen, G.-D. (2009). Researches on using robots in education. In M. Chang, R. Kuo, Kinshuk, C. Gwo-Dong & M. Hirose (Eds.), *Learning by playing. Game-based education system design and development* (pp. 479-482). Springer.

Lowe, M., Moore, H., Langrall, E. & Gehrman, C. (2008). Robots in the introductory physics laboratory. *American Association of Physics Teachers*, *76*(10), 895-902.

Ministério da Educação e dos Desportos (2002). *Orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais (PCN+ – Ensino Médio)*. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. MEC; SEMTEC, Brasília.

Ministério da Educação e dos Desportos (2000). *Parâmetros curriculares nacionais (ensino médio)* - PCNEM. Parte III, Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. MEC; SEMTEC, Brasília.

Mitnik, R., Recabarren, M., Nussbaum, M. & Soto, A. (2009). Collaborative robotic instruction: A graph teaching experience. *Computers & Education*, *53*(2), 330-342.

Novak, J. D. & Musonda, D. (1991). A twelve-year longitudinal study of science concept learning. *American Educational Research Journal*, *28*(1), 117-153.

Novak, J. D. & Cañas A. J. (2010). The universality and ubiquitousness of concept maps. In J. Sánchez, A. J. Cañas & J. D. Novak (Eds), *Concept* *maps: Making learning meaningful*. *Proc. of Fourth Int. Conference on Concept Mapping*.

Novak, J. D. & Cañas, A. J. (2008). *The theory underlying concept maps and how to construct and use them. Technical Report IHMC 2006-01 Rev 01-2008*. Pensacola, FL: Institute for Human and Machine Cognition.

Papert, S. (1993). *The children's machine: Rethinking school in the age of the computer*. Basic Books/HarperCollins.

Pietrocola, M. et al. (2009). Ensino Médio: Máquina e Equilíbrio. *4º Fascículo do Aluno da Revista de Educação Tecnológica LEGO ZOOM, 4*. Curitiba, PR, Brazil: Zoom Editora Educacional.

Ricardo, E. (2011). Problematização e contextualização no ensino de Física. In A. M. Pessoa de Carvalho et al. (Eds.), *Ensino de Física. Coleção ideias em ação* (pp. 29-47). São Paulo, Brazil: Cengage Learning.

Ruiz-del-Solar, J. & Avilés, R. (2004). Robotics courses for children as a motivation tool: the Chilean experience. *IEEE Transactions on Education*, *47*(4), 474 – 480.

LaCombe, J., & Wang, E., & Rogers, C. (2004, June). *Using Lego® Bricks To Conduct Engineering Experiments*. Paper presented at 2004 Annual Conference, Salt Lake City, Utah. https://peer.asee.org/13880

Practicing the rule of three at school

Denivaldo Pantoja da Silva and Renato Borges Guerra
Institut of Scientifc and Mathematics Education,
Federal University of Pará, Brazil

Resumen. Este trabajo trata de la práctica de la regla de tres desde de la noción de praxeologías con las matemáticas, propuesta por la teoría antropológica de lo didáctico, desde de lo cuestión de si es o no proporcionalidad como la base de estas prácticas. La investigación muestra que lo atomismo de lo enseñanza de la regla no se da por la ausencia de organizaciones matemáticas locales y adelante hipótesis de investigación sobre las condiciones de las diferentes vidas de esta práctica la convivencia en la escuela, en línea con el plan de estudios de la escuela brasileña.

Résumé. Ce travail étudie la pratique de la *règle de trois* en s'appuyant sur la notion de praxéologie (mathématique) proposée par la théorie anthropologique du didactique (TAD), et en questionnant la pertinence du modèle proportionnel dans les situations considérées. La recherche montre que l'atomatisation de l'enseignement de cette règle ne dépend pas de son inclusion dans une organisation mathématique locale sur la proportionnalité. Nous présentons ensuite des hypothèses de recherche sur les conditions d'existence de cette pratique qui vit à l'école, en lien avec le curriculum scolaire brésilien.

Abstract. This paper deals with the practice of the rule of three viewed from the notion of praxeology in mathematics, proposed by the anthropological theory of the didactic, and from the question of the necessity or not of the proportionality as basis of these practices. Research shows that the atomism of the teaching rule is not given by the absence of local mathematical organizations and forward hypotheses of investigation about the different conditions of the different lives of this practice that lives together in the school in line with the Brazilian school curriculum.

IV^{e} congrès international sur la TAD (Toulouse, 21-26 avril 2013)
Axe 2. *L'analyse praxéologique comme outil de l'analyse et de l'ingénierie didactiques*

Silva, D. P. da. & Guerra, R. B. (2017). Practicing the rule of three at school. Dans G. Cirade et al. (Éds), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* (pp. 467-479). https://citad4.sciencesconf.org

1. Introduction

The practices of the rule of three at Brazilian schools, characterized by a mechanical and punctual procedure have attracted the interest of mathematicians such as Ávila (1986a, b) and Lima (2001) that exert a relative influence in the Brazilian basic education.

Ávila (1986a, b) proposes the replacement of the rule of three teaching by practice of proportionality through equations from relationships among numbers, which would eliminate the discomfort of treating relationships between quantities, while for Lima (2001) it is necessary to identify, by a simple criterion, proportionality emphasizing that the rule of three can only be legitimately used when you have a proportionality.

In both cases, the rule is included in the proportionality study according to the mathematical normative practice that conflicts with the practices of the rule of three in the schools that sometimes assume proportionality as technology, sometimes as naturalized practice in different social practices in which proportionality is not explicitly or implicitly at stake. From this conflict between the rule of three practices of mathematics institutions and other dominant ones at school, arises an inevitable question: *if there is necessity to justify the practice of the rule of three through the proportionality in the teaching of mathematics subjects?*

This question, in a way, is shared by many researchers with the anthropological theory of the didactic (ATD), including Bosch (1994) and Bolea (2003) in a non-problematic way since they take epistemological models of reference from the mathematical knowledge and, consequently, bringing the confinement of it, one way or another, in the universe of proportionality.

In a specific way, we seek to understand the rule of three as practice of different fields of practices, and therefore we refer to mathematical praxeologies in the sense given by Chevallard (2005) for the praxeologies that articulate and integrate non-mathematical practices, which, however, work as such one. More specifically, we assume that the rationality style at stake varies in accordance with the institutional space, so that a rational in a certain institution may appear as less rational in another one. (Chevallard, 1999, p. 224)

So the praxeological model of ATD allows us to realize the practices of rule of three in Brazilian basic school as praxeologies included in the mathematics of the school, and also permit us to consider them as social practices, in the sense given by Miguel and Mendes (2010), as the history of their mobilization and their inclusion in school mathematics, as the following text extract permit us to reveal:

> ... the term *social practice* here means an intentional and coordinated group of actions that simultaneously mobilizes cultural objects, memory, affections, values and powers, generating in the people who carry out such actions the feeling, albeit diffuse, of belonging to a determined community. These actions are not chaotic or random precisely because we recognize in them cultural objects that have a history. This history is remembered only because the cultural objects which this practice mobilizes are still valued by at least one community which keeps this memory alive for a reason (p. 383).

In this sense, we can then presume that the teaching with practical emphasis of the rule of three would not be casual because within it are recognized cultural objects that have a history which would reveal the rule of three, for example, as a useful tool for dealing with routine and traditional day-to-day problems, or even as a participant in the history of construction of mathematical and scientific knowledge and also the teaching of mathematics, with particular relevance on the transition from arithmetic to algebra (Gómez, 2006; Bolea, 2003).

This can be seen, for example, through the use of the rule learned in 7th grade in the Brazilian basic school and in stoichiometry study in chemistry in high school, exposed bellow:

In general, when we have n_1 moles of the solute in m_2 grams of solvent, we can equate (Feltre, 2004, p. 30):

m_2 g of solvent	n_1 mol of solute
1000 g of solvent	w mol of solute

$$w = \frac{1000\, n_1}{m_2}$$

At the same grade level, in the same subject, used to treat Boyle’s Law, in the way as follows: When a given fixed portion of gas, at constant temperature, is subject to different pressures, the volume V of gas is inversely proportional to the pressure P, that is, $V = \frac{k}{P}$, the temperature and gas mass being constant, with k a proportionality constant (Trinidad & Pugliese, 1989, p. 121).

Otherwise, it seems that the situation forwards the action. Thus, it becomes necessary to seek, over time, the practices established under conditions that constrain these practices in the activities of specific groups which may allow building an understanding of these praxeologies with school mathematics.

2. The epistemology of using the rule of three

We assume the rule of three is used in practices that are meaningful in situations and consequently we see it as practices that are developed by subjects in praxeologies with mathematics in the sense of the subject who mobilizes objects and conventional relations of mathematics to achieve the activity in which it is inserted (Silva & Guerra, 2011); with ways of making and thinking that conform practices in which *proportionality*, for example, may be before *the rule of three* as an instituted mode of doing and teaching that would not be for the subjects "discovering" such relationship to put into equation.

This thinking emerges from the understanding that practices of different human activities may gain during the use and diffusion new transpositive comprehensions, because:

> the way that we interpret and carry out practices in different contexts varies from person to person, not just in their purposes, values, reasons, desires and interpretive resources, but also in the conditioning these contexts impose upon the realization of these practices. (Miguel & Mendes, 2010, p. 383)

Thus, the practice of the rule of three would be modelled by the context, more precisely, by the activities with mathematics and, in this sense, would not be restricted to the activities of mathematics, but also in other activities, including the school with its own ways of doing and thinking embedded in school tasks.

In this walk, we mobilize the history without chronological concerns, allowing us to point the rule as a social practice that is present at school due to have histories remembered by mobilizations of cultural objects in accordance with the social conventions of school mathematics.

For this, we start using Caunedo del Potro (2007), who highlights that all arithmetic production in the Western society of the 13th, 14th and 15th centuries appears closely linked to commercial revolution. Caunedo del Potro and Córdoba de la Llave (2004) point out that the work of merchants and craftsmen needed, besides reading and writings, to know the management of basic mathematical operations, not in philosophical or theoretical sense, but for ordinary use, practical and professional, as a way to perform the practices inherent in their activities.

In these activities the practice of the rule of three, which is called by philosophers the golden rule (Brooks, 1880 p. 330), is characterized as excellent in practical trade mathematics (Høyrup, 2007; Smith 1958; Garding, 1981) so indispensable in any book of arithmetic.

It is clear that practices of the rule of three also belonged to philosophers and members of mathematical activities with their conventions of use that were built and consolidated in experiences in these activities. Therefore, the needs of practices in different activities demanded their broadcasts in order to make them easier and safer to use in activities in which they were inserted, including for teaching. About this focus it is relevant to point out two aspects that are present in our issues.

The first one is the utilitarian rule, likely of Indian origin, as in Vedāngajyotisa, in a source from about 500 BC, in which it is prescribed that *The known result is to be multiplied by the quantity for which the result is wanted, and divided by the quantity for which the known result is given*‖ (Høyrup, 2007 p. 2), here is becoming clear the practical slant pattern "the multiplication first and the division afterwards."

Under this understanding, the rule gets other transpositions with the inclusion of the term *similar* with formulations such as "In the rule of three, argument, fruit and requisition: the first and last terms must be *similar*. Requisition, multiplied by the fruit, and divided by the argument, is the produce" (Høyrup, 2007 p. 5).

This practical understanding with inclusion of terms like similar overt, not similar, or others, have become standard in the Italian abacus and were present even in Arabic writings about Arab business transactions, reasserting the character of practical utility, doing it without theoretical concerns, for resolution of certain types of problems.

The second aspect is included in Arabic writings, and also in Ibero-Provençal writings, with probable influence of the first one, in which the rule, more generally, is derived independently if the magnitude is unknown, through proportionality. This practice shows transposed from others, according to the culture in which the activity was inserted, because:

> it is much more likely that the rule which we know from Italy and Ibn Thabāt was the basis, which theoretically scholar Arabic authors from al-Khwārizmī onward then inserted into and explained by means of the framework of proportion theory. (Høyrup, 2007 p. 5)

Transposition with proportionality would have been made by writers of Arabic Al-Khwarizmi onwards, when they began to establish that commercial transactions had four quantities in proportion, often identified with the price asked and the corresponding quantities (*al-thaman*, i.e. the price, and *al-muthaman* or the prized commodity). Thus, the transactions would be treated as proportion problems without references to the name rule of three (Høyrup, 2007).

Lima and Ávila pay attention to the transposition of Arabic scholars, first when inserted in the theoretical framework of proportion, and second, when they spread it as a method to solve proportionality problems without references to the name rule of three.

However, it is important to note that the rule was known by Arabs without a specific name, sometimes identified by their previous descriptions and, above all, the transposition coexisted with others and makes clear that the practices of the rule were not produced in an organic way, chronologically, as a species developed over time, becoming opaque in its previous states.

The Arab transposition is not a transposition dominant in Sanskrit, Italian or even in Indian. They live so fondly by individuals in their activities that they were spread, by choice or imposition, because they are more or less convenient for their activities, or rather, because they can become accustomed to a new habitat (Chevallard, 1991).

More precisely, the practices of the rule of three were made in accordance with the contexts shaped by the activities people performed, taking into account types of problem, language or intellectual formation of the individuals, etc. In this sense, it is necessary to consider when Høyrup (2007) states that the formulation of the Arabs, in general, was presented in their writings, initially, through problems of pure numbers without connections with the reality and could be sometimes limited only to these types of problems. According to this author, the Arab writer Ibn Thabāt mentioned the formulation only when it was about numbers in proportion before getting to business transactions. For these transactions, the calculations involved, according to him, asked to *multiply a given quantity by one not of the same kind, and divide the outcome by the one which is of the same kind*. This foundation is clearly the standard version of the Italian abacus writings, which were eminently practical and stipulated the uses to be considered.

The utility of the rule had repercussions on its teaching, insofar as it proved of interest in concrete problems. In this sense, Høyrup (2007) highlights the fact that Arab writers present the rule in different ways, as did Ibn Thabāt around 1200, showing they still would work directly on the rule in utilitarian forms such as the "commercial form". This utilitarian practice would come from an environment where the rule of three was used routinely, an environment where commercial arithmetic was taught and practiced, because "only the existence of such environment could explain that a great part of the preliminary mathematical taught by astronomers mathematicians (and the Mahavira Jaina-sage) consisted of commercial arithmetic" (Høyrup, 2007, p. 5).

Such practices are still taught since the utility character requires simple, fast and safe practices, breaking the barriers of time as can be seen in Juan Andrés (1515) who referred to that as "*whence comes such rule and with such force that multiplying the second by the third and dividing by the first we absolve and find out what is being asked*" (Del Potro, 2007, p. 9); similarly also Vedāngajyotisa about 500 BC, and in the present day with intuitive arithmetic to solve routine problems, designated as multiplicative (Vergnaud, 2009), in the early grades of our schools.

In this respect, the rule of three, including its more remote shapes, remains as a school practice which certainly keeps traces of different transpositions of the practices revealed in confrontation of specific problems in school activities, with singular and unequivocal statements in peculiar ways of doing that characterize its history.

Faced with this scenario, our attention is drawn to the rituals that seem to emerge in the coping with typical problems, and this motivates us to research the relationship present in the *didactical praxeology* between the rule of three and the relationship of proportionality that enables an objective understanding of the practice.

3. "Ritualistic" aspects in teaching the rule of three

The conservation of the practice was ensured by normative conventions of use in community activities, such as those of craftsmen, merchants and scholars. Each community would have, according to their activities, their own normative convention.

The teaching activity has certainly its normative conventions as the textbooks recommended by the "Programa Nacional do Livro Didático" (Guia de livros didáticos, 2010) beginning with the study of proportions since then, in chapter or section, introducing the rule through typical problems, all in accordance with the Arabic standard presentation, beginning with a discussion of proportions, then followed by names like measure and price, and finally having more or less explicit references to similar and dissimilar magnitudes (Høyrup, 2007, p. 5).

The standard prescription of the magnitudes should be of the same nature (similar), which was convenient for the foundation of proportionality by giving it a reason to be as a justified and understandable action, but does not objectively represent an object of study in Brazilian textbooks. Perhaps there is the need to trivialize teaching to beginners who are far from understanding the complexities inherent in practices in different activities as says Vallejo (1841):

> for this examination is necessary have a spirit that not all are equipped with, and therefore our rule, which does not require more than knowledge of the quantities of the same species to rise immediately the proportion, is more accessible to beginners. (p. 351)

This procedure has been transposed to the teaching of the rule of three and became dominant at school and textbooks through the algebraic records of equations as a canonical practice where there are data in columns, one for each magnitude. This data arrangement ensures that the ratios are taken from measurements of quantities of the same kind that after a brief analysis of growth (decrease) is decided by direct or inverse and put into equation, solved by the cross product.

In the school manual for the 7th year of the basic education, Dante (2009) presents local praxeological organizations about the proportionality in which the rule of three is presented, as a ritual for the solution of certain problems (Dante, 2009, p. 203), through the development of a table and, from it, one has to put into equation, with arguments of a proportion, which allows to calculate the sought value by cross products, as follows:

> A rod tube with 6 meters long has a mass of 10 kg. What is the mass of a bar of 9 meters long?
>
> Resolution: This is a situation of direct proportionality: doubling the length of the rod, the mass doubles; tripling the length, the mass triples, and so on.

Length (meter)	Mass (kg)
6	10
9	x

> Directly proportional magnitudes:

$$\frac{6}{10} = \frac{9}{x} \text{ or } \frac{6}{9} = \frac{10}{x} \text{ and then } 6 \cdot x = 9 \cdot 10 \Rightarrow x = \frac{90}{6} \rightarrow x = 15.$$

> Thus, a bar of 9 meters has mass 15 kg.

In a general and regular manner, the rule is located in the manuals in local organizations proportionality, but teaching does not ensure the need for proportionality between the amount of the quantities involved. These conditions, as well as the ratio of quantities of the same nature, are made transparent in practice ritual.

This is evident in the resolution of a group of public school teachers of Pará, a state of Brazil, during a course of *Rede Nacional de Formação Continuada para Professores* [the Continuing National Education for Teachers] as shown in the following problem:

> Lucas is 10 years old and weighs 62 kg. How many kilograms weighs his 12-years-old sister?

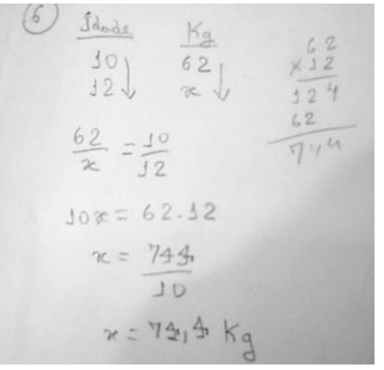


Figure 1. Resolving a question.

Everything seems to happen according to the rule of three practice of ritual and as such supports the idea that their learning from the situation by training, involving the use of keywords, the order of the terms, the practical layout of the numerical data (Gomez, 2006).

In this case, the resolution can be challenged, but the question is taken as a typical problem of rule of three, exactly as learned at school (Bosch, 1994). The atomism of the teaching is independent of the inclusion or not of the praxeology of the rule in local mathematical organizations on proportionality.

Considering that there are local mathematical organizations on proportionality, even in the classical sense (Bosch, 1994), why the atomism in the teaching of this ritual? It seems initially that it occurs due to the functionality in specific activities at school, like activities with mathematics whose legitimacy is given, in general, the effectiveness of use in situation, as a practical knowledge in the direction of the *habitus* of Bourdieu (2004) in relation to a practice field. But such thinking is still hypothetical and needs to be investigated.

4. Further perspectives

The didactic transposition of the mathematicians' rule of three both legitimizes its uses at school and reshapes them according to new normative conditions. One can compare and reconstruct different transpositions of these uses and can affirm that different uses of the rule of three coexist at school, in line with different positions in the school curriculum. More precisely, the basic curriculum for mathematics and science features different versions of the rule of three, including the intuitive method of solving arithmetic problems of division and multiplication, which leads to the rituals of the rule of three, thus leaving out of Brazilian basic education the functional relationship between variables.

Uses of the rule of three are instituted in different sets of ecological conditions, sometimes in the mathematics curriculum, sometimes in other subjects such as physics and chemistry, without further discussions on proportionality and without clear relations with the knowledge at stake in these subjects that determine such uses. Otherwise, the practice of the rule of three is rather a social, cultural and historical procedure, in accordance with the activities in which one is involved, in which proportionality, in the mathematical sense of the word, is not necessarily at stake.

Thus, the normative condition of mathematics, that requires interpreting the rule in terms of proportionality, ignores the normative conditions of use of the rule in other subjects/school activities in the framework of *praxeologies with mathematics*. It is necessary to consider that, in school, the activities with the rule of three do not always objectively require the notion of proportionality, this property being assumed and never checked.

Finally, our understanding, coupled with a critical look at the role of mathematicians in the teaching of mathematics, leads us to consider the need to investigate the non-mathematical ecological conditions of mathematical objects in basic education, encompassing, beyond mathematical objects, cultural ones, memories, values and powers that generate the feeling that these practices, such as they are, that is, as *praxeologies with mathematics*, need to live in school.

In this perspective, the notions of social field and habitus of Bourdieu (1989) as potentiating the notions of praxeological and cognitive dynamics proposed by ATD seem naturally to direct the future of this research.

References

Ávila, G. (1986a). Razões, proporções e regra de três. *Revista do Professor de Matemática*, *8*,1-8.

Ávila, G. (1986b). Ainda sobre a regra de três. *Revista do Professor de Matemática, 9*, 1-10.

Bolea, P. (2003). El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares. En *Monografía del Seminario Matemático García de Galdeano, 29*. Zaragoza, España: Universidad de Zaragoza.

Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad* (Doctoral dissertation). Universitat Autònoma de Barcelona, Spain.

Bourdieu, P. (1989). *Poder simbólico*. Lisbon: Difel.

Bourdieu, P. (2004). *Coisas ditas*. São Paulo, Brazil: Brasiliense.

Boyer, C. B. (1996). *História da matemática*. São Paulo, Brazil: Edgard Blücher.

Brooks, E. (1880). *The philosophy of arithmetic as developed from the three fundamental processes of synthesis, analysis, and comparison. Containing also a history of arithmetic*. Philadelphia, PA: Sower & Potts.

Caunedo del Potro, B. (2007). *Un Manual de aritmética mercantil de Mosén Juan de Andrés*. https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/3180977.pdf

Caunedo del Potro, B. & Córdoba de la Llave, R. C. (2004). Oficios urbanos y desarrollo de la ciencia y de la técnica en la baja edad media: la corona de castilla. *Revista de Historia, 17*, 41-48.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné* (2nd ed.). Grenoble: La pensée sauvage.

Chevallard, Y. (2005). *El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico* (R. Barroso Campos, Trans). www.aloj.us.es/rbarroso/Pruebas/CHEVALLARD.PDF

Chevallard, Y. (2005). *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.

Dante, L. R. (2009). *Contexto e aplicações*. São Paulo, Brazil: Ática.

Feltre, R. (2004). *Quimica*. São Paulo, Brazil: Moderna.

García, F. J. (2005). *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar: De la proporcionalidad a las relaciones funcionales* (Doctoral dissertation). Universidad de Jaén, Spain.

Garding, L. (1981). *Encontro com a matemática*. Editora Universidade de Brasília.

Gómez, B. (2006). Los ritos en la enseñanza de la regla de tres. In A. Maz, M. Torralbo & L. Rico (Eds.), *José Mariano Vallejo, el Matemático*

Ilustrado. Una mirada desde la educación matemática (pp. 47-69). Córdoba, Argentina: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba.

Høyrup, J. (2011). Further questions to the historiography of Arabic (but not only Arabic) mathematics from the perspective of Romance abacus mathematics. In A. Bouzari and Y. Guergour (Eds.), *Actes du IX^e colloque maghrébin sur l'histoire des mathématiques arabes, Tipaza, 12-14 mai 2007* (pp. 125-141). Alger: École normale supérieure.

Lima. E. L. (2001). *Temas e problemas*. Rio de Janeiro, Brazil: SBM.

Miguel, A. & Mendes, I. A. (2010). Mobilizing histories in mathematics teacher education: Memories, social practices, and discursive games. *ZDM Mathematics Education*, *42*(3), 381-392.

Silva, D. P. da. & Guerra, R. B. (2011, June). *Para que ensinar regra de tres?* Paper presented at XIII CIAEM-IACME, Recife, Brazil.

Smith, D. E. (1958). *History of mathematics* (Vol. II). New York, NY: Dover.

Trindade, D. F. & Pugliesi, M. (1989). *Quimica básica teórica*. São Paulo, Brazil: Icone.

Vallejo, J. M. (1841). *Tratado Elemental de Matemáticas. Escrito de orden de S.M. para uso de los caballeros seminaristas del seminario de nobles de Madrid y demás casas de educación del Reino. Cuarta edición corregida y considerablemente aumentada. Tomo I. Parte primera, que contiene la Aritmética y Álgebra*. Madrid: Garrayasaza.

Vergnaud, G. (2009). *A criança, a matemática e a realidade* (M. L. Faria Moro, Trans.). Curitiba, Brazil: Universidade Federal do Paraná.

Analyse d'une question de concours à l'aide du site local dans le contexte d'une montre

Christian Silvy
CRREF (EA 4538),
Université Antilles-Guyane (IUFM de Guadeloupe), France

Abstract. Through an example of calculation of angles in the context of a clock, the article shows the possible use of the notion of "local site of a question" for the preparation work of the teacher aiming to teach a question. The construction of the site shows a lack of practical theory associated to the object "clock". The article talks about consequences of this lack.

Resumen. A través de un ejemplo de cálculo de ángulos en el contexto de un reloj, el artículo muestra el uso posible del concepto de «sitio local de una pregunta» en el trabajo del profesor que se prepara a enseñar una pregunta. La construcción del sitio muestra una falta de teoría práctica asociada al objeto «reloj». El artículo aborda las consecuencias de esta ausencia.

Résumé. L'article montre sur un exemple de calcul d'angles dans le contexte d'une horloge l'usage possible de la notion de « site local d'une question » dans le travail du professeur se préparant à enseigner une question. La construction du site fait émerger un manque de théorie pratique associée à l'objet « montre ». L'article discute alors des conséquences de cette absence.

IV[e] congrès international sur la TAD (Toulouse, 21-26 avril 2013)
Axe 2. *L'analyse praxéologique comme outil de l'analyse et de l'ingénierie didactiques*

Silvy, C. (2017). Analyse d'une question de concours à l'aide du site local dans le contexte d'une montre. Dans G. Cirade et al. (Éds), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* (pp. 481-500). https://citad4.sciencesconf.org

En France, l'institution École primaire recrute les professeurs des écoles par la voie du concours du concours de recrutement de professeurs des écoles (CRPE). Si « le baccalauréat pilote l'enseignement du cycle terminal » (voir l'ouvrage de Bernard David, 2000) ou si « le mode d'évaluation aux examens structure les contenus de l'enseignement et organise la scolarité » ainsi que l'écrit Pierre-André Périssol (2005, p. 28), l'analyse de sujets du CRPE contribue à dévoiler les objectifs de l'institution. L'analyse développée dans cet article porte sur l'une des questions d'un exercice sur les angles (Ministère de l'Éducation nationale [MEN], 2010, p. 2), question posée au concours de professeur des écoles en 2010 en Guadeloupe dans le cadre d'un exercice portant sur le cadran d'une montre.

Dans le cadre la théorie anthropologique du didactique, dans une approche écologique, nous cherchons à mesurer les effets du choix effectué par l'institution dans un questionnement didactique, un « déploiement de l'épaisseur du texte ». Nous l'opérons par la construction du site local. Pierre Duchet et Abdulkadir Erdogan (2006) ont montré à travers la construction d'un « site mathématique » comment les mathématiques devraient être mobilisées dans la résolution d'une question. Mais, pour amorcer la démarche vers une solution, les élèves ont besoin, certes, de connaissances mathématiques mais aussi d'éléments éloignés, identifiés comme des objets protomathématiques et paramathématiques par Yves Chevallard (1991), alliés à des connaissances non nécessairement mathématiques, ce que Christian Silvy et Antoine Delcroix (2009 ; 2012) nomment substrats. Ainsi, un professeur voulant diriger l'étude ou aider des élèves doit avoir identifié des savoirs mathématiques de la composante mathématique du site local mais aussi des « choses », non encore dénommées ou non mathématiques de la partie culturelle. Pour accompagner des élèves dans leur démarche, un professeur est amené à donner du sens en réinterprétant la question à l'étude. Pour cela il lui faut, dans sa trousse à outils de professionnel, des éléments théoriques qui appuient son discours. Nous montrerons que, sans ces éléments, une théorie locale ou naïve selon Christian Silvy, Antoine Delcroix et Alain Mercier (2013) associée ici à l'instrument montre ou horloge, les candidats restent démunis face au problème posé. Le site local répond donc à ces objectifs professionnels du professeur ; il s'appuie sur la notion de praxéologie (Chevallard, 1999) pour organiser la composante mathématique qui prend en charge les savoirs et expose, par la partie culturelle ou les substrats, le domaine de réalité qui fait vivre la question. Ainsi, il peut être pris comme un modèle praxéologique de référence pour le chercheur. Plus précisément la construction du site répond de manière locale à la question : « Étant donné une œuvre *O*, que doit savoir à son propos le chercheur en didactique travaillant sur la diffusion de *O* dans tel ou tel complexe d'institutions (par exemple dans les classes d'un niveau donné) ? ». En effet, nous montrerons sur cet exemple que le site local nécessite, pour sa construction, au-delà des connaissances mathématiques, des connaissances anthropologiques ou culturelles.

Dans un premier volet, l'article expose la démarche menée pour construire le site local de la question du sujet du CRPE cité plus haut. L'enquête débute par l'histoire des unités de temps et des instruments de mesure du temps. Elle se poursuit par la recherche des différentes transpositions effectuées dans l'enseignement de la notion, par l'étude des programmes et de différents manuels. Elle permet à la fois d'appréhender la ou les théories locales ou naïves (Silvy et al., 2013) nécessaires à la pratique des mathématiques associées à la question, d'élaborer différentes techniques et ainsi de faire émerger la praxéologie mathématique associée.

Des résultats statistiques montrent un très faible taux de réponses exactes à cet exercice en 2010. Le questionnement apporté par notre travail de construction du site local nous permet d'émettre l'hypothèse d'une intuition pratique que nous formulerons ainsi : à midi et demi les aiguilles d'une montre sont alignées. Nous avons choisi pour rendre compte du raisonnement implicite, équilibre instable entre l'allant de soi et l'explicite, le terme d'intuition pratique en prenant appui sur les notions de modèle implicite (Chevallard, 1987) et d'intuitions du sens pratique au sens que cette expression prend chez Pierre Bourdieu (1987). Nous avons mené une enquête par questionnaire auprès d'étudiants préparant le CRPE de l'année 2013 pour vérifier que les résultats obtenus n'étaient pas dus au stress des candidats au concours. Cette enquête confirme l'existence et l'étendue de cette intuition pratique.

Pour conclure, la discussion permettra de confronter les compétences mathématiques aux habiletés nécessaires à l'élaboration d'une solution.

1. Construction du site

1.1. Exposition du site local

Comme nous l'avons signalé plus haut, l'analyse porte sur un exercice du sujet de mathématiques du concours préparant au métier de professeur des écoles posé en Guadeloupe en 2010 (MEN, 2010, p. 2) que nous avons reproduit en totalité à l'annexe 1. L'absence de tentative de résolution par un candidat semble improbable par rapport à son importance dans le barème : cet exercice représente un quart de la note. Il se compose de deux parties. L'objectif de la partie A est la construction d'un cercle et de douze points régulièrement espacés représentant les douze graduations horaires d'une horloge avec l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique (voir annexe 1). Nous ne nous intéresserons qu'à la première question de la partie B (voir figure 1).

Exercice n°1 (5points)

Les parties A et B sont indépendantes (…)

Partie B -travail sur les angles

A une heure donnée, on fait correspondre l'angle saillant formé par les deux aiguilles.

Ainsi : à 12 h 30 on fait correspondre 165°,

à 11 h 40 on fait correspondre 110°.

1 Indiquer, en justifiant les réponses, l'angle correspondant à chacune des heures suivantes :

8 h

10 h 30

6 h 20

Figure 1. Extrait du premier exercice du sujet du CRPE 2010 (MEN, 2010, p. 2).

Le concepteur du sujet a ainsi introduit, avant de poser la première question de la partie B, deux exemples pour aider à la résolution de l'exercice. Mais ces exemples sont-ils aussi transparents que cela paraît ? On remarquera que l'aiguille des heures indique l'heure exacte mais sa lecture dans le cas d'une montre n'est pas précise. Ainsi l'aiguille des minutes permet une lecture rapide et affinée. Dans la position des aiguilles à midi et demi, la petite aiguille se situe à mi-chemin entre midi et une heure et indique donc midi et demi. La grande aiguille atteste de trente minutes. Remarquons qu'une interprétation additive des deux aiguilles donnerait 12 h 30 min + 30 min c'est-à-dire 13 h. Cette interprétation n'est-elle pas l'obstacle qui donne du sens à l'intuition majoritaire ? Nous ne pouvons l'affirmer. Ainsi la lecture du temps exige une lecture par approximation de la petite aiguille dans les entiers, tandis que le mouvement de la grande aiguille peut être vu comme continu : on retrouve l'*opposition entre le discret et le continu*. En outre, l'heure n'est-elle pas une notion approximative ?

Le cercle peut être associé au temps cyclique et à une *représentation iconique* du cadran ainsi qu'à la *modélisation scientifique du cadran et du mouvement des aiguilles*, cet élément reste donc central dans cette question.

La figure 2 ci-après présente le site local de la question dont nous développons la construction dans la suite de cet article.

Partie culturelle				Partie mathématique		
Substrat 3 : heuristiques	**Substrat 2 : Choses reliées à l'objet technologique de l'énoncé**	**Substrat 1 : Choses singulières**	**Objets**	**Techniques**	**Concepts (1) : technologies**	**Concept(2): théorie**
Manipuler une représentation iconique **Questionner une intuition** **Dépister une anomalie** **Interroger une métaphore** **Mettre en équation** **Utiliser une estimation**	**Temps physique** **Engrenage** **Modélisation scientifique du cadran et du mouvement des aiguilles** **Temps subjectif (cyclique…)** **Gnomon , cadran solaire, clepsydre, sablier, chronomètre, horloge, montre, téléphone cellulaire** **Approximation** **Opposition discret-continu**	**Angles** **Bijection (correspondre)** **Mouvement circulaire uniforme** **Mouvement isochrone** **Vitesse angulaire** **Abscisse curviligne** **Égalité modulo**	**Entier** **Heure** **Minute** **Degré** **Graduation** **Angle saillant** **Angle** **Horloge**	**Simplification et réduction (fractions)** **Proportionnalité** **Opérations (temps et angles)** **Congruence** **Changements d'unités** **Opérations (angles orientés)**	**Corps des fractions** **Demi espace vectoriel** **Application linéaire** **Trigonométrie** **Rotation** **Abscisse curviligne**	**Grandeurs et mesures** **Géométrie affine et euclidienne** **Géométrie différentielle** **Algèbre linéaire**

Figure 2. Site local de la question.

Les objets particuliers séparent le site local en deux, la partie mathématique à droite et la partie culturelle ou anthropologique à gauche. La partie culturelle vise à identifier notamment les préconstruits avec le substrat 1 et les théories locales ainsi que les méthodes que mobilise le travail dans l'ensemble des choses utiles pour aborder la question ou encore du domaine de réalité.

Remarquons que l'idée véhiculée par l'expression « site archéologique » choisie par A. Erdogan et A. Mercier (2007) comme référence au site mathématique est efficace, car un site local peut toujours être fouillé plus profondément. Cependant l'analogie avec un site internet révèle une autre manière de concevoir le site, c'est un réseau organisé par mots clefs (le lecteur pourrait compléter le site avec des flèches) – ce qui constitue une des difficultés à construire ce tableau. Enfin, dans une approche écologique, le site est l'écosystème de la question. Ainsi les objets du site ou les choses du substrat forment des chaînes trophiques définies par Landy Rajoson (1988) comme des « chaînes d'outils, s'impliquant mutuellement ».

1.2. Construction du substrat

Pour construire cette composante du site, nous débutons par une brève étude historique de la numération sexagésimale et de la technologie des horloges ainsi que la recherche du concept de temps au travers du curriculum. Pour aider le lecteur, nous avons choisi de mettre en italique les mots clefs dégagés par l'enquête.

Pour Samuel Noah Kramer (1957) « [l]'histoire commence à Sumer » ou plus précisément la première civilisation avec trace écrite connue de nos jours est née chez les mésopotamiens. Chaque ville était organisée en États, une école par ville était tournée vers le métier de scribes ou de prêtres. Les prêtres relevaient dans la lecture des astres des indications sur le destin des rois. À Nippur l'écriture des nombres à l'école est à base sexagésimale. Cette numération mixte est issue de l'unification d'une grande diversité de listes de métrologie.

Le système « heure, minute, seconde » perpétue dans notre culture ce choix sexagésimal et l'instrument « montre » ou « horloge » demeure un outil privilégié pour mesurer le temps. Se pose alors la question : quelle est la genèse de cet instrument ? L'enquête sur cet aspect historique met en évidence que l'apparence des cadrans des montres analogiques ou des horloges actuelles prolonge la tradition des premières horloges construites à partir d'*engrenages*. Cependant, la conception d'une montre analogique n'est plus associée au mouvement mécanique mis en œuvre dans des engrenages. Ainsi les principes du fonctionnement des aiguilles d'une montre ne résultent plus de notions mathématiques attachées aux questions de la forme « pour un tour de la petite (ou grande) aiguille, combien de tour de l'autre aiguille ? » ou « un tour de l'une pour 12 tours de l'autre ». Ces principes associés à la notion d'engrenage composent la théorie naïve de l'instrument.

La mobilisation de la technique mathématique associée permet de répondre à l'exercice [1]. Cependant la notion d'*engrenage* avait complètement disparu des programmes, même si le document de la collection ressources pour la classe portant sur le nombre au cycle 3 publié en 2012 en fait à nouveau timidement état dans une note de bas de page (MEN, 2012, p. 93). Qu'en est-il alors de la place du temps dans le curriculum mathématique scolaire ?

Cette notion sensible du programme du primaire est approchée peu à peu au fil du curriculum mais reste à jamais préconstruite au sens d'Y. Chevallard (1991) : « L'objet est installé par la monstration qui le désigne dans son existence entêtée, dans un état qui échappe au questionnement, parce que tout questionnement le suppose : il est un point d'appui inattaquable de la réflexion » (p. 91). Cependant certains la classent comme notion primitive (et donc non susceptible de définition), comme le rappelle Paul Vissio (1971) dans un manuel de terminale, « La notion de temps étant une *notion primitive*, il ne s'agit pas de la définir. » (p. 387), ou comme l'affirme Etienne Klein (1998) :

> D'abord parce le mot temps ne peut pas être défini : la notion de temps a quelque chose de primitif, d'« originaire » au sens où elle n'est dérivable d'aucune autre notion, de sorte que toute tentative pour la définir ne peut être que redondante.

Par ailleurs, E. Klein (1998) ajoute que « il y a au moins deux sortes de temps : le temps physique, celui des horloges, et le temps subjectif, celui de la conscience ». Ainsi les instruments de mesure du temps *gnomon, cadran solaire, clepsydre, sablier, chronomètre, horloge, montre, téléphone cellulaire* sont reliés au *temps physique* mais aussi, au travers de métaphores, au *temps subjectif* : « La métaphore du fleuve a bel et bien inspiré l'idée qu'il existe un "ordre du temps" » (Klein, 1998) – ce qui entérine qu'une métaphore est une théorie ad hoc comme l'indique Nanine Charbonnel (1991). En outre, après l'essai sur l'irréalité du temps du philosophe John M.

1. Voir la quatrième technique située en annexe 2.

E. Mc Taggart (1908), la question « et si le temps n’existait pas ? » se pose aujourd’hui en physique comme le souligne Carlo Rovelli (2012).

Dans l’enseignement secondaire entre 1995 et 2012, en collège et en filière scientifique, la notion de temps est couplée en mathématiques avec celle de vitesse. Ainsi tout candidat au concours du CRPE a croisé la formule « $d = v.t$ ».

Recherchons maintenant les différents concepts mathématiques préconstruits associés à la montre. Visuellement, l’extrémité de l’aiguille des heures suit un mouvement circulaire uniforme ainsi qu’en première approximation l’extrémité de l’aiguille des minutes. Les deux aiguilles ont un *mouvement isochrone*.

L’aiguille des minutes occupe la même position toutes les heures, ce qui se décrit en termes d’angle par une *égalité à un tour près*. Cette notion, reliée aux fonctionnements des aiguilles et à la modélisation du cadran, reste préconstruite aujourd’hui au niveau étudié. Ainsi la *modélisation scientifique du cadran et du mouvement des aiguilles* appartient au substrat.

Dans l’annexe 2, des réponses non synthétiques à la question du CRPE permettent d’expliciter quelques concepts préconstruits et, par voie de conséquence, de compléter la partie culturelle. Ces différentes réponses interrogent le champ des intuitions organisationnelles ou heuristiques ; pour cela, trois choses émergent de notre étude : *dépister l’anomalie*, *questionner une intuition* et *interroger une métaphore*. Avec *dépister l’anomalie* et avec *questionner une intuition* nous évoquons l’habileté au sens du mot latin « *habilis* » comme le rappelle Marcel Mauss (1936) :

> … qui ont des habitudes, qui « savent y faire ». C’est la notion anglaise de « craft », de « clever » (adresse et présence d’esprit et habitude), c’est l’habileté à quelque chose. Encore une fois nous sommes bien dans le domaine technique. (p. 14)

Questionner une intuition révèle une habileté à la remise en cause. Tandis qu’une faculté à *dépister l’anomalie* dénote l’habileté à reconnaître une situation inhabituelle : information supplémentaire non nécessaire à la compréhension du texte par l’introduction de deux exemples. En suivant Alain Magen (2001), pour lequel « il y a une figure rhétorique en un lieu d’un discours si ce qui s’y trouve n’est pas ce qui est attendu » (p. 33), on peut questionner, par une étude de différents exercices de manuels de collège ou de diverses institutions parascolaires, la présence de cette figure de rhétorique associée à l'habillage « montre ». On met notamment en évidence que : (a) dans certains manuels, la gestion de la difficulté se concrétise par un découpage à la manière cartésienne par un jeu de questions sans introduire d'exemple explicatif dans un exercice de type exercice à tiroirs (Silvy, 2010) ; (b) dans l'institution IREM ou dans les Olympiades, concours destiné aux élèves de première S (16-17 ans), le problème posé ne contient aucune indication de solution [2].

Notre brève étude montre bien l'aspect singulier du bandeau introductif composé de deux exemples. Il nous reste désormais à construire la composante mathématique du site local, dimension qui est développée dans la partie suivante.

1.3. Construction de la partie mathématique

Nous poursuivons la mise en italique des éléments que nous découvrons dans notre travail. Une simple lecture du sujet permet de rencontrer les objets présents dans le site local *: entier, heure, minute, degré, graduation, angle saillant, angle, horloge*. Après cette rencontre avec les objets particuliers, nous recherchons les techniques présentes dans les différentes solutions.

Pour cela, nous analysons des réponses possibles explicitées à l'annexe 2 : les quatre techniques proposées sont basées sur un raisonnement de *proportionnalité* avec l'utilisation des *opérations* arithmétiques, ainsi que sur la *conversion* du système sexagésimal en heures et minutes. La première technique est centrée sur le fait qu'entre deux points du cadran (par exemple entre la graduation 1 et la graduation 2) et le centre du cadran correspond un angle de trente degrés de sommet le centre du cadran. La deuxième est axée sur le parcours de la petite aiguille : un degré pour deux minutes. La troisième méthode utilise la *congruence* et les angles orientés et la dernière

2. Pour un exemple, on pourra consulter (a) l'épreuve du Rallye mathématique de la Sarthe de l'année 2010 ou encore (b) le premier exercice des olympiades de mathématiques de Dijon de l'année 2005 :
(a) http://sarthe.cijm.org/index.php?option=com_content&task=view&id=186&Itemid=19, consulté le 2 juin 2010 ;
(b) http://laroche.lycee.free.fr/telecharger/divers/2005_olympiades_acad_mathematiques.pdf, consulté le 16 juin 2016.

se construit à partir des fractions. Ces manières de faire permettent d'utiliser les objets suivants comme des outils : *raisonnement de proportionnalité, changement d'unité, opérations*. Après ces techniques, nous mettons au jour les blocs technologico-théoriques sur lesquels reposent les techniques développées en annexe : *demi-espace vectoriel, trigonométrie, rotation, abscisse curviligne* font partie de la technologie de la praxéologie. Nous distinguons enfin un niveau d'analyse praxéologique permettant de justifier les techniques et les technologies associées, c'est la théorie au sens de Y. Chevallard (1999) : *grandeurs et mesures, géométrie affine et euclidienne, géométrie différentielle et algèbre linéaire.*

Le travail mené pour construire le site local a permis de montrer que la « compréhension profonde » – au sens de Lee S. Shulman (2007) – de l'instrument reste hors d'atteinte pour tout un chacun. Ainsi, nous émettons l'hypothèse qu'aujourd'hui une montre est utilisée comme une boîte noire qui indique l'heure. Dans ces conditions, l'acte de lire l'heure est accompagné par le langage avec, d'abord la petite aiguille pour les heures, puis, la grande pour les minutes. Le sens commun pratique véhiculé par le langage retient alors : à midi et demi, la petite aiguille est à midi et la grande est sur le 6. Cette simplification est nommée dans cet article : intuition pratique. Le prochain paragraphe développe le questionnement relatif à cette intuition pratique du point de vue didactique.

2. Questionnement didactique à partir du site local

La construction du site a permis de mettre en évidence une ressource nécessaire pour décontextualiser et dévoiler l'habillage de l'exercice afin d'utiliser des techniques mathématiques pour résoudre la question. Il s'agit de la connaissance de la modélisation scientifique du cadran et des positions des aiguilles d'une montre suivant l'heure. L'habillage choisi rend-il dès lors l'exercice hors de portée d'un étudiant moyen ?

Pour répondre à cette question, nous avons mené une première enquête sur les copies de tous les candidats, complétée par des entretiens dirigés avec certains d'entre eux. Sur 525 candidats, 438 ne réalisent pas l'exercice ou donnent une réponse erronée et donc, dans les deux cas, obtiennent la note zéro. Ces premiers résultats sur les copies du concours en Guadeloupe montrent donc que 83,4 % des candidats restent en échec. Nous avons essayé de comprendre les raisons de cet échec. Le stress du concours ne peut être incriminé. En effet, une enquête en 2012 menée par un questionnaire auprès de 35 étudiants de première année de master préparant au métier de professeur des écoles, dans lequel la question suivante : « Représenter une montre et ses aiguilles à 8 h. Puis une montre et ses aiguilles à 12 h 30 » était directement posée, montre que tous les étudiants partagent cette intuition pratique. On peut alors se demander si cette intuition pratique est construite par l'École. L'enquête sur la genèse de cette intuition pratique montre que celle-ci ne résulte pas uniquement de l'enseignement : des manuels enseignent la position de la petite aiguille, 20 % au plus des professeurs des écoles interrogés enseignent la lecture de l'heure sans prendre en compte le mouvement réel de la montre. Remarquons ici simplement qu'une horloge à affichage numérique conforte l'intuition erronée : en effet, entre 9 h 00 et 9 h 59 min 59 s, une montre numérique affiche un nombre entier constant pour les heures. Une enquête en 2012 par questionnaire auprès de neuf professeurs confirmés montre que quatre enseignants sur les neuf possèdent cette intuition pratique. Sur ces quatre professeurs, deux professeurs n'ont jamais enseigné la lecture de l'heure, les deux autres ne se rappellent pas comment ils l'enseignaient. Nous avons aussi enquêté sur le choix du concepteur de donner comme exemple midi et demi. Nous avons demandé à 24 élèves de première de dessiner une montre à 9 h puis à 11 h 30. Cinq élèves ont réalisé un dessin exact, ce qui revient à dire que 79 % des élèves ont une vision erronée. La différence entre ce pourcentage et celui de l'enquête de 2012 peut s'expliquer par l'esthétique associée à la symétrie ou à la verticalité. Nous laissons cette question ouverte : cependant, nous remarquons que le concepteur choisit d'interroger par la figure de rhétorique l'intuition la plus commune et la plus robuste.

3. Discussion et conclusion

La construction du site local a permis de rendre compte des *effets d'habillage* (ici liés à l'intuition erronée du mouvement des aiguilles d'une montre) et de faire émerger la *théorie locale associée à la pratique de l'instrument* à partir de l'historique du mécanisme des montres ou des horloges. L'explication du mouvement pseudo-continu des aiguilles d'une montre analogique actuelle provient de la genèse de la montre à mécanisme d'engrenages. Cette théorie locale joue un rôle voisin de la théorie associée au spectre de la lumière pour la vision de l'arc en ciel ainsi que l'explique Michel Pastoureau (2005). Cet élément mécanique, actuellement absent des programmes scolaires et de la culture commune de la société, permet à celui qui le mobilise une amorce de solution. Le substrat met aussi en lumière des notions mathématiques préconstruites implicitement attachées à la lecture de l'heure, comme la notion d'angle, ainsi que des métaphores et des notions de physique liées au concept de temps. Notre analyse s'est resserrée autour de l'intuition erronée de ce mouvement et de sa gestion *a priori* par l'énoncé. Le concepteur du sujet, conscient de l'obstacle, choisit d'introduire la question par une figure rhétorique en donnant deux exemples qui devraient permettre de réfuter l'intuition pratique. Malgré ces exemples, les candidats la conservent et essaient de répondre dans des registres différents (tableau, dessin)[3]. Notre enquête prouve que l'indication donnée se heurte à la robustesse de l'intuition pratique : deux étudiants candidats au concours, titulaires d'une licence de mathématiques, n'ont, pas plus que les autres, remis en cause leur intuition…

La lecture de l'heure est affaire d'usage. Si le langage est porteur de sens alors dire : « midi et demi » signifie-t-il que l'aiguille des heures est sur midi et que la grande aiguille indique trente minutes[4] ? Et, finalement, c'est ce même regard que projette celui qui veut savoir l'heure en la lisant sur une montre à aiguilles, il approxime la position des aiguilles, ce qui est une façon de projeter son intuition pratique et de faire coïncider la réalité avec sa propre représentation. Une certaine esthétique n'est-elle pas à la clef ? L'intuition pratique proviendrait-elle d'un effet miroir, d'une recherche de symétrie ? En effet, à six heures, les deux aiguilles sont parfaitement alignées et l'intuition pratique n'en serait alors que la reproduction

3. Lors des entretiens avec les dix candidats, certains candidats mentionnent que, le jour du concours, après une recherche d'environ une demi-heure, ils préfèrent ne pas répondre aux questions posées, les résultats ne leur apparaissant pas cohérents.

4. La manière de dire l'heure dans les différentes langues serait sans doute à mettre en rapport avec cette conception. En anglais la formulation (de moins en moins employée !) « half past twelve » utilise un marqueur pour rappeler qu'il est midi passé de 30 minutes. Ceci peut être vu comme un rappel implicite soit du mouvement de l'aiguille des heures qui tourne, soit de leurs positions respectives sur la droite du temps. En français, l'expression peu usitée « midi passé » reprend en partie cette propriété.

symétrique. Cette question mériterait d'autres investigations. Cependant, pour un adulte, la lecture de l'heure est devenue automatique, cette « disposition comportementale de l'action », selon l'expression de Karl Popper (1991, p. 190), produit l'intuition pratique. En suivant la position de K. Popper, décrivons les acteurs de cet exercice. La montre est un outil du monde 1, qui contient les « objets physiques ou états physiques » ; la lecture rapide de l'heure ainsi que l'intuition pratique constituent deux éléments du monde 2, « monde des états de conscience ou des états mentaux » ; enfin les savoirs mathématiques appartiennent au monde 3, « monde de la pensée scientifique, poétique et des œuvres d'art ». Cette description permet de dépeindre ce qui reste implicite, soit le passage de « connaître une montre » du monde 2 au sens de Popper à la connaissance scientifique de l'outil « montre » nécessitant la théorie locale associée à l'instrument. En adoptant le point de vue de Daniel Kahneman (2012), le problème offre encore une confrontation entre deux activités mentales : « lire l'heure pour un adulte » propre au « système 1 », le système automatique et rapide nécessitant peu d'effort, et celle de « calcul de l'angle associé à la position des aiguilles d'une montre à une heure donnée », activité du système 2, lente et gourmande en énergie.

Cette dernière analyse pointe la compétence implicite attendue par l'institution de la part d'un futur enseignant de primaire : la mise à distance de l'instrument. C'est ce que dégage cette enquête. Cependant l'échec massif à cet exercice dévoile que les candidats au concours n'ont pas montré dans le temps imparti avoir acquis la compétence visée. Échec relatif dans la mesure où la question est notée sur trois points. Ainsi l'auteur du sujet, conscient de l'intuition pratique, met un bandeau à la question, composée de deux exemples, et permettant un questionnement qui devrait faciliter une distanciation de l'instrument « montre », mais ne lui affecte que peu d'effet sur la note globale. Cette pratique peut sembler paradoxale ; cependant, la cause peut être recherchée dans les habitus de la profession d'évaluateur : il s'agit d'« embrasser » un maximum de compétences.

Enfin, au-delà de l'exemple étudié ici, nous espérons avoir montré que la construction effective d'un site local permet de réinterroger un exercice, une activité, une notion mathématique, par des questions en donnant à l'étude une réponse $R^{\heartsuit}$. Cette étude constitue un modèle praxéologique de référence en resituant les questions dans leur écosystème mathématique et culturel : notamment, du substrat 2 jaillit la « praxéologie modélisation » selon l'expression de Maggy Schneider (2008, p. 96).

Références

Bourdieu, P. (1987). *Choses dites*. Paris : Éditions de Minuit.

Charbonnel, N. (1991). *La Tâche aveugle. 2. L'important, c'est d'être propre*. Strasbourg : PUS.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné* (2e éd.). Grenoble : La pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1987). Quelques représentations touchant le concept de représentation. Dans L. Marbeau & F. Audigier (Éds), *Actes des rencontres sur la didactique de l'histoire, de la géographie, des sciences économiques et sociales* (pp. 111-137). Paris : INRP.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques, 19*(2), 221-266.

David, B. (Éd.). (2000). *Éducation physique et sportive : la certification au baccalauréat*. Paris : INRP.

Duchet, P. & Erdogan, A. (2006). Pupil's autonomous studying: From an epistemological analysis towards the construction of a diagnosis. Dans M. Bosch (Éd.), *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 663-674). http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/CERME4/CERME4_WG6.pdf

Erdogan, A. & Mercier, A. (2007). Les forums de questions mathématiques sur Internet et les attentes sur le travail des élèves. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *12*, 147-163.

Kahneman, D. (2012). *Système 1/Système 2 : Les deux vitesses de la pensée*. Paris : Flammarion.

Kramer, S. M. (1957). *L'histoire commence à Sumer*. Paris : Flammarion.

Klein, E. (1998). Le temps de la physique. *Bulletin interactif du centre international de recherches et études transdisciplinaires*, *12*.

Mc Taggart, J. E. (1908). The Unreality of Time. *Mind*, *17*, 457-474.

Magen, A. (2001). Le projecteur rhétorique : sur les erreurs en algèbre et en géométrie au collège. *Repères IREM, 45*, 24-54.

Mauss, M. (1935). Les techniques du corps. *Journal de psychologie, 32*(3-4), 271-293.

Ministère de l'Éducation nationale. (2010). *Concours de recrutement des professeurs des écoles. Deuxième épreuve d'admissibilité : Mathématiques. Groupement 4.* http://vekemans.free.fr/public_html/IMG/pdf/MAT10PG4.pdf

Ministère de l'Éducation nationale. (2012). *Le nombre au cycle 3. Apprentissages numériques.* Paris : CNDP.

Pastoureau, M. (2005, mars). Vers une histoire des couleurs : possibilités et limites. *Communication présentée à la séance du 20 mars 2005 de l'Académie des Beaux-Arts*. http://www.academie-des-beaux-arts.fr/actualites/travaux/%20comm.%202005/04-pastoureau.pdf

Périssol, P.-A. (2005). *Rapport d'information à l'Assemblée Nationale numéro 2247 déposé en application de l'article 145 du règlement par la commission des affaires culturelles, familiales et sociales sur la définition des savoirs enseignés à l'école*. http://www.assemblee-nationale.fr/12/pdf/rap-info/i2247.pdf

Popper, K. R. (1991). *La connaissance objective* (J.-J. Rosat, Trad.). Paris : Aubier.

Rajoson, L. (1988). *L'analyse écologique des conditions et des contraintes dans l'étude des phénomènes de transposition didactique : trois études de cas*. (Thèse de Doctorat). Université Aix-Marseille 2.

Rovelli, C. (2012). *Et si le temps n'existait pas ? Un peu de science subversive*. Paris : Dunod.

Schneider, M. (2008). *Traité de didactique des mathématiques*. Liège, Belgique : Éditions de l'Université de Liège.

Silvy, C. & Delcroix, A. (2009). Site mathématique d'une ROC : une nouvelle façon d'interroger un exercice ? *Annales de Didactique et Sciences Cognitives, 14*, 103-122.

Silvy, C. & Delcroix, A. (2012). Un outil pour organiser l'analyse d'un sujet de mathématiques. *Repères IREM, 87*, 59-78.

Silvy, C., Delcroix, A. & Mercier, A. (2013). Enquête sur la notion de « pedagogical content knowledge », interrogée à partir du « site local d'une question ». *Éducation et didactique*, *7*(1), 33-58.

Shulman, L. S. (2007). Ceux qui comprennent. Le développement de la connaissance dans l'enseignement. *Éducation et didactique*, *1*(1), 97-114.

Vissio, P. (1971). *Mathématique. Terminales C-D-E / Analyse*. Paris : Delagrave.

Annexe 1. Extrait de l'épreuve de mathématiques du CRPE, groupement 4 de l'année 2010

Exercice n°1 (5 points)

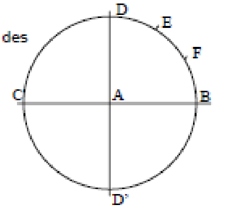
Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A – utilisation d'un logiciel de géométrie

On considère un cadran d'horloge et ses douze graduations horaires.

On veut construire, avec un logiciel de géométrie dynamique, un cercle et douze points régulièrement espacés pour représenter ce cadran. On dispose pour cela des seules fonctionnalités accessibles à l'aide des 5 icônes ci-dessous.

Numéro	Icônes	Description de la fonctionnalité
N° 1		Placer et nommer un point libre
N° 2		Tracer la droite passant par deux points
N° 3		Tracer la médiatrice d'un segment
N° 4		Tracer le cercle défini par son centre et un de ses points
N° 5		Identifier et nommer les points d'intersection de deux objets



Recopier et compléter la description, ébauchée ci-dessous, de la construction des premiers points (A, B, C, D, E, F) nécessaires pour la construction complète.

- *avec l'icône 1, placer et nommer deux points A et B*
- *avec l'icône 4, tracer le cercle de centre A passant par B*
- ……

Partie B – travail sur les angles

À une heure donnée, on fait correspondre l'angle saillant formé par les deux aiguilles.
Ainsi : à 12 h 30 on fait correspondre 165°
à 11 h 40 on fait correspondre 110°.

1. Indiquer, en justifiant les réponses, l'angle correspondant à chacune des heures suivantes :
 a) 8 h
 b) 10 h 30
 c) 6 h 20

2. - Il est entre minuit et une heure du matin,
 - L'aiguille des minutes est sur une des douze graduations du cadran,
 - Les deux aiguilles forment un angle de 140°.

Quelle heure est-il?

Pour cette question, aucune justification n'est exigée.

(Ministère de l'Éducation nationale, 2010, p. 2)

Annexe 2. Solutions de la question B. 1.

Première méthode. Le cadran d'horloge et ses douze graduations horaires peuvent se modéliser comme « un cercle et douze points régulièrement espacés ». Cette représentation d'un cadran est l'objet de la première partie de l'exercice [5]. Comme un tour complet correspond à *360°* et que l'on a *12* points régulièrement espacés on peut faire correspondre à deux points consécutifs un angle de 30°.

La petite aiguille indique la graduation *8 h*, la grande aiguille la graduation *12 h*. Nous avons une différence de quatre heures donc un angle de *120°.* [6]

À 10 h 30, l'aiguille des minutes indique le point *6* et l'aiguille des heures se trouve entre *10 h* et *11 h*, plus précisément à la moitié. Entre ces deux aiguilles il y a sept graduations, c'est-à-dire une correspondance de $7 \times 30°$, soit *210°*. Ainsi l'angle entre les deux aiguilles est $15° + 210°$, soit *225°*. Donc l'angle saillant est *135°.* [7]

À 6 h 20 l'angle formé par les deux aiguilles est de *70°*. En effet, la grande aiguille indique *4 h* et la petite aiguille se trouve entre *6* et *7*, entre ces deux aiguilles il y a deux graduations, c'est-à-dire une correspondance de *60°*. De plus, la petite se trouve entre deux graduations à une correspondance de *10°* car $20\ min = 1/3\ h$ et $1/3 \times 30° = 10°$.

Deuxième méthode. La petite aiguille (aiguille des heures) parcourt *360°* en 12 heures, soit 1 degré pour 2 minutes.

À 8 h elle aura parcouru *240°* ($8 \times 60\ min = 24 \times 2\ min$). La grande aiguille indique le *12* donc correspond à *360°*. Ainsi l'angle correspondant à 8 h est de *120°* ($360° – 240° = 120°$).

Procédons de manière analogue pour 10 h 30. $10\ h\ 30\ min = 630\ min = 315 \times 2\ min$. Ainsi la petite aiguille aura parcouru un angle de *315°*. La grande aiguille se situe sur le *6* donc a parcouru un angle de *180°*. Or 315° – 180° = 135°. Donc l'angle saillant est de 135°.

De même $6\ h\ 20 = 380\ min = 190 \times 2\ min$. Donc la petite aiguille aura parcouru un angle de *190°*. L'aiguille des minutes aura fait un tiers de tour donc *120°*. Or $190° – 120° = 70°$.

Troisième méthode. Soit G le point face à la grande aiguille et soit P celui de la petite aiguille à *x* minutes.

5. Cette modélisation permet d'évoquer la correspondance entre les heures et les angles.

6. Variante : entre 8 h et 12 h il y a 4 h (un tiers de 12 h). Or 360° : 3 = 120°, donc l'angle est de 120°.

7. Variante : 4 × 30° + 15° = 135°.

Dans la partie A, l'énoncé définit le point D, point qu'indiquent les aiguilles à midi. La grande aiguille fait un tour complet, c'est-à-dire *360°*, en *60* minutes ; donc en y heures et x minutes elle décrit un angle orienté en degré $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AG}) \equiv -\frac{360\times x}{60}[360]$. Le signe moins vient du fait que le sens des aiguilles d'une montre est rétrograde.

La petite aiguille fait un tour complet, c'est-à-dire *360°*, en *12* heures, donc en y heures x minutes elle décrit un angle orienté en degrés de $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AP}) \equiv -\left(30y + x\times\frac{1}{2}\right)[360]$.

D'après la relation de Chasles :

$$(\overrightarrow{AG},\overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AP}) \equiv (\overrightarrow{AG},\overrightarrow{AP})[360]$$

D'où $(\overrightarrow{AG},\overrightarrow{AP}) \equiv 5{,}5x - 30y[360]$.

Pour *8 h*, on a $x = 0$ et $y = 8$ d'où $5{,}5x - 30y \equiv -240$ [360], donc l'angle saillant est de *120°*.

Pour *10 h 30*, on a $x = 30$ et $y = 10$ d'où $5{,}5x - 30y \equiv -135$ [360], donc l'angle saillant est de 135°.

Et pour *6 h 20*, on a $x = 20$ et $y = 6$ d'où $5{,}5x - 30y \equiv -70$ [360], donc l'angle saillant est de *70°*.

Quatrième méthode[8]. L'aiguille des minutes fait un tour quand l'aiguille des heures fait $\frac{1}{12}$ de tour.

À 8 h l'aiguille des minutes aura fait *8* tours donc l'aiguille des heures aura fait $\frac{8}{12}$ de tour c'est-à-dire $\frac{2}{3}$ de tour, c'est-à-dire qu'entre les deux aiguilles il y a $\frac{1}{3}$ de tour, soit *120°*.

À 10 h 30 l'aiguille des minutes aura fait *10* tours et demi donc l'aiguille des heures en aura fait $\frac{10+\frac{1}{2}}{12}$ de tour c'est-à-dire $\frac{21}{24}$ de tour. L'aiguille des minutes aura parcouru $\frac{1}{2}$ tour c'est-à-dire entre les deux aiguilles il y a $\left(\frac{7}{8}-\frac{1}{2}\right)$ tour soit $\frac{3}{8}$ de tour donc *135°*.

À *6 h 20* l'aiguille des minutes aura fait *6* tours et un tiers de tour donc l'aiguille des heures aura fait $\frac{6+\frac{1}{3}}{12}$ de tour c'est-à-dire $\frac{19}{36}$ de tour. L'aiguille

8. Variante : lorsque l'aiguille des minutes « avance » d'un angle de α degrés, l'aiguille des heures « avance » d'un angle de $\frac{\alpha}{12}$ degrés. On procède alors comme dans cette quatrième technique en remplaçant tour par 360°.

des minutes sera sur la graduation correspondant à 1/3 de tour c'est-à-dire qu'entre les deux aiguilles il y a $\left(\frac{19}{36}-\frac{1}{3}\right)$ de tour soit $\frac{7}{36}$ de tour, donc *70°*.

Análisis praxeológico de actividades agrícolas que movilizan conocimientos matemáticos en un campo de cultivo. El caso de los niños jornaleros agrícolas migrantes

Diana Solares

Aprendizaje de la Lengua y las Matemáticas, Facultad de Psicología, Universidad Autónoma de Querétaro, México.

Abstract. This paper considers the use of analytical tools of the TAD to identify and analyse activities in which mathematical knowledge is mobilized, in a context of agricultural work carried out by migrant families in Mexico. The purpose of this knowledge characterisation is to identify the possible relationships, differences and/or conflicts between mathematical knowledge that occurs in out-of-school situations and knowledge promoted by school, in such a complex reality as the education of children from day labour families.

Résumé. Cette communication propose l'usage d'outils de la TAD pour identifier et analyser des activités qui mobilisent des connaissances mathématiques dans le contexte du travail agricole de familles de migrants, au Mexique. L'objectif de cette caractérisation de connaissances est d'identifier les rapports possibles, les distances et/ou les conflits entre les connaissances mathématiques issues de situations extra-scolaires et les connaissances promues par l'école, dans une réalité aussi complexe que celle de l'aide en matière éducative pour les journaliers agricoles migrants.

Resumen. Esta comunicación pone a consideración el uso de herramientas analíticas de la TAD para identificar y analizar actividades que movilizan conocimientos matemáticos en el contexto del trabajo agrícola de familias migrantes, en México. El propósito de esa caracterización de conocimientos es identificar las posibles relaciones, distancias y/o conflictos entre conocimientos matemáticos que tienen lugar en situaciones extraescolares y los conocimientos que la escuela promueve, en una realidad tan compleja como lo es la atención educativa para alumnos jornaleros agrícolas migrantes.

IV[e] congrès international sur la TAD (Toulouse, 21-26 avril 2013)
Axe 2. *L'analyse praxéologique comme outil de l'analyse et de l'ingénierie didactiques*

Solares, D. (2017). Análisis praxeológico de actividades agrícolas que movilizan conocimientos matemáticos en un campo de cultivo. El caso de los niños jornaleros agrícolas migrantes. Dans G. Cirade et al. (Éds), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* (pp. 501-525). https://citad4.sciencesconf.org

1. Problemática

Según estadísticas oficiales del 2009, casi un millón de niños, niñas y adolescentes menores de 18 años laboran en campos agrícolas de México; dejan sus comunidades y sus propios sembradíos para viajar con sus familias a otros sitios y vender ahí su fuerza de trabajo. Aunque el trabajo infantil está prohibido, debido a la omisión de las autoridades ante las prácticas de explotación de empresas agrícolas, a las condiciones precarias de vida y, en algunos casos, por cuestiones culturales relacionadas con la educación de los hijos, muchas familias incluyen a los menores de edad en ciertos trabajos agrícolas.

Por su condición de migrantes y de trabajadores, estos menores interrumpen constantemente la escuela; por ello hay instancias oficiales que ofrecen la educación primaria a esta población en algunas de las comunidades originarias y en algunos campos de cultivo. Aun así, la reprobación, el ausentismo y la deserción escolar, suelen caracterizar a las trayectorias escolares de varios de los alumnos jornaleros migrantes.

Desde el punto de vista de varios maestros que atienden a estos alumnos, una de las razones de la alta reprobación se debe a deficiencias con la lengua escrita; consideran que las dificultades con las matemáticas no son tan relevantes como sí lo son las deficiencias con la lectura y la escritura. En su opinión, la actividad laboral en la que tempranamente participan estos alumnos les ha permitido adquirir ciertas habilidades de cálculo mental que compensan sus dificultades con la escritura numérica y los algoritmos.

Evidencias obtenidas en los inicios de mi investigación permiten suponer que, debido a las actividades que desempeñan y al contexto social en el que se desenvuelven, estos alumnos han adquirido un dominio de la numeración oral y un cálculo mental eficiente que les permiten enfrentar ciertas situaciones de trabajo. En cambio, esas evidencias muestran que dentro de la escuela varios de estos alumnos tienen serias dificultades para escribir números y para efectuar algoritmos correspondientes a su grado escolar, por lo que es probable que la escuela no les esté resolviendo el acceso a esos conocimientos.

Ante ese panorama, me he planteado las siguientes preguntas: ¿qué conocimientos matemáticos tienen estos alumnos y en qué actividades específicas los usan?, ¿hay vínculos entre los conocimientos que usan en la escuela y los que usan más allá de ella?, ¿lo que aprenden en la escuela les ayuda a enfrentar algunas de las situaciones que viven como migrantes y trabajadores[1]?

En esta comunicación procuro dar cuenta de cómo me apoyo en la noción de praxeología para analizar actividades específicas que tienen lugar en los campos de cultivo agrícola. Tal análisis tiene la intención de caracterizar los conocimientos matemáticos implicados en esas actividades. Asimismo, presento algunos hallazgos sobre los procedimientos de resolución que mostraron algunos niños ante situaciones problemáticas de tipo escolar; la finalidad de esas situaciones es identificar puntos de contacto o de distancia entre conocimientos matemáticos extraescolares y escolares.

2. Escritura numérica y cálculo aritmético en un campo de cultivo

He advertido en distintos campos de cultivo la realización de actividades agrícolas que implican la medición de diferentes magnitudes, el cálculo numérico y la producción e interpretación de documentos escritos. En casi todas esas actividades se recurre a instrumentos para medir y para operar (calculadoras); también en casi todas las actividades tiene lugar la escritura de ciertos datos numéricos. No todos los trabajadores utilizan directamente los instrumentos ni todos tienen acceso a la información numérica escrita, pues eso depende de la participación de cada trabajador en actividades específicas y de su jerarquía laboral. Sin embargo, todos los trabajadores (incluyendo a los niños) saben en mayor o menor grado en qué consisten las actividades agrícolas, cómo se realizan y con qué instrumentos se llevan a cabo. Enseguida describiré una de las actividades agrícolas que ponen en juego la escritura numérica y el cálculo aritmético: el registro del trabajo diario.

La mayor parte de las familias trabajadoras se dedica al corte de frutos, legumbres o granos. Las actividades laborales específicas dependen del

1. Estas preguntas son desarrolladas en la tesis doctoral "Conocimientos matemáticos de niños y niñas jornaleros agrícolas migrantes" realizada bajo la dirección del Dr. David Block, en el Departamento de Investigaciones Educativas del CINVESTAV, México. Los planteamientos teóricos y metodológicos, los hallazgos y reflexiones que se reportan en esta comunicación, forman parte de esa tesis.

producto agrícola que se recolecta, del momento en el que se encuentra su producción y de la forma en que se comercializa. En general, cada una de esas actividades es contabilizada y registrada por parte del área administrativa de los campos de cultivo con diferentes fines; uno de ellos, es determinar el pago semanal de los trabajadores.

En los campos de cultivo que visité en distintas regiones de México identifiqué la figura de los "anotadores", quienes son los encargados de registrar, en el transcurso de la jornada, el número de cubetas, cajas, kilogramos, etcétera, (dependiendo del producto agrícola) que cada trabajador aporta. Hay diferentes formas de ir registrando esas cantidades; una de las más utilizadas es hacer agrupamientos de cinco en cinco (ver figura 1):

Figura 1. Representación del número ocho.

Los anotadores contabilizan esas marcas para obtener el total y después transcriben esos datos numéricos a los formatos que les da la administración (ver figura 2):

REPORTE DIARIO DE TRABAJO

SECC.:

TABLA:

CULTIVO: Cuadrilla NiÑOS

CAMPO: Venados

FECHA: lunes 16 octubre 2006

	No. DE FICHA	NOMBRE	RENDIMIENTO	HRS. LABORADAS	SUELDO
1	60	Federico Temixqueño Celestino			100
2	7999	Laura Celic Maxabel			65
3	3172	Estela antonio flores			65
4	688	Saul mariano Celic			65
5	1032	sergio Temixqueño maxabel			65

Figura 2. Formato de la administración.

La mayoría de adultos y menores entrevistados dijeron que ellos, como cortadores, no escriben nada mientras realizan su trabajo. Sólo un adulto comentó que al llegar a su casa escribe el número de cajas o cubetas recolectadas y hace cuentas con lápiz y papel, para saber cuánto deberán pagarle al final de la semana.

Los registros de los anotadores dan lugar a otros documentos con información numérica; de todos ellos, el que llega a manos de todos los trabajadores es el recibo de pago que genera la empresa a partir de la información de los anotadores. En ese recibo se indica los días trabajados, el ingreso de cada día y la cantidad total a pagar.

En ocasiones hay desacuerdos en los trabajadores por el pago que reciben, pues desde su punto de vista, algunas veces los apuntadores no registran correctamente, provocando con ello que les paguen menos.

Como puede advertirse, los números están presentes con distintos sentidos, según la función que tienen en una actividad específica: como código (número de ficha o número de trabajador); como cardinal (número de cajas recolectadas, salario); como ordinal, (la numeración consecutiva en la lista), entre otros. Por las explicaciones que dieron los menores y adultos entrevistados, se pone de manifiesto que reconocen esa multiplicidad de sentidos.

Tenemos entonces que en una misma actividad hay diversas escrituras numéricas, distintos productores de esas escrituras y diversos usuarios de las mismas. En la producción y usos de esas escrituras se ponen en juego los intereses de los participantes, generando una tensión constante que en ocasiones puede derivar en conflicto. Ese conflicto puede dar lugar al uso de ciertos conocimientos matemáticos, como se mostrará más adelante.

3. Análisis praxeológico de actividades agrícolas que movilizan conocimientos matemáticos

La descripción anterior me permite introducir los aspectos que considero necesarios para caracterizar conocimientos matemáticos implicados en ciertas actividades agrícolas:

- ¿Cuál es el tipo de tareas y cuál es su propósito?
- ¿Quiénes participan y cuáles son las metas de los participantes?
- ¿Cómo resuelven ese tipo de tareas (cuál es la *técnica*) y qué instrumentos usan?
- ¿Cuáles son las explicaciones y justificaciones de la técnica? (cuál es la *tecnología*).

Como podrá advertirse, algunos de los aspectos anteriores tienen relación con lo que la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) considera como componentes de una praxeología.

Para abordar ciertas actividades agrícolas en términos de praxeología, me apoyo en dos planteamientos de la TAD. El primero es que la actividad matemática tiene lugar en diversas prácticas concretas que se realizan en instituciones específicas. Yves Chevallard, Marianna Bosch y Josep Gascón (1997) afirman que no es posible definir una frontera precisa que distinga a las actividades matemáticas de las que no lo son, pero que se pueden distinguir ciertos "gestos" de quien se dice que "está haciendo matemáticas" y esos gestos son identificables en los tipos de actividades que se consideran "genuinamente matemáticas". Partiendo de la concepción de la actividad matemática como un "trabajo de modelización encaminado a resolver problemas", estos autores identifican tres tipos de actividades "genuinamente matemáticas": *utilizar* matemáticas conocidas; *aprender (y enseñar)* matemáticas; y *crear* matemáticas nuevas. En ese sentido, asumo que las familias jornaleras desarrollan actividades matemáticas en ciertas prácticas laborales y de la vida cotidiana que son acotadas por condiciones determinadas. Procuro identificar en qué tipo de tareas las familias jornaleras *usan, aprenden, enseñan, crean o recrean* matemáticas.

El segundo planteamiento en el que me apoyo es que toda actividad humana puede analizarse en términos de praxeología, es decir, que puede tratar de identificarse los "tipos de tareas" que se llevan a cabo en una práctica determinada, las "técnicas" que se emplean para realizar dichas tareas, la "tecnología" que justifica y explica las técnicas, y la "teoría", que a su vez justifica a la tecnología (Chevallard et al., 1997). A partir de este planteamiento procuro identificar *tipos de tareas* presentes en actividades agrícolas específicas, las *técnicas* que se usan para realizar esas tareas y los *discursos tecnológicos* sobre esas técnicas.

Son necesarias dos precisiones sobre el uso que hago de la TAD.

Aun cuando esta teoría no aborda "conocimientos matemáticos" sino praxeologías matemáticas que viven en instituciones específicas, yo uso el término "conocimiento" porque me interesa indagar los procedimientos, las estrategias, los errores y dificultades que los sujetos manifiestan al realizar actividades específicas.

Una segunda precisión es que en los análisis que realizo no incluyo a la componente "teoría" de la praxeología, es decir, no indago los discursos en torno a la tecnología. La razón de ello es que no he identificado esa componente en los discursos de los trabajadores del campo de cultivo. Además, si bien la TAD señala que la actividad matemática tiene lugar más allá de las instituciones dedicadas a la producción y a la enseñanza de las matemáticas, no he identificado estudios que desde esa perspectiva aborden praxeologías matemáticas de instituciones distintas a las escolares.

No obstante, en la TAD empiezan a desarrollarse investigaciones que exploran distintos componentes de la tecnología; se trata de estudios que destacan los elementos "pragmáticos" que se hacen presentes en los discursos junto con los elementos teóricos. Veo en esas investigaciones una posibilidad para analizar praxeologías matemáticas que tienen lugar en el campo de cultivo. Enseguida trataré de justificar este planteamiento.

3.1. La componente pragmática de la tecnología

Según la TAD, la tecnología de una técnica es, etimológicamente, "un discurso racional –el logos– sobre la técnica". Este discurso, según Chevallard (1999), tiene tres funciones: justificar racionalmente la técnica; aclararla, hacerla inteligible, y producir nuevas técnicas.

¿Qué justificaciones y explicaciones sobre la técnica están presentes en los discursos de los trabajadores agrícolas? ¿Cómo abordar la identificación y el análisis de los discursos cuando éstos ocurren en espacios distintos a los escolares?

En el marco de la TAD, Corine Castela (2008) precisa que al lado de saberes claramente definidos por una componente teórica de la tecnología, existe otro tipo de saberes que pueden ser calificados como "operatorios, pragmáticos, prácticos". A ese tipo de saberes los identifica como "componente práctica" de la tecnología.

En las primeras aproximaciones a esos saberes pragmáticos, esta autora identifica aprendizajes relativos a la resolución de problemas que no están prescritos institucionalmente y que no son del todo reconocidos por el "saber-sabio" matemático, pero que son necesarios para que ese saber opere. Castela se procura herramientas que le permitan modelizar esos conocimientos poco visibles. Esa búsqueda la conduce a distinguir dos componentes en la noción de tecnología de la TAD: la componente teórica y la práctica.

Su objetivo al distinguir esas componentes es "disponer de un modelo que sea capaz de tomar en cuenta todas las formas de saberes relativos a una técnica" (Castela, 2011a, p. 51)[2]. Así, al lado de las tres funciones que la TAD atribuye a la tecnología, la autora señala otras seis: *describir, facilitar, motivar, explicar, validar* y *evaluar* la técnica.

Estas funciones han sido precisadas por Avenilde Romo Vázquez (2009), quien hace uso de este "modelo praxeológico extendido" para analizar las praxeologías matemáticas puestas en marcha en un contexto de formación de ingenieros. Una de las contribuciones de ese estudio es poner en evidencia la tensión entre teoría y práctica, particularmente en casos en las que se hace uso de técnicas matemáticas en contextos no matemáticos (Castela y Romo Vázquez, 2011), pues las técnicas y discursos tecnológicos que los ingenieros en formación usan, no son exactamente las reconocidas por los saberes matemáticos, sino que provienen de necesidades específicas de los cursos de ingeniería.

Enseguida se presenta, de manera sintética, la definición de cada una de esas seis funciones. Cabe advertir que la frontera entre algunas de ellas puede no ser del todo clara, probablemente porque algunas de las funciones están incluidas en otras que parecen ser más amplias. La forma en que interpreto y uso estas funciones, podrá verse en el análisis de casos específicos que presento más adelante.

1. La *descripción de la técnica.* Se entiende como "la producción de un discurso descriptivo de gestos que componen una técnica". Castela (2011b, p. 170). Ese discurso descriptivo es importante en el proceso de transmisión de una invención técnica al interior de una comunidad de practicantes.
2. *Facilitar la puesta en funcionamiento de la técnica*. Son saberes que "permiten a los usuarios utilizar la técnica con eficacia pero también con un cierto confort. Son portadores de mejorías pero también de advertencias que evitan errores y torpezas frecuentes" (*Ibídem*, p. 170).
3. La *motivación de la técnica*. Conjunto de saberes orientados hacia los fines de la práctica: "son los objetivos esperados que justifican

2. Ésta y las siguientes citas textuales que se hacen de esta autora, son traducciones mías del francés al español.

racionalmente los gestos mostrando su razón de ser. […] ¿para qué […] cumplir tal gesto en tal momento?” (*Ibídem*, p.171).

4. *Validación de la técnica:* “Se trata de saberes que establecen que la técnica produce bien aquello que dice que produce, que los gestos que la componen permiten esperar los objetivos que le son asignados” (*Ibídem*, p. 171).
5. La *explicación de la técnica.* Alude a una racionalidad en el sentido de “inteligencia de las causas. Se trata de saberes que analizan cómo es que la técnica y sus diferentes gestos permiten lograr bien los propósitos que le son asignados” (*Ibídem*, p. 171).
6. *Evaluación de la técnica*. Este tipo de saberes tienen que ver con “la extensión, las condiciones y los límites de una técnica […] por comparación a otras técnicas posibles, si es que existen. Pueden igualmente concernir a la ergonomía de la técnica desde el punto de vista de sus utilizadores” (*Ibídem*, p. 172).

Castela resalta los vínculos entre algunas de las funciones anteriormente descritas: “Las funciones de evaluar, facilitar y motivar están algunas veces íntimamente asociadas: la puesta en evidencia de ciertas dificultades (*evaluar*) puede comportar al cabo de cierto tiempo la producción de mejorías (*facilitar*) […] la motivación se nutre entonces de la evaluación” (*Ibídem*, p. 172). Subraya además el carácter “localmente situado” de la componente pragmática, pues la considera “relativa a las condiciones de utilización de la técnica por los sujetos de una institución dada” (Castela, 2011a, p. 51).

Apoyándome en los trabajos de Castela y de Romo Vázquez, hago una interpretación de las categorías anteriores según los datos específicos y las necesidades de mi investigación: para dar cuenta de la componente pragmática de la tecnología, centro la atención en los gestos y discursos de los trabajadores agrícolas que tienen el propósito de corregir las técnicas empleadas por algunos trabajadores o que pretenden enseñar ciertas técnicas a quienes recién se inician en las labores agrícolas. Mi interés es identificar si algunos de esos discursos se apoyan en conocimientos matemáticos o si tienen incidencia en éstos.

3.2. La escritura y el cálculo numérico en términos de praxeologías

El campo de cultivo en el que centré mi observación está dedicado al cultivo de las uvas y de los espárragos (en el estado de Sonora, al norte de México).

A los trabajadores se les paga por el número de cajas que logran recolectar diariamente. Para ello, cada trabajador debe marcar cada una de sus cajas escribiendo en ella el número de trabajador que la administración le ha asignado. Por su parte, el anotador de cada cuadrilla hace una primera relación (una lista) en la que anota el nombre y número de cada trabajador.

Hacer la lista de los trabajadores y marcar las cajas con un número, forman parte de los múltiples *tipos de tareas* que tienen que ver con la organización y el control del trabajo diario en el campo de cultivo [3].

Hay al menos tres tipos de tareas a cargo de los anotadores: hacer las listas de trabajadores, anotar las cajas de uvas obtenidas por cada trabajador y registrar las cajas de uvas que son enviadas al almacén. Los documentos que se generan en esos tipos de tareas se definen con un verbo específico: “hacer la lista”, “anotar las cajas”, “hacer las notas”… Los anotadores usan esas expresiones para hablar tanto del documento en sí mismo como de las acciones en torno a su elaboración.

Una vez que han elaborado la lista, los anotadores hacen otro documento: toman de la lista el número de cada trabajador (sin el nombre) y lo escriben en un cartón (ver figura 3):

Figura 3. Registro del número de cajas de uva.

3. Un “tipo de tareas”, según la TAD, se expresa de forma precisa mediante un verbo; por ejemplo: *dividir* un entero por otro, o *resolver* un problema matemático escolar determinado.

Frente a cada número irán colocando una marca por cada caja de uvas que recolecte el trabajador, usando la notación que se mostró en la figura 1.

Para que los anotadores puedan ir registrando las cajas recolectadas por cada uno de los trabajadores, es necesario que éstos escriban su número de trabajador en uno de los costados de la caja, como se mencionó anteriormente. Además de su número, los trabajadores deben registrar la calidad de la uva: escriben X si es de primera calidad y XX si es de segunda. En el primer caso se trata de cajas que serán para exportación, en el segundo caso serán para consumo nacional. Las cajas se apilan según la calidad de las uvas.

Una vez que hay varias cajas apiladas, los anotadores proceden a registrar en el cartón las cajas de cada trabajador, sin importar si es de primera o de segunda calidad. Cada vez que contabilizan una caja trazan una línea en uno de los costados para indicar que ya fue registrada. Algunas ocasiones a los trabajadores se les olvida escribir su número en alguna caja; esas cajas se registran y contabilizan como “s/n” (sin número).

En diferentes momentos de la jornada llegan camiones para recoger cajas llenas y transportarlas al almacén. Cada vez que un camión transporta cajas, el anotador debe registrar cuántas se lleva, qué tipo de uvas son y de qué calidad. Esto se hace en una “nota de remisión”. Se hace una nota por “cada viaje”, los encargados del camión se quedan con la nota original y los anotadores se quedan con la copia. Esas copias se usarán después para “cuadrar”, esto es, para ver si coincide el total de lo que se registró en los cartones y el total de las notas de remisión. Para realizar esas últimas cuentas los anotadores suelen usar la calculadora.

Se genera entonces una “cadena de documentos” en la que los datos numéricos de un documento sirven para la elaboración de otro. Asimismo, la información de cada uno de ellos sirve como medio de verificación cuando hay una diferencia o conflicto entre los distintos participantes.

Si bien centro la atención en los tipos de tareas que llevan a cabo los anotadores, considero también el control de cantidades que llevan a cabo los cortadores, quienes contribuyen en la generación de los registros de los anotadores y producen a la vez sus registros propios.

Identificación de técnicas y de discursos tecnológicos

Hay distintas técnicas para marcar el número de cajas o cubetas, las siguientes son algunas formas que he identificado de representar el número 10 (ver tabla 1):

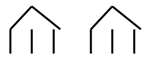
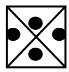
Forma 1	
Forma 2	
Forma 3	

Tabla 1. Distintas técnicas para contabilizar.

Algunos anotadores comentaron que algunas de ellas son más útiles que otras cuando hay mucha producción y hay que registrar muy rápido (la Forma 1 es más práctica que la 2); asimismo, la Forma 3 se usa cuando no hay mucho espacio para registrar, pues mientras que con un solo cuadro se registran 10 cubetas o cajas, se necesitaría de dos figuras de la Forma 2 para registrar esa misma cantidad.

La supervisora de los anotadores del campo de cultivo comentó que la Forma 1 es la mejor manera de registrar. Su argumento es que al ser un sistema fácil, ordenado y “visible”, hay mayores posibilidades de evitar errores, y si éstos llegaran a ocurrir es fácil identificarlos. La supervisora destaca esas ventajas sobre todo cuando hay reclamos por parte de los cortadores:

> Aquí tenemos este sistema, más fácil de encontrar un error […] los que están empacando a veces desconfían del apuntador […] desconfían, dicen a la mejor se les pasaron cajas […] yo les explico [a los apuntadores]: […] si alguien viene y ve su trabajo y lo ve que está ordenado, y si reclama algo, entonces ustedes tienen un fundamento para decir: sabe qué, pues yo creo que he estado apuntando bien, está ordenado.

El ejemplo anterior permite mostrar el carácter pragmático de ese discurso en torno a la técnica, particularmente, las funciones que cumple de *facilitar la puesta en funcionamiento de la técnica* y *motivar el uso de la técnica*: cuando la supervisora afirma que al marcar con rayas en grupos de cinco *es* *más fácil* encontrar un error, subraya el hecho de que esa técnica es “visible” y, con ese argumento, trata de *motivar* a los anotadores para que registren sólo de esa manera, puesto que eso les permitirá tener un trabajo más ordenado y confrontar los posibles reclamos de los otros trabajadores. Evitar conflictos con los cortadores parece ser la principal motivación para usar esa técnica de registro.

Una de las formas de probar que la técnica funciona, es cuando los anotadores verifican que las cuentas “cuadran”: debe coincidir el total de cajas registradas en los cartones, con el total de cajas registradas en las notas de remisión (que son las cajas transportadas al almacén). Si los números coinciden o “cuadran”, esto permite al apuntador mostrar a sus superiores que su trabajo estuvo bien hecho y al mismo tiempo confrontar las posibles diferencias con los otros trabajadores. Si efectivamente un trabajador tiene registradas en el cartón menos cajas que las que obtuvo, la diferencia aparecerá al comparar con el total de cajas enviadas al almacén y que fueron registradas en las notas de remisión.

“Cuadrar” las cantidades es a la vez la técnica para verificar su conteo y su argumento ante las diferencias.

Por el lado de los cortadores, su reclamo puede tener cabida hasta que reciben el cheque junto con el talón de pago, el cual trae la información de cuánto se ganó por cada día. ¿Cuáles son las técnicas de los cortadores para llevar un control de sus propias cantidades y cómo se confrontan con los de los anotadores?

En las entrevistas que se realicé a algunos cortadores, que son padres y madres de algunos de los alumnos de la primaria, aparecen dos formas de llevar el control de las cantidades: una es apoyándose en la memoria y otra es registrando por escrito, aunque sólo uno de los trabajadores entrevistados señaló que apunta las cajas que entrega. Ambas formas comparten una misma estrategia: cada vez que un trabajador lleva cajas de uvas para que se las revisen y, en su caso, las aprueben, procuran que sean en cantidades de cinco o de diez, pues son números que les resultan fáciles de controlar, ya sea en la memoria o por escrito.

El cortador que sí registra sus propias cajas afirma que es importante apuntar porque si sólo se usa la memoria y si el anotador registra una cantidad diferente, no hay manera de reclamar y habrá que conformarse con lo que diga el anotador. Aunque también acepta que a diferencia de los registros de los anotadores, los suyos no tienen una validez “oficial” al interior del campo de cultivo.

4. Caracterización de los conocimientos matemáticos implicados en el registro del trabajo diario

Las actividades agrícolas descritas ponen en contacto a estos niños y a sus familias con conocimientos matemáticos como los siguientes: el conteo, sistemas de representación de cantidades (desde grafías que se corresponden uno a uno con las cantidades, hasta números escritos convencionales) y distintos significados de los números escritos (como código, cardinal y ordinal).

Contar y calcular son dos tipos de tareas mutuamente implicados y que se llevan a cabo tanto por los cortadores como por los anotadores, aunque hay diferencias notables en la complejidad del conteo y el cálculo que cada uno de ellos realiza: los cortadores cuentan y agrupan de cinco en cinco o de diez en diez, ya sea por escrito o en la memoria. En cambio, los anotadores deben contar cantidades mucho mayores y en el mismo momento en que se van produciendo; aun cuando usan representaciones gráficas uno a uno, con formas básicas de agrupamiento de cinco elementos, al final deben cuantificar usando números decimales y deben hacerlo en dos registros que luego deben “cuadrar”. Para esto último hacen sumas; la mayoría de ellas son efectuadas con calculadora.

La complejidad de los conocimientos matemáticos implicados depende entonces de la función laboral y de la jerarquía de los participantes. Por ello, para caracterizar tales conocimientos se requiere considerar el tipo de tareas, la función y jerarquía de los participantes, las técnicas y los instrumentos empleados, así como los discursos tecnológicos en torno a la ejecución de la tarea.

Un elemento más que permite caracterizar la complejidad de las tareas y de los conocimientos implicados, es considerar si el control de las cantidades es para uno mismo o para que sea interpretado por otros. Este elemento está implícito en la función y jerarquía de los participantes, pero es necesario destacarlo, pues tiene un papel relevante en la producción de técnicas: en el caso de los anotadores, ellos deben efectuar la tarea como se los demandan sus superiores y, al mismo tiempo, deben anticiparse a las posibles diferencias que pudieran tener con los cortadores. Varias de las “razones de ser” que los anotadores dan sobre la manera en que deben ejecutar esas tareas, dan cuenta de la consideración de ambas demandas.

Por su parte, los cortadores requieren de un control que les permita confrontar al final de la semana sus propias cuentas con lo que les reporta el cheque que reciben. El hecho de que su propio control no tenga una función ni una validez equivalente al registro de los anotadores (no es requerido por otros usuarios), parece tener incidencia en los alcances de las técnicas utilizadas: el cortador registra para sí mismo, no hay exigencias de que el registro sea claro para otros, no hay tampoco una técnica compartida para llevarlo a cabo ni una enseñanza explícita sobre el mismo. Los conocimientos matemáticos implicados son, por lo tanto, menos comunicables y también menos complejos.

5. Las deudas de la tienda. Técnicas y tecnología silentes

Otra de las situaciones relacionadas con la interpretación de información numérica y con el cálculo numérico, es la compra de víveres en el campo de cultivo.

Los sábados es el día en que se paga a las familias el trabajo de la semana; este pago se hace mediante un cheque. Mientras llega el día de pago, en el transcurso de la semana las familias van adquiriendo víveres a crédito en las tiendas que existen en el campo de cultivo. El sábado, una vez que han recibido el cheque, pagan esas deudas.

Tales deudas son registradas en dos libretas, en la del cliente y en la del dueño de la tienda (ver figuras 4 y 5, respectivamente):

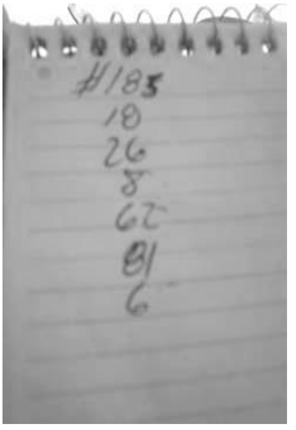


Figura 4. Libreta de deudas del cliente.

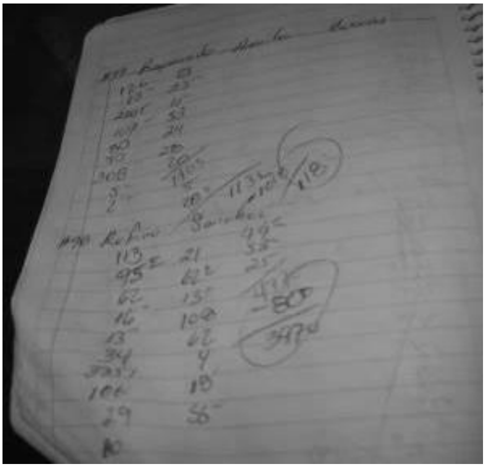


Figura 5. Libreta de deudas del dueño de la tienda.

Lo que se registra en ambos documentos son números, no hay nombres de los productos. Esos números expresan dinero; en el caso de la libreta del cliente hay además un número que identifica al cliente (#185). Tanto para el dueño de la tienda como para las familias es necesario tener un control de las deudas que se adquieren y de su pago. El medio principal para llevar ese control son las respectivas libretas. Cuando una deuda ha sido saldada, el dueño tacha el registro en su libreta, mientras que las familias arrancan de su propia libreta la hoja en la que se registró la deuda. Cabe resaltar que no son las familias quienes escriben sus deudas en su propia libreta, sino los dueños de la tienda.

Al igual que con los registros del trabajo diario, en el caso de las deudas tenemos una actividad en la que hay distintos participantes con propósitos también distintos: del lado de las familias, su propósito es pagar sólo aquello que compraron y la suma exacta de lo que compraron; mientras que del lado de los vendedores es cobrar lo que el otro adquirió. Desde el punto de vista de algunas familias, los de la tienda generalmente intentan cobrarles más de lo que se compra.

Para calcular el total de las deudas, los dueños recurren tanto a la calculadora como a los algoritmos escritos, mientras que las familias utilizan la calculadora, el cálculo mental y se apoyan también en sus experiencias de consumo (tienen una idea de cuánto consumen a la semana, con base en ello valoran si el cobro es el correcto o no). Sólo una familia dijo usar el cálculo escrito. Las familias suelen realizar sus propios cálculos antes de presentarse a pagar en la tienda.

Es necesario considerar que la mayoría de los padres y madres de familia no han asistido a la escuela o tienen una escolaridad limitada; por ello, cuando hay diferencias con los cálculos de los dueños de las tiendas, se apoyan en los hijos más escolarizados para confrontar a los dueños.

Las condiciones en que se da el pago de las deudas me motivó a explorar qué técnicas ponen en juego las familias para hacer sus cálculos y qué discursos tecnológicos se transmiten entre los miembros de la familia para controlar el pago de las deudas. Esa indagación resultó sumamente difícil, pues a diferencia de las actividades laborales en las que se explicitan las técnicas y los discursos en torno a ellas, en las prácticas relacionadas con la compra de víveres esos discursos no son tan evidentes.

Una posible explicación de esa diferencia es que en el mundo laboral hay relaciones didácticas más fuertes y explícitas: por motivaciones diferentes, hay un gran interés tanto de la empresa como de las familias en que todos aprendan a realizar las tareas agrícolas; la enseñanza tiene un lugar relevante. Además, al interior de una misma familia se procura la circulación de los conocimientos entre sus miembros, pues los ingresos económicos de la familia dependen en buena medida de saber hacer el trabajo.

En cambio, las prácticas relacionadas con la compra de víveres, si bien son importantes para la sobrevivencia familiar, su enseñanza no es evidente. Incluso, aun cuando durante las entrevistas los padres dieron cuenta de ciertos “gestos” y actitudes que tienen el propósito de orientar a sus hijos cuando se trata de hacer las compras, no reconocen en ello una enseñanza.

Por lo anterior, tuve necesidad de profundizar en las indagaciones sobre las estrategias de resolución de los niños ante situaciones de compra-venta. Esto se describe en el apartado siguiente.

6. Estrategias de los niños al enfrentar problemas aditivos

Puesto que me interesan los procedimientos que estos niños ponen en marcha más allá de la escuela, así como los que la escuela les enseña, me propuse plantear situaciones problemáticas que *simularan* algunas de las que se llevan a cabo en los campos de cultivo. Para ello, apoyándome en la caracterización que hice en términos de praxeología de las actividades anteriormente descritas, diseñé situaciones problemáticas que fueron presentadas a seis alumnos de grados superiores de la educación primaria; la mayoría de ellos ha trabajado.

Tomo elementos del pago semanal a los trabajadores y de las deudas de la tienda, para plantear situaciones en las que los alumnos deben desempeñar el papel de quien revisa los pagos o del dueño de la tienda. El propósito es poner a los sujetos en una situación problemática que los lleve a tomar decisiones que requieren de la estimación y de cálculos aritméticos.

Mediante esas simulaciones pretendo obtener información sobre cómo los alumnos leen, escriben y forman cantidades, cómo resuelven problemas aditivos y cómo resuelven problemas multiplicativos.

Para el diseño de las situaciones problemáticas me apoyé fundamentalmente en planteamientos de la teoría de las situaciones didácticas. Procuro que las situaciones problemáticas puedan abordarse con los recursos de los alumnos, aunque esos recursos no sean los “óptimos” para encontrar la solución. Me interesa saber cuáles son esos recursos, cuáles son sus alcances y limites.

6.1. Descripción de los problemas aditivos

Se plantearon dos tipos de situaciones: el cobro de las deudas de la tienda a partir de los registros numéricos de una libreta de deudas y calcular el pago de un día de trabajo a partir de los datos numéricos de un talón o recibo de cheque.

En lo que se refiere al cobro de las deudas, se le pidió a cada niño o niña que se pusiera en el papel del dueño de la tienda y que, a partir de lo registrado en una libreta de deudas, hiciera cobros a la entrevistadora, quien hacía el papel de “cliente.” Había quince cantidades registradas, todas ellas de dos cifras y algunas con números decimales.

Al inicio se pedía a cada alumno que cobrara sólo una cantidad, posteriormente en función de su desempeño, se aumentaba el número de cantidades que debían ser cobradas al mismo tiempo.

Una vez que cada alumno decía el monto a cobrar, se le entregaba una cantidad de dinero de tal manera que hubiera un sobrante (“el cambio”) que debía ser devuelto al cliente. Se puso a disposición de los alumnos papel, lápiz y calculadora, por si querían utilizarlos.

Para calcular el pago de un día de trabajo se usaron recibos de cheque de campos de cultivo. Una de las situaciones que se les planteó, fue obtener una cantidad faltante (el pago correspondiente a un día de trabajo) conociendo el total de lo que se pagó en una semana y las cantidades que corresponden a los otros días.

6.2. Principales hallazgos

Tanto en la situación del cobro de deudas como en la de encontrar un valor faltante en los recibos, es necesario hacer primero una suma de cantidades parciales y, posteriormente, calcular la diferencia entre dos cantidades.

Todos los niños y niñas participantes identificaron la operación de la suma y la realizaron ya sea mediante el algoritmo escolar habitual, con la calculadora, o mediante el conteo apoyándose en los dedos o en el trazo de rayas. En cambio, para calcular la diferencia sólo un niño utilizó la técnica que predominantemente se enseña en las escuelas: el algoritmo de la resta por columnas en el que se desagrupa centenas en decenas y decenas en unidades. Los demás recurrieron a la búsqueda del complemento aditivo, procedimiento que consiste en encontrar la diferencia entre dos cantidades buscando el número que, sumado al sustraendo, permite llegar al minuendo.

Se presentaron diversas maneras de hallar el complemento aditivo, principalmente mediante el cálculo mental y la calculadora; en pocas ocasiones se recurrió a la escritura numérica, cuando ésta apareció fue sobre todo para apoyar el cálculo mental.

Destacaré algunos de los recursos en los que los alumnos se apoyaron para resolver problemas aditivos, así como los alcances y limitaciones de esos recursos.

El cálculo mental fue lo más utilizado. Se revela un cálculo mental "flexible" al apoyarse en recursos tales como la memoria, los dedos, la escritura e incluso la calculadora; asimismo, aparece una estrategia general que consiste en obtener cantidades que terminen en cero, lo cual permite a los alumnos operar de una manera "cómoda".

También hubo quienes no contaban con estrategias específicas de cálculo mental, pero lo efectuaban recurriendo al ensayo y error, aproximándose sucesivamente al resultado. Llama la atención que la escritura numérica y la calculadora hayan servido como apoyos tanto para las búsquedas por ensayo y error, como para la estrategia de obtener cantidades terminadas en cero, como se describe enseguida.

En el transcurso de sus cálculos mentales, los alumnos solían escribir algún número para apoyar a su memoria. "Para que no se me olvide", decía una alumna. En menor medida, la escritura se usó para establecer relaciones entre cantidades y para hacer cálculos numéricos. Este último uso no incluye a los algoritmos que predominan en la enseñanza escolar, sino que se refiere a formas "híbridas" en las que se combinan rasgos de los algoritmos con procedimientos de cálculo mental o con técnicas "artesanales"[4]. Por ejemplo, una alumna usó la escritura numérica como medio para "descomponer" el minuendo en decenas y unidades y así poder restar el sustraendo; es una técnica que "se aproxima" al algoritmo de la resta habitual.

En lo que se refiere a la calculadora, ésta fue utilizada para obtener la suma de varias cantidades, para buscar el complemento aditivo por aproximaciones y para verificar mediante la suma si un número era efectivamente el complemento aditivo buscado. En estos dos últimos casos la calculadora fue un apoyo para el cálculo mental.

Si bien hay una diversidad de usos de la calculadora, no la hay en cuanto a las operaciones que se hacen con ella, pues básicamente se usa sólo para

---

4. Belmonte (2003, p. 146) denomina *técnica de cálculo artesanal* a "aquella que no es definitiva ni general, como los algoritmos usuales por ejemplo, y que tiene todavía carencias, de economía o de dominio de aplicabilidad […]".

hacer sumas. Este uso preponderante de la suma puede tener relación con el desconocimiento de las técnicas para realizar las otras operaciones (por ejemplo, para resolver una división puede sumarse cuantas veces sea necesario un cociente estimado), como lo muestran estudios sobre conocimientos matemáticos de adultos no alfabetizados (Emilia Ferreiro, et al, 1987; Alicia Ávila, 1988).

Por último, subrayaré una ausencia relevante en los procedimientos de los alumnos: seguramente todos los alumnos conocen la resta, pero todavía no la relacionan con problemas en los que se busca cuánto se debe sumar a una cantidad para obtener otra (si $a + x = b$, entonces $x = b – a$), lo cual pone de manifiesto la ausencia de un conocimiento: la resta como medio para encontrar un sumando faltante.

Tratando de interpelar a la escuela, me pregunto respecto al uso de las calculadoras: ¿cómo es que este instrumento se ha convertido en un objeto tan cotidiano en las familias?, ¿cómo puede estar influyendo en los aprendizajes matemáticos de los alumnos?

Las formas diversas en que los alumnos usaron la calculadora permite aproximarnos a la apropiación que han hecho de ese instrumento. Asimismo, dan cuenta de ciertas funciones de la calculadora que no están siendo explotadas. Probablemente esa “sub-utilización” se relaciona con los alcances y límites de los conocimientos matemáticos de los alumnos.

Es probable que las ausencias de la técnica escolar de la resta en los procedimientos de los alumnos, sea efecto de la enseñanza escolar, la cual favorece la resta en su sentido de “quitar”, dejando del lado problemas en los que se trata de hallar el complemento aditivo.

Los alcances y límites de las estrategias usadas por los alumnos interpelan a la escuela en cuestiones como las siguientes: ¿cuál es la pertinencia de enseñar algoritmos cuando la calculadora ocupa un lugar predominante en las estrategias de los alumnos?, ¿cómo podría la escuela aprovechar de mejor manera la calculadora para promover los aprendizajes escolares?

7. Conclusiones

El propósito de caracterizar algunos de los conocimientos matemáticos de esta población, es identificar las posibles relaciones, distancias y/o conflictos entre conocimientos matemáticos escolares y extraescolares. Para realizar tal caracterización, me he dado a la tarea de buscar alternativas teóricas y metodológicas que me permitan analizar actividades agrícolas que ponen en juego conocimientos matemáticos.

Apoyándome en la TAD y en otras perspectivas teóricas de campos ajenos a la didáctica, a las que no pude dar espacio en esta comunicación, he establecido los siguientes "aspectos caracterizadores" tanto de actividades específicas como de los conocimientos matemáticos que en ellas se movilizan: ¿Cuál es el tipo de tareas a realizar y cuál es su propósito?, ¿Quiénes participan y cuáles son las metas de los participantes?, ¿Cómo resuelven esa tarea y qué instrumentos usan? (¿Cuál es la técnica?), ¿Cuáles son las explicaciones y justificaciones de la técnica? (¿Cuál es la tecnología?).

A la luz de los hallazgos obtenidos, considero que esos aspectos constituyen unas "lentes" que efectivamente permiten identificar no sólo conocimientos específicos sino también las funciones de esos conocimientos, sus alcances y límites. Para la construcción de esas "lentes" la TAD ha jugado un papel fundamental, y para ello ha sido necesario experimentar un poco con algunas de sus categorías, procurar su uso más allá del terreno escolar e indagar en otros estudios que, desde el mismo marco teórico de la TAD, despliegan el abanico de posibilidades de la misma teoría. En ese sentido, considero que la TAD es una fuente rica de recursos teóricos y metodológicos que debo seguir explorando.

Uno de los aprendizajes pendientes, es explorar con mayor cuidado los gestos y otras expresiones no verbales que tienen lugar en las relaciones didácticas al interior de las familias. Para ello convendrá profundizar en la noción de "institución", así como en otros estudios antropológicos no didácticos sobre procesos de "participación guiada" en comunidades indígenas (Barbara Rogoff et al, 2003).

Asimismo, está pendiente caracterizar en términos de praxeología algunas de las actividades escolares que estos alumnos viven en clase, para confrontarlas con las praxeologías identificadas fuera de la clase.

En lo que se refiere a los conocimientos matemáticos identificados en el campo agrícola, se hace evidente que si bien hay una riqueza de información numérica, los conocimientos matemáticos en juego dependen de la función y jerarquía laboral de los trabajadores. Por lo tanto, no es suficiente el hecho de que la producción y circulación de números escritos sea notable para concluir que los niños y sus familias participan ampliamente de los conocimientos matemáticos en juego.

Un factor que parece movilizar los conocimientos matemáticos es el conflicto. Cuando hay diferencias, tiene lugar la confrontación de datos numéricos y de los cálculos y es cuando la escritura numérica cobra un alto valor. Poder reconocer qué números escribió el otro y qué cálculos hizo el otro, es fundamental. Esto me lleva a reflexionar sobre una de las funciones que tradicionalmente se le ha asignado a la escuela: enseñar a leer y a escribir y a hacer cuentas. Pero "leer y escribir números y hacer cuentas" no se limita a una codificación de la escritura ni a la ejecución correcta de algoritmos, pues para interpretar los sentidos de la escritura y de las cuentas se requiere saber también para qué sirve el documento que contiene esos números, quién lo escribe y para qué. Para hacer esas "otras lecturas" la intervención de la escuela es fundamental: ésta puede asumir la tarea de potenciar las habilidades de cálculo de las familias y de los niños con la finalidad de contribuir a su posicionamiento frente a otro con mayor poder, sea el dueño de la tienda o el patrón mismo.

A partir de lo anterior, cobra relevancia seguir indagando cómo podría la escuela servirse de los conocimientos identificados para impulsar el aprendizaje escolar y, por otro lado, cómo el conocimiento escolar podría contribuir para que las familias enfrenten con mayores elementos ciertas situaciones que el trabajo y la migración les imponen.

Por último, cabe señalar que si bien la investigación aporta elementos que permiten identificar saberes matemáticos y necesidades educativas de los jornaleros migrantes, considero que aquello que pudiera caracterizarse como "lo específico" de esta población, podría informarnos de la especificidad de otras poblaciones en condiciones similares, como son los menores trabajadores urbanos. Incluso, considero que los hallazgos de esta investigación pueden ayudarnos a identificar problemáticas similares que afectan a la población "en general", pero que por distintas circunstancias se "mimetizan" haciéndolas menos evidentes.

Referencias

Ávila, A. (1988). *Las estrategias de cálculo aritmético de los adultos no alfabetizados.* (Tesis de Maestría). México: Facultad de Filosofía y Letras, Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM).

Belmonte, J. (2003). El cálculo en la Enseñanza Primaria. La adición y la sustracción. En M. Chamorro (Eds.), *Didáctica de las matemáticas para primaria*. Madrid: Pearson.

Castela, C. (2008). Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherches en didactique des mathématiques, 28*(2), 135-182.

Castela, C. (2011a). *Des mathématiques à leurs utilisations, contribution à l'étude de la productivité praxéologique des institutions et de leurs sujets. Le travail personnel au cœur du développement praxéologique des élèves en tant qu'utilisateurs de mathématiques* (Note de synthèse pour l'habilitation à diriger des recherches). Université Paris Diderot.

Castela, C. (2011b). Développer le modèle praxéologique pour mieux prendre en compte la dynamique des savoirs. En M. Bosch et al. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 163-185). Barcelona, España: CRM.

Castela, C. & Romo, A. (2011). Des mathématiques à l'automatique : étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en didactique des mathématiques, 31*(1), 79-130.

Chevallard, Y. (1999). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. En R. Noirfalise (Ed.), *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques* (pp. 91-118). Clermont-Ferrand: IREM.

Chevallard, Y., Bosch, M. & Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelone, Espagne : ICE-Horsori.

Ferreiro, E., Fuenlabrada, I., Nemirovsky, M., Block, D. & Dávila, M. (1987). *Conceptualizaciones matemáticas en adultos no alfabetizados.* México: DIE-CINVESTAV.

Rogoff, B., Paradise, R., Mejía, R., Correa, M. & Angelillo, C. (2003). Firsthand learning through intent participation. *Annual Review of Psychology, 54,*175-203.

Romo Vázquez, A. (2009). *La formation mathématique des futurs ingénieurs.* (Tesis doctoral). Université Paris 7.

Solares, D. (2012). *Conocimientos matemáticos de niños y niñas jornaleros agrícolas migrantes.* (Tesis doctoral). México: Departamento de Investigaciones Educativas del Centro de Investigación y Estudios Avanzados.

Axe 3
Entre visite des œuvres et questionnement du monde

Eje 3
Entre la visita a las obras y el cuestionamiento del mundo

Axis 3
From visiting works to questioning the world

Modificación de las praxeologías didácticas del profesorado: un programa de desarrollo profesional en torno al aprendizaje por investigación

Fco. Javier García García

Dpto. Didáctica de las Ciencias, Universidad de Jaén, España

Abstract. The European project PRIMAS aims at promoting an evolution in mathematics and science teachers' practices towards inquiry based learning. For that, a wide professional development programme has been designed, and it is being implemented in participating countries. In this paper, this professional development programme is analysed and questioned, with the aim of determining, a priori, to what extent the programme could achieve its objective. As a conclusion, the potential impact PRIMAS programme might have on the evolution of teachers' professional praxeologies is discussed.

Résumé. Le projet européen PRIMAS vise à promouvoir l'évolution des pratiques d'enseignement des professeurs de mathématiques et de sciences, par le biais de l'introduction de la démarche d'investigation (*inquiry-based learning*). Pour ce faire, un programme de développement professionnel ambitieux a été conçu et mis en œuvre. Dans cet article, nous analysons et questionnons la conception de ce programme afin de déterminer *a priori* dans quelle mesure il peut atteindre son objectif. En guise de conclusion, nous examinons l'impact potentiel que ce programme peut avoir sur l'évolution des praxéologies professionnelles des enseignants y participant.

Resumen. El proyecto europeo PRIMAS tiene por objetivo promover una evolución de las prácticas docentes del profesorado de matemáticas y ciencias, hacia metodologías orientadas a la investigación (*inquiry-based learning*). Con este fin se ha diseñado, y se está implementando, un ambicioso programa de desarrollo profesional. En este artículo analizamos y cuestionamos el diseño de dicho programa con el objetivo de determinar, a priori, hasta qué punto puede cumplir con su objetivo. A modo de conclusión, procederemos a discutir el potencial impacto que dicho programa puede tener en la evolución de las praxeologías profesionales del profesorado participante.

IV^e congrès international sur la TAD (Toulouse, 21-26 avril 2013)

Axe 3. *Entre visite des œuvres et questionnement du monde*

García, F. J. (2017). Modificación de las praxeologías didácticas del profesorado: un programa de desarrollo profesional en torno al aprendizaje por investigación. Dans G. Cirade et al. (Éds), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* (pp. 529-556). https://citad4.sciencesconf.org

1. Introducción

La presente comunicación surge del trabajo de los autores, junto con otros investigadores de la Universidad de Jaén y de otras 13 universidades europeas, en el proyecto europeo «Promoting Inquiry in Mathematics and Science Education across Europe» (PRIMAS [1]).

El objetivo fundamental de PRIMAS es promover un cambio en la enseñanza de las matemáticas y las ciencias a nivel europeo, tanto en el nivel de primaria como en secundaria, orientando dicha enseñanza hacia lo que se conoce como el *aprendizaje por investigación* (*inquiry-based learning*, IBL).

Entre otras muchas acciones, una parte nuclear del proyecto se centra en el diseño e implementación de un programa de desarrollo profesional orientado a modificar las prácticas docentes del profesorado, junto con la evaluación de su impacto. De acuerdo con la literatura existente en torno al desarrollo profesional del profesorado, dos son los retos más importantes afrontados. De un lado, el de la *efectividad* (Loucks-Horsley et al., 2003; Joubert & Shutherland, 2009; Tirosh & Graeber, 2003) del programa, entendiendo por efectividad su capacidad para transformar las prácticas del profesorado en la dirección establecida. De otro lado, el de su implementación y evaluación más allá del nivel local, que suele ser el ámbito en el que tradicionalmente se circunscribe la mayor parte de la investigación en desarrollo profesional del profesorado (Adler et al., 2005).

1. Project coordination: University of Education, Freiburg (Germany). Partners: University of Genève (Switzerland), Freudenthal Institute, University of Utrecht (The Netherlands), MARS - Shell Centre, University of Nottingham (UK), University of Jaen (Spain), Konstantin the Philosopher University in Nitra (Slovak Republic), University of Szeged (Hungary), Cyprus University of Technology (Cyprus), University of Malta (Malta), Roskilde University, Department of Science, Systems and Models (Denmark), University of Manchester (UK), Babes-Bolyai University, Cluj Napoca (Romania), Sør-Trøndelag University College (Norway), IPN-Leibniz Institute for Science and Mathematics Education at the University of Kiel (Germany)."
The research leading to these results has received funding from the European Union Seventh Framework Programme (FP7/2007-2013) under grant agreement n° 244380. This paper reflects only the author's views and the European Union is not liable for any use that may be made of the information contained herein.

En esta comunicación nos centraremos en el primer reto, analizando desde la teoría antropológica de lo didáctico el diseño del programa de desarrollo profesional PRIMAS y su potencial capacidad transformadora.

2. Desarrollo profesional del profesorado

En primer lugar, comenzaremos fijando qué entendemos por *desarrollo profesional del profesorado*. Como punto de partida podemos tomar la definición del informe TALIS [2] de la OCDE: «professional development is defined as activities that develop an individual's skills, knowledge, expertise and other characteristics as a teacher […]» (OCDE, 2009, p. 49). Aunque muy genérica, esta definición esboza los grandes ámbitos en torno a los que se suele estructurar la investigación en la formación del profesorado. Por un lado, el relativo al conocimiento profesional del profesor, de otro lado el relativo a las destrezas propias de la profesión. En «otras características» se suele englobar un tercer eje, no disjunto con los anteriores, que tiene que ver con las creencias y actitudes del profesorado (Tirosh & Graeber, 2003).

La definición anterior engloba tanto a la formación inicial de profesorado como a la formación continua. Sin embargo, es normal emplear el término «desarrollo profesional» para referirse a la formación continua, y en este sentido lo usaremos a partir de ahora.

Todo programa de desarrollo profesional persigue el *crecimiento profesional* del profesorado, en términos de cambios en su *conocimiento profesional, creencias y estrategias docentes* (Sowder, 2007). Diferentes autores (Clarke, 1994; Loucks-Horsley et al., 2003; Hawley & Valli, 1999; Schwan Smith, 2001; Elmore, 2002; Tirosh & Graeber, 2003) han propuesto características que debería cumplir un programa de desarrollo profesional para que sea efectivo. Tirosh y Graeber (2003), basándose en numerosos autores, analizan los principios de efectividad centrándose en el *contenido* y en los *procesos* del programa de desarrollo profesional.

En relación con el *contenido*, consideran que un programa de desarrollo profesional efectivo debe:

---

2. Teaching and Learning International Survey.

- Tener como objetivo fundamental el *aprendizaje de los estudiantes* y cómo este se produce, y no sólo una técnica o herramienta de enseñanza específica.
- Estar fundamentado en el *conocimiento matemático* que los profesores tienen que enseñar, entendido en el sentido de abordar la matemática escolar desde una perspectiva más profunda, amplia y sólida.
- Estar conectado con y servir de apoyo a las prácticas docentes del profesorado (practice-based profesional development). La *planificación de una lección, la observación de los estudiantes, el análisis de sus respuestas*, etc. son prácticas profesionales diarias, que se pueden convertir en el foco del programa de desarrollo profesional.
- Ser adecuado y reflejar el *contexto* en el que los profesores trabajan.

En relación con los *procesos* empleados para el diseño de un programa de desarrollo profesional, diversas investigaciones (véase Tirosh & Graeber, 2003) han puesto en evidencia que la efectividad es mayor cuando el programa:

- Refleja los principios metodológicos que se espera que los profesores pongan en funcionamiento con sus alumnos.
- Fomenta y desarrolla la colaboración entre el profesorado.
- Parte de, y utiliza, el conocimiento y la experiencia del profesorado.
- Crea algún tipo de desequilibrio o insatisfacción con ciertas prácticas docentes y/o resultados de aprendizaje infructuosos, provocando una necesidad de cambio.
- Parte de una cultura profesional que apoya la formación del profesorado, ofreciendo tiempo y espacio para facilitar el cambio [3].
- Evita la intervención puntual y anecdótica, extendiéndose en el tiempo.

Las tres primeras características tienen que ver con la naturaleza y la forma en la que se estructura el desarrollo profesional, la cuarta tiene que ver con la

3. En contraposición con otras culturas profesionales en las que se considera que lo fundamental es que el profesor esté con sus alumnos, se concibe como administrador de conocimientos, y en la que la planificación curricular y la toma de decisiones se lleva a cabo en niveles superiores de autoridad. En estas culturas no se relaciona el desarrollo profesional con una mejora de la enseñanza y, en consecuencia, los programas suelen considerarse como un añadido a las tareas profesionales del profesor (se realizan después del horario escolar, en fines de semana o vacaciones) (Tirosh & Graeber, 2003, p. 675).

compresión de los procesos de cambio en el profesorado, mientras que las dos últimas están relacionadas con la ubicación espacio-temporal del programa de formación.

En relación con los procesos de cambio del profesorado, estos normalmente se interpretan como modificación de las creencias de los profesores (sobre la naturaleza de las matemáticas y su enseñanza) y/o en sus prácticas docentes. Diferentes autores han analizado cual precede a cual (véase Tirosh & Graeber, 2003). Sin embargo, hay otras investigaciones (p.e., Franke et al., 1997) que establecen que ambas dimensiones están íntimamente relacionadas, y que no es posible determinar si los cambios en creencias son los que preceden a los cambios en las prácticas o viceversa. De hecho, ambos cambios tienen lugar en un proceso de interacción mutua (Tirosh & Graeber, 2003).

Desde la perspectiva de la TAD, consideramos que las prácticas docentes, el conocimiento profesional y las creencias se integran en una descripción de la profesión docente en términos praxeológicos. Como indicamos en Luisa Ruiz-Higueras y Javier García (2011), toda acción del profesor se puede describir en términos de la puesta en juego de un par de prganizaciones matemática y didáctica (OM, OD), representando la primera componente (OM) la actividad matemática en la que desea que sus alumnos "participen", y la segunda componente (OD) la praxeología didáctica que pone en funcionamiento para hacer posible dicha «participación». En particular, la componente OD engloba tanto la *praxis didáctica* del profesor (prácticas docentes, en la terminología antes usada) como su *logos didáctico* (en el que se integra el conocimiento del profesor que justifica su acción didáctica, incluyendo el dominio de sus creencias).

En esta interpretación, un programa de desarrollo profesional tiene por objetivo general: modificar el repertorio de pares (OM, OD) a disposición del profesor, o bien algunos componentes de este repertorio. Por ejemplo, modificar, completar y/o reestructurar su «universo» de OMs, en aquellos programas centrados en el contenido matemático, o su repertorio de técnicas didácticas, en aquellos programas en los que el énfasis está en las «metodologías» pero con un débil cuestionamiento de las mismas, o su logos didáctico, en aquellos otros programas que se centran más en la reflexión sobre las prácticas de aula y en su cuestionamiento, pero con una débil conexión con los problemas y las técnicas didácticas (praxis didáctica).

A su vez, todo programa de desarrollo profesional constituye un proceso de estudio, y por tanto podría ser modelizado también en términos praxeológicos (figura 1), como propusimos en L. Ruiz-Higueras y J. García (2010).

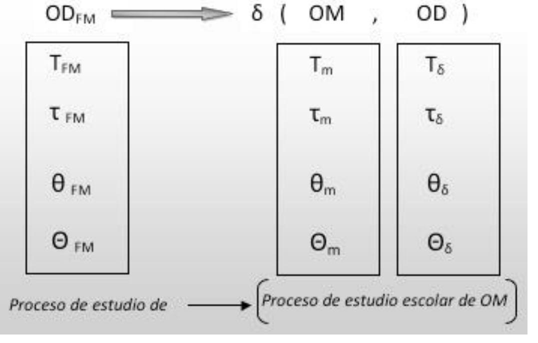


Figura 1. Estructura praxeológica de la formación del profesorado.

En particular, esta modelización permite identificar, describir y problematizar los tipos de *tareas problemáticas para el desarrollo profesional del profesorado*, las *técnicas didácticas de formación* y también las *tecnologías y teorías didácticas* que describen y justifican todo proceso de desarrollo profesional.

Por ejemplo, una de las características de «efectividad» indicada anteriormente (reflejar los principios metodológicos que se espera que los profesores pongan en funcionamiento con sus alumnos), puede ser descrita ahora con más precisión, en términos de una *praxeología de formación* que debería incluir componentes de la *praxeología didáctica* objeto de dicho programa de desarrollo profesional. Cabe señalar, por ejemplo, el caso descrito en J. Portugais (1995) en el que proponía la posibilidad de generar situaciones adidácticas para la formación de maestros, las cuales, a su vez, debían poner en funcionamiento praxeologías didácticas escolares estructuradas según la Teoría de las Situaciones Didácticas.

2.1. Modelos de desarrollo profesional

Aileen Kennedy (2005) propone una clasificación de diferentes modelos para el desarrollo profesional del profesorado, atendiendo a su potencial para modificar las prácticas del profesorado así como a la autonomía profesional inherente a cada uno de ellos. Distingue entre modelos *transmisivos*, *transicionales* y *transformativos*, caracterizando cada uno en función de cómo se implementa y qué estrategias de desarrollo profesional se usan, pero sin ofrecer una definición clara y precisa de cada uno de ellos.

A partir de las características descritas por A. Kennedy (2005), proponemos una posible caracterización, no exhaustiva, de los diferentes modelos de desarrollo profesional.

Así, consideramos como características propias de los modelos *transmisivos*:

- El estar organizados e impartidos, normalmente, fuera de la escuela.
- Administrados por un experto (formador), siendo la autonomía del profesorado muy limitada.
- Flujo unidireccional de información: del formador hacia los profesores.
- Centrados en conocimientos, pero vacíos de contexto.
- Débilmente conectados con prácticas reales de aula.
- A menudo, concebidos como una forma de completar algún tipo de déficit percibido en el conocimiento y/o en el desempeño profesional del profesorado.
- Impartidos en un periodo limitado, y normalmente concentrado, de tiempo.
- Generalmente, con un impacto muy limitado en las practicas futuras del profesorado.

Normalmente corresponden a «cursos» administrados por un experto en un centro de formación, dirigidos a capacitar al profesorado sobre una nueva metodología, el uso de algún tipo de recurso o la consecución de alguna acreditación de tipo profesional.

Por su parte, los modelos *transicionales* están caracterizados por:

- Fomentar la colaboración entre profesores y la reflexión, tanto a partir de actividades prácticas como la reflexión sobre su práctica profesional en el aula.
- Considerar el contexto en el cual el profesorado lleva a cabo su práctica profesional.
- Fomentar la autonomía formativa del profesorado.

- Conectar con las prácticas reales de aula, como forma de hacer evolucionar las praxeologías didácticas del profesorado y fomentar la reflexión sobre la práctica.
- Poder integrar *episodios transmisivos* pero no estar centrados en la transmisión de conocimientos.
- Esperar un potencial impacto en las prácticas docentes futuras del profesorado en formación.

A. Kennedy (2005) se refiere a las estrategias de *mentoring/coaching* como propias de esta categoría. También podríamos incluir, en términos generales, acciones formativas que tengan reflejo en el aula, por ejemplo, integrando fases de trabajo en el aula y de reflexión conjunta entre profesores, a partir de estas prácticas.

Finalmente, los modelos transformativos son aquellos que:

- Están fuertemente basados en la colaboración entre profesores y en la reflexión sobre su práctica.
- Se llevan a cabo dentro de un contexto determinado, que condiciona y dirige el proceso de desarrollo profesional.
- Se basan en una gran autonomía del profesorado (tendiendo a la auto-regulación) y en la creación de *comunidades de estudio*.
- Están insertados en prácticas reales en el aula, incluyendo episodios de *investigación en el aula.*
- Podrían incluir, de forma complementaria, algún *episodio transmisivo*.
- Provocan una modificación en las praxeologías didácticas del profesorado.

A. Kennedy (2005) considera, como representantes de este tipo de modelos, los modelos de desarrollo profesional basados en la *investigación-acción*. También podríamos incluir en este apartado, a priori, modelos de desarrollo profesional en los que el profesorado goza de alta autonomía organizativa, como son los *grupos de estudio* o los organizados en torno al *estudio de lecciones* (*lesson study*).

De forma parecida, J. F. Matos et al. (2009) distinguen entre *modelos de desarrollo profesional basados en formación* (*training models*), y que se pueden asimilar a los *modelos transmisivos*, frente a aquellos basados en *la práctica*, más acordes con los modelos *transicionales* y *transformativos.*

En cualquier caso, esta caracterización de posibles modelos de desarrollo profesional debe ser entendida como apriorística e ideal. Es decir, nos ofrece un marco de referencia para pensar a cerca de y planificar propuestas de desarrollo profesional, que podrán ser más o menos identificadas como *transmisivas*, *transicionales* o *transformativas*, pero cuyo carácter modificador de las praxeologías didácticas sólo podrá ser realmente determinado a posteriori.

3. Desarrollo profesional PRIMAS

Como hemos señalado en la introducción, el objetivo fundamental de PRIMAS es promover un cambio en la enseñanza de las matemáticas y las ciencias a nivel europeo, orientando esta hacia el *aprendizaje por investigación* (*inquiry-based learning*, IBL).

Reformulado en términos de la TAD, el objetivo es el diseño de un conjunto de praxeologías de formación del profesorado (programa de desarrollo profesional) a través de las que este desarrolle praxeologías didácticas que orienten su *praxis didáctica* hacia los procesos de investigación en el aula.

En primer lugar, aparece aquí un tema crucial. De la misma forma que en todo proceso de estudio escolar de la matemática es necesario construir un modelo epistemológico de referencia (MER), que permite hacer explícito el punto de vista que el investigador toma en relación con conocimiento matemático en juego (Bosch & Gascón, 2005), también consideramos que, en todo proceso de estudio dentro del desarrollo profesional del profesorado, es necesario elaborar un *modelo epistemológico de referencia* para el desarrollo profesional (MER-DP) que, de manera análoga, haga explícito el punto de vista del investigador en relación con el conocimiento profesional en juego. En particular, en nuestro caso sería necesario elaborar un modelo epistemológico de referencia de lo que entendemos por enseñanza y aprendizaje basado en la investigación.

La construcción de este modelo, desde la perspectiva de la TAD, es aún un problema no resuelto. De manera muy sucinta, se puede definir el aprendizaje por investigación como

> A multifaceted activity that involves making observations; posing questions; examining books and other sources of information to see what is already

> known; planning investigations; reviewing what is already known in the light of experimental evidence; using tools to gather, analyze, and interpret data; proposing answers, explanations and predictions; and communicating results. Inquiry requires identification of assumptions, use of critical and logical thinking, and consideration of alternative explanations" (National Research Council, citado en Olson & Loucks-Horsley, 2000)

Asociado a este, la enseñanza por investigación (inquiry-based teaching, IBT) se construye sobre un conjunto de técnicas didácticas fuertemente orientadas a dotar de mayor autonomía al alumnado, en situaciones abiertas en las que este pueda formular cuestiones, diseñar experimentos, extraer conclusiones, comunicar, etc.

Ronald Anderson (2002) caracteriza el IBT al comparar el papel del profesor, el del alumno y el trabajo de estos últimos en situaciones de enseñanza no orientadas a la investigación frente a aquellas que sí lo están (tabla 1).

Predominance of old orientation (non inquiry-oriented)	**Predominance of new orientation (inquiry-oriented)**
Teacher role: *As dispenser of knowledge:* Transmits information Communicates with individuals Directs students actions Explains conceptual relationships Teachers knowledge is static Directed use of textbook, etc.	 *As coach and facilitator:* Helps students process information Communicates with groups Coaches students actions Facilitates students thinking Models the learning process Flexible use of materials
Student role: *As passive receiver:* Records teacher's information Memorizes information Follows teacher directions Defers to teacher as authority	 *As self-directed learner:* Processes information Interprets, explains, hypothesizes Designs own activities Shares authority for answers
Student work: *Teacher-prescribed activities:* Completes worksheets All students complete same tasks Teacher directs tasks Absence of items on right	 *Student-directed learning:* Directs own learning Tasks vary among students Design and direct own tasks Emphasizes reasoning, solving problems, building from existing

	cognitive structures, and explaining complex problems

Tabla 1. Enseñanza no-orientada/orientada a la investigación (Anderson, 2002, p. 5).

En el trabajo de Yves Chevallard (2008) se puede encontrar una primera problematización de la noción de IBL/IBT desde la perspectiva de la TAD. Sin embargo, consideramos que es aún una tarea abierta a la investigación. No abordaremos este problema en este artículo. En consecuencia, admitiremos, por ahora, la caracterización más genérica de los párrafos anteriores como «*proto-modelo*» de un *modelo epistemológico de referencia del aprendizaje y la enseñanza por investigación*, que está por construir en el marco de la TAD.

3.1. Un modelo espiral del desarrollo profesional

Como punto de partida, el programa de desarrollo profesional de PRIMAS se concibe como un proceso que avanza y se expande siguiendo un modelo espiral (figura 2). Este surge de y es coherente con la literatura especializada en torno al desarrollo profesional y a los procesos de cambio en el profesorado (véase sección 2). Sucintamente, este modelo asume que el equipamiento praxeológico del profesorado crece a partir de procesos de análisis (de su práctica docente, de la de otros, de documentos y recursos, etc.), implementación en el aula y reflexión conjunta sobre los resultados y las dificultades encontradas (por ellos o por sus colegas). Esta reflexión podría dar lugar a una nueva fase de análisis, generando así un proceso cíclico que hemos descrito como espiral para señalar el hecho de que el equipamiento praxeológico del profesor va creciendo, completándose y enriqueciéndose.

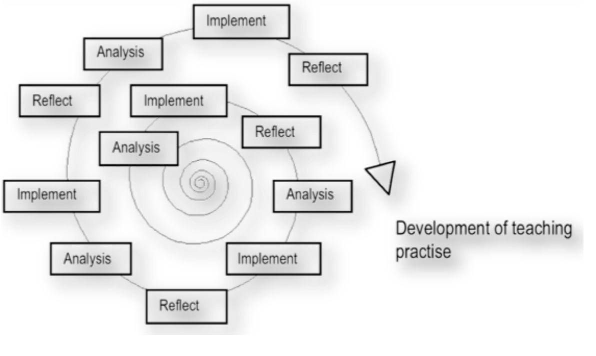


Figura 2. Desarrollo profesional: modelo espiral.

Este modelo en espiral, sin embargo, podría ser criticado por su generalidad. En particular, poco dice sobre cómo diseñar las diferentes fases, cómo funcionan o cómo se conectan. Usando la visión más rica de la TAD, este modelo general de praxeología para el desarrollo profesional del profesorado poco dice en relación con los tipos de tareas, las técnicas y las tecnologías y teorías que conforman dicho proceso formativo.

3.2. Módulos PRIMAS para el desarrollo profesional del profesorado

El programa PRIMAS tiene como objetivo desarrollar el equipamiento praxeológico del profesorado de matemáticas y ciencias para que este sea capaz de orientar su enseñanza hacia el aprendizaje por investigación (IBL). Una posible formulación del problema profesional subyacente sería la siguiente:

> Π_{Primas}: *En una situación de enseñanza en la que quiero que mis alumnos aprendan a través de la indagación (resolución de problemas), ¿qué puedo hacer para gestionar dichas situaciones y apoyar a mis alumnos en sus procesos de investigación?*

Algunos comentarios a propósito de esta formulación inicial del problema:

1. Aunque el problema se ha formulado como el problema individual (del profesor), debe ser considerado de manera institucional, como un *problema de la profesión*.
2. Se ha formulado como un *problema docente*, usando los términos comúnmente aceptados por la profesión al tratar de describir el cuestionamiento que se hace un profesor cuya acción didáctica se debe orientar en un sentido determinado.

Esta formulación puede ser considerada como un válido punto de partida, pero para convertirlo en un problema de investigación debería poder ser reformulado según su dimensión epistemológica, económica-institucional o ecológica (Gascón, 2011), algo que supera el propósito de este artículo [4].

El problema es amplio y complejo, e incluye múltiples facetas, en la medida en que la enseñanza por investigación implica una mayor autonomía de los alumnos en la puesta en funcionamiento de múltiples procesos

4. Por ejemplo, en J.-L. Dorier y F. J. García (2013) se lleva a cabo una posible reformulación de algunos componentes de este problema en términos «ecológicos».

(formulación de cuestiones, estructuración de la situación problemática, formulación de hipótesis, experimentación, control de variables, modelización, análisis de los datos, extracción de conclusiones, argumentación, comunicación,…) que normalmente no están presentes en una clase convencional, y que requieren la activación de praxeologías didácticas más complejas que la clásica «explicación-ejemplo-ejercicios».

De hecho, se podría considerar que Π_{Primas} es la unión no disjunta de diversos de problemas profesionales, que tienen que ver con diferentes facetas involucradas en una enseñanza orientada a la investigación, y que emanan del modelo epistemológico de referencia en torno al aprendizaje y la enseñanza basados en la investigación que hemos esbozado en la sección 3.

El programa de desarrollo profesional PRIMAS aborda de manera explícita algunos de estos problemas profesionales asociados aunque, obviamente, no todos ellos. Podemos interpretar el programa como la unión no disjunta de 7 módulos[5] (figura 3) en los que los profesores trabajan sobre diferentes facetas del problema general Π_{Primas}.

Figura 3. Módulos que componen el proyecto PRIMAS.

5. Los módulos están disponibles en http://www.primas-project.eu.

Esbozaremos brevemente estos problemas. De acuerdo con la formulación inicial de Π_{Primas}, seguiremos formulándolos desde la perspectiva del profesor, aunque deben ser considerados como problemas de la profesión:

- «Investigación guiada por los estudiantes» (*student-led inquiry*): aborda una faceta del trabajo por investigación: la formulación de cuestiones ante fenómenos ricos y complejos. El problema profesional subyacente es: *¿cómo hacer que mis alumnos formulen cuestiones relevantes y significativas ante fenómenos ricos y complejos?*
- «Abordar problemas no estructurados» (*tackling unstructured problems*): trata el hecho de que las situaciones de investigación son situaciones débilmente estructuradas. Dos son los problemas profesionales abordados. De un lado, en relación con el diseño y la selección de tareas IBL: *¿qué nivel de estructuración debe tener un situación para que no venga todo dado de antemano y permita a los estudiantes poner en funcionamiento procesos de investigación?* De otro lado: *¿qué retos y dificultades plantean estas situaciones poco estructuradas a mis alumnos y cómo gestionarlas para que sean los alumnos los que realmente investiguen?*
- «Aprender conceptos a través del IBL» (*learning concepts through IBL*): aborda el aparente dilema profesional que muchos profesores manifiestan en los siguientes términos: *si uso situaciones IBL, ¿cómo cubrir un currículo que está estructurado como un conjunto lineal de conceptos matemáticos y procedimientos asociados?*
- «Usar cuestiones que promueven el IBL» (*asking questions that promote IBL*): el trabajo *por investigación* puede ser exigente para los alumnos, al tener que asumir procesos que normalmente no están presentes en clase de matemáticas o que tradicionalmente los ha gestionado el profesor. Ante estas dificultades (individuales o de grupo) el proceso didáctico se puede ver amenazado y el profesor tendrá que intervenir. El problema profesional asociado es: *cuando los alumnos están trabajando en situaciones de investigación y el profesor interviene, ¿qué tipo de cuestiones puede usar para apoyar y hacer progresar a los estudiantes en sus procesos de investigación?*
- «Promover el trabajo colaborativo entre los estudiantes» (*students working collaboratively*): una dimensión esencial del aprendizaje por

investigación, que debería estar presente en el *modelo epistemológico de referencia del IBL/T* es el trabajo colaborativo entre los estudiantes. Trabajar colaborativamente lleva a múltiples momentos en los que los estudiantes tienen que discutir y debatir (tanto en pequeños grupos como toda la clase). El problema profesional asociado que se aborda en este módulo es: *¿cómo puede el profesor gestionar las discusiones y los debates para promover un trabajo cooperativo de calidad?*

- «Construir a partir de lo que los alumnos saben» (*building on what students know*): en las situaciones IBL es fundamental favorecer la autonomía de los alumnos. El tipo de situaciones que se pueden usar en clase, su carácter más o menos estructurado, los procesos de investigación que podrán poner en funcionamiento los estudiantes y, en último término, hasta dónde serán capaces de investigar, estará en gran medida condicionado por los conocimientos que tengan los alumnos. El problema profesional tratado en este módulo es: *cuando los alumnos trabajan en situaciones IBL, ¿cómo puede determinar el profesor lo que sus alumnos saben en función de lo que están haciendo y usarlo para retroalimentar los procesos de investigación?*
- «Evaluación por pares y autoevaluación» (*self- and peer-assessment*): no sólo el profesor puede evaluar lo que saben los alumnos para orientar su aprendizaje en situaciones de investigación, también es una responsabilidad que puede ser trasladada a los estudiantes, haciendo que estos sean más conscientes de los procesos de investigación que están poniendo en funcionamiento y de los aprendizajes logrados. El problema profesional abordado en este módulo es: *¿qué técnicas puede usar el profesor para que sus alumnos puedan autoevaluar (o evaluar por pares) sus propios procesos de investigación y sus aprendizajes, y convertir esta evaluación en herramienta para nuevos aprendizajes?*

4. Análisis del programa de desarrollo profesional PRIMAS en el marco de la TAD

El objetivo de esta sección es, en primer lugar, realizar un análisis desde la TAD del *modelo en espiral* para el desarrollo profesional del profesorado con el fin de llegar a tener una modelización más profunda y controlada de los procesos involucrados. Postulamos que esta teorización nos dotará de herramientas de observación y diseño de programas de desarrollo profesional. En particular, lo usaremos en la segunda parte de esta sección para estudiar el proceso de diseño del programa de desarrollo profesional del proyecto PRIMAS.

4.1. Reformulación del modelo espiral desde la TAD

En la TAD, todo proceso de estudio se sitúa en un marco institucional, más allá de características e idiosincrasias individuales. Los alumnos involucrados en un proceso de estudio escolar, o los profesores involucrados en un proceso de desarrollo profesional, son considerados como una comunidad de estudio cuyo objetivo es establecer una nueva relación con el conocimiento objeto de estudio, praxeologías matemáticas en el caso de un proceso de estudio escolar, o *praxeologías profesionales*[6] (matemático-didácticas) en el caso de procesos de desarrollo profesional.

Todo proceso de estudio da lugar a la formación temporal de un sistema didáctico, que en su modelización más sintética estaría formado por uno o un grupo de *estudiantes* X, uno o varios *directores de estudio* Y (pudiendo ser Y un conjunto vacío) y el *conocimiento* objeto de estudio ♥, que denotamos por $S(X; Y; ♥)$ (Chevallard, 2015). En el caso de un proceso de desarrollo profesional, X estará compuesto por profesores en formación, Y por los formadores, educadores o facilitadores de dicho proceso y ♥ contendrá *praxeologías profesionales*, o algunos componentes de las mismas.

En contraposición con el esquema dominante de sistema didáctico en una institución escolar, normalmente formado por un único director Y (el profesor) para un grupo de estudiantes X, los sistemas didácticos que podemos encontrar en los modelos de desarrollo profesional pueden ser más diversos. Así, los cursos tradicionales de formación del profesorado replican el modelo de sistema didáctico escolar, dirigido por un *formador* que trabaja con un grupo de profesores. Sin embargo, en los conocidos como modelos de desarrollo profesional auto-regulados (como, por ejemplo, los grupos de estudio o el estudio de lecciones[7]) la figura del *director* está ausente. En

6. El término *praxeología(s) profesional(es)* lo utilizamos con carácter provisional aquí. Con él queremos denotar el conjunto de saberes matemático didácticos (pares OM-OD, según describimos en L. Ruiz-Higueras y F.J. García (2010)) que constituyen el equipamiento praxeológico para la profesión de “profesor de matemáticas”.

7. *Lesson study*.

otros, como los modelos basados en el «coaching» o en el «mentoring», el conjunto X se limita a un solo profesor, que establece una relación muy particular con su *entrenador* o *mentor Y*.

En el análisis de los sistemas didácticos escolares, Y. Chevallard (2015) identifica lo que describe como el *paradigma de la visita a las obras* o a los monumentos. Este se fundamenta en una epistemología escolar «expirada», pero aún dominante en muchos de ellos, en la que el saber deviene en una realidad casi sacralizada que sólo un pequeño grupo de «elegidos» puede enseñar (en el sentido de mostrar) a la «multitud». El conocimiento es valioso por sí mismo y no es necesaria justificación alguna. De esta forma, el conocimiento matemático degenera en un conjunto de objetos inanimados (monumentos) que han perdido su «razón de ser» (las cuestiones a las que dan respuesta) y la escuela en el «museo» que los muestra.

Frente a esta, Chevallard (2015) aboga por un nuevo paradigma didáctico, que denomina el del *cuestionamiento del mundo*. Este se fundamenta en una epistemología renovada en la que el conocimiento es valioso en la medida que permite dar respuesta a verdaderas cuestiones problemáticas, poniendo pues el estudio de cuestiones problemáticas en el centro de todo proceso de estudio. En la medida en que los objetos matemáticos emergen como posibles respuestas, estos surgen no de manera formal e inmotivada, sino como herramientas constitutivas de la *aventura intelectual* en la que la comunidad de estudio está inmersa

Si trasladamos estos análisis al universo de la formación y el desarrollo profesional del profesorado, también es posible identificar rasgos del paradigma de la visita a las obras. Esto ocurre cuando el programa de desarrollo profesional simplemente ofrece un conjunto de *respuestas profesionales* pero elimina las cuestiones y los problemas profesionales a los que estas dan respuesta. Surgen así como respuestas inmotivadas, en el sentido de que el profesorado ignora qué problema viene a resolver, degenerando en un conjunto de *recetas profesionales*. En cierto grado, y de manera general, los programas de desarrollo profesional de tipo *transmisivo* (véase sección 2.1) pueden ser considerados como representantes de este paradigma en la formación del profesorado.

Por analogía al paradigma del *cuestionamiento del mundo* descrito por Chevallard (2015), una epistemología renovada en la formación del profesorado sería aquella que pusiese en el corazón de todo programa de desarrollo profesional el cuestionamiento del *mundo profesional* del profesorado, de donde surgirían cuestiones profesionales significativas y relevantes. El programa tendría como objetivo la elaboración de posibles *respuestas profesionales* (praxeologías matemático-didácticas, o componentes de estas) que irían enriqueciendo y completando el equipamiento praxeológico del profesor e incluiría el estudio de respuestas ya existentes y la validación de las posibles respuestas construidas.

Los modelos *transicionales* y *transformativos* descritos en el apartado 2.1 están más próximos, a priori, a este paradigma renovado del desarrollo profesional del profesorado, ya que este implica una mayor autonomía y colaboración por parte del profesorado, incorpora la *reflexión* (sobre los problemas y dificultades profesionales, sobre "respuestas" ya existentes y sobre las propias repuestas construidas) y la *elaboración* y *validación* de respuestas en su *medio profesional* (implementación e investigación en el aula).

Es posible una descripción más profunda de este paradigma del cuestionamiento del mundo profesional a partir del *esquema didáctico herbartiano* descrito en Chevallard (2015), aplicado al desarrollo profesional del profesorado.

De manera general, el esquema herbartiano se suele describir con la notación:

$$[S(X; Y; Q) \curvearrowright M = \{R_1^{\lozenge}, R_2^{\lozenge}, \ldots, R_n^{\lozenge}, O_{n+1}, \ldots, O_m\}] \hookrightarrow R^{\heartsuit}$$

Este nos representa un sistema didáctico en el que el proceso de estudio está articulado en torno a una cuestión o conjunto de cuestiones problemáticas Q. La comunidad de estudio X, en ocasiones ayudada por uno o varios *directores* Y, toma en serio el estudio de cuestiones Q, para lo que indaga en el mundo de respuestas ($R_i^{\lozenge}$) y obras (O_j) existentes y disponibles (a su alcance), estudiando, cuestionando y validando estas posibles respuestas. El conjunto de respuestas y obras consideradas constituye el *medio* (en el sentido de Brousseau, 1997) a partir del que la comunidad de estudio llegará a una posible respuesta $R^{\heartsuit}$. Esta tendrá siempre un carácter provisional, sujeta a su pertinencia y alcance para resolver Q, vinculada a la emergencia de nuevas cuestiones derivadas de Q o a la consideración de nuevas respuestas y obras $R_i^{\lozenge}$ y O_j.

En la formación del profesorado, la modelización a través del esquema Herbartiano de los sistemas didácticos para el desarrollo profesional nos brinda una nueva herramienta para su diseño, análisis y optimización. En particular, consideramos que es una herramienta teórica que nos permite profundizar en el modelo en espiral (ciclos de análisis-implementación-reflexión) descrito previamente, consiguiendo:

1. Hacer visible el comienzo del proceso: el estudio de cuestiones profesionales *vivas* y *cruciales Q.*
2. Dar entidad a los procesos de *análisis, implementación* y *reflexión*:
   - *Análisis* de respuestas y obras ya existentes.
   - *Implementación* puesta a prueba de respuestas y obras existentes ($R_i^\Diamond$, O_j), en una primera etapa, o de la(s) respuesta(s) $R^\heartsuit$, contra un medio didáctico escolar [8].
   - *Reflexión* o evaluación de las respuestas ($R_i^\Diamond$ - $R^\heartsuit$) en función de la(s) cuestión(es) de partida Q y de los resultados de su contrastación con el *medio didáctico escolar*.

4.2. Análisis del programa de desarrollo profesional PRIMAS a la luz del modelo espiral reformulado desde la TAD

En esta sección, analizaremos uno de los módulos de PRIMAS usando como herramienta teórica el modelo en espiral reformulado y descrito en la sección anterior. En especial, el objetivo es desvelar qué procesos pone en juego este módulo para el desarrollo profesional y en qué sentido se puede considerar que el programa PRIMAS promueve un cuestionamiento del mundo profesional del profesorado.

Hemos seleccionado el módulo «usar cuestiones que promueven el IBL» por ser uno de los más cortos. No obstante, el análisis sería también válido para el resto ya que todos han sido diseñados siguiendo el mismo modelo. Es importante señalar que estos módulos no han sido diseñados por los autores de este trabajo [9] y que, en su elaboración, no se aplicó explícitamente el modelo espiral reformulado descrito en la sección anterior.

---

8. En el sentido de G. Brousseau (1997)
9. Los módulos del proyecto PRIMAS son una adaptación de los diseñados en el proyecto inglés Bowland, por parte de M. Swan y colaboradores (MARS – Universidad de Nottinghan).

Como hemos mostrado en la sección 3.2, este módulo aborda el problema profesional de cómo intervenir cuando los alumnos están investigando una situación. En particular, qué tipo de cuestiones puede usar el profesor para apoyar y hacer progresar a sus estudiantes en sus procesos de investigación.

Según el esquema herbartiano sobre el que hemos reformulado el modelo en espiral, el proceso de desarrollo profesional debería estar organizado como una comunidad de estudio que aborda «cuestiones profesionales vivas», identifica y analiza respuestas y obras ya construidas, valida el alcance y las limitaciones de estas respuestas y, de forma conjunta, desarrolla una posible respuesta $R^{\heartsuit}$ al problema profesional de partida. Dicha respuesta, resultado del proceso de estudio, estará compuesta de elementos praxeológicos matemático-didácticos que se incorporarán al equipamiento praxeológico del profesor, permitiéndole, por un lado, juzgar el papel que determinado tipo de cuestiones puede desempeñar como técnica didáctica para apoyar a sus alumnos en situaciones de investigación (contribución a su *logos didáctico*) y, por otro lado, desarrollar técnicas didácticas para un uso estratégico en el aula de determinado tipo de cuestiones (contribución a su *praxis didáctica*).

En nuestro análisis, distinguiremos entre: las tareas de desarrollo profesional, los *media* y respuestas $R_i^{\lozenge}$ puestas a disposición de la comunidad de estudio y los *medios*[10] y obras O_j disponibles para validar las respuestas $R_i^{\lozenge}$ y desarrollar la respuesta $R^{\heartsuit}$.

El módulo está estructurado en un conjunto conectado de 5 tareas de desarrollo profesional (actividades A-E), la mayoría diseñadas para ser abordadas en grupos dentro de la comunidad de estudio (ver tabla 2).

La *actividad A* pretende *introducir el problema profesional* a partir de una reflexión colectiva sobre el tipo de cuestiones que los profesores usan en el aula y la función que desempeñan en la gestión de la comunidad de estudio y en el desarrollo del aprendizaje de sus alumnos. De esta forma, queda introducida la cuestión problemática profesional de partida. En esta primera actividad cada profesor podemos identificarlo como una *media*, en el sentido en que introduce en la comunidad de estudio diferentes respuestas $R_i^{\lozenge}$ a propósito del problema de partida. Algunas de estas respuestas pueden

10. En el sentido de *la dialéctica de los medios y las media* (Chevallard, 2004).

estar fundamentadas en algún conocimiento profesional «formal» (importado de otra institución sabia), pero la mayoría son de tipo informal y tácito [11], resultado del trabajo diario del profesorado con sus alumnos. En esta actividad podemos considerar que el mismo grupo de profesores (proceso de trabajo en grupos pequeños o tareas de puesta en común en gran grupo) actúa como *medio* de aprendizaje. Es frente a este medio donde las respuestas son evaluadas, refinadas, aceptadas o rechazadas. En esta primera actividad emergen componentes importantes que pueden ser incorporados a la respuesta $R^{\heartsuit}$, aunque es pronto para señalar cómo. En cualquier caso, los profesores empiezan a tomar consciencia de esa dimensión de su actividad profesional y de las técnicas didácticas que ponen en funcionamiento [12].

La *actividad B* se conecta con la A, haciendo que la comunidad de estudio proponga tipos de cuestiones que podrían usar para apoyar a los alumnos en sus procesos de investigación. De nuevo, los profesores ejercen de *medias*, poniendo en común respuestas $R_i^{\lozenge}$, pero también de *medio* ante el que dichas respuestas se *validan*. A diferencia de la actividad A, tras las repuestas aportadas por los profesores, el formador (Y) actúa de *media*, introduciendo algunas posibles respuestas («*5 principios para hacer preguntas eficaces*»). Estas se han extraído de diferentes investigaciones e importado para su consideración en la comunidad de estudio. Tal y como se describe en el documento para formadores de PRIMAS, el objetivo de estas respuestas que aporta el formador no es remplazar aquellas que han surgido desde los profesores, sino enriquecer el universo de posibles respuestas $R_i^{\lozenge}$ al problema profesional de partida.

Las *actividades A* y *B* generan las condiciones para que la comunidad de estudio disponga de múltiples posibles aproximaciones y respuestas al problema que están tratando. Sin embargo, hasta ahora han sido más bien escasas las oportunidades que han tenido los profesores para ponerlas a prueba y validarlas.

La *actividad C* introduce un medio para empezar a cuestionar estas respuestas. Este medio consiste en un vídeo que recoge una clase en la que

11. En el sentido dado por M. Eraut (2004).

12. De acuerdo a nuestras observaciones (informales) en sesiones de desarrollo profesional, muchos profesores expresan que es la primera vez que dirigen su atención hacia esta dimensión de su actividad profesional.

una profesora gestiona una tarea IBL. Previamente, se propone a la comunidad de estudio formada por los profesores trabajar sobre el problema matemático y discutir sobre posibles soluciones y aproximaciones al mismo. El vídeo de la clase actúa en este momento más como un *medio* que como una *media*. El objetivo no es aportar más respuestas a la comunidad de desarrollo profesional, sino más bien generar un entorno en el que comenzar a evaluar el universo de respuestas $R_i^{\Diamond}$ compartidas que se han generado en las actividades A y B. En este sentido, el vídeo no pretende mostrar un caso ideal, pues esto supondría actuar como elemento externo validador/sancionador de las respuestas disponibles. La discusión en grupo sobre las decisiones y el tipo de cuestiones usadas por la profesora permite a la comunidad revisitar y evaluar las respuestas.

Un segundo nivel de evaluación, más potente que el anterior, será el que tenga lugar en la siguiente tarea de desarrollo profesional (*actividad D*). Esta tiene comienza en el grupo de desarrollo profesional, pero se extiende en el tiempo con un fase de trabajo autónomo. El profesorado debe seleccionar una tarea IBL, planificar el tipo de cuestiones que podría usar para apoyar los procesos de investigación de sus alumnos y, finalmente, implementar la *lección* con uno de sus grupos de alumnos. Posteriormente, en el seno de la comunidad de desarrollo profesional se pone en común y se analiza lo que ha ocurrido durante esta implementación (*actividad E*). En ocasiones, en esta fase colectiva se usan técnicas de desarrollo profesional como la grabación en vídeo por los propios profesores de la clase implementada y/o la elaboración de casos a partir de una plantilla de estudio de casos facilitada por el formador.

En la fase de diseño de la intervención, el formador *Y* vuelve a actuar como *media*, al ofrecer al profesorado nuevas respuestas externas.

Consideramos estas últimas actividades cruciales en el proceso de desarrollo profesional, y en las que las respuestas $R^{\heartsuit}$ empiezan a cristalizar. Hablamos de «respuestas», en plural, porque es de esperar que cada profesor elabore una posible respuesta $R^{\heartsuit}$, con posibles elementos comunes con otras, pero propia. Cada profesor ha podido dar más o menos importancia a ciertas respuestas $R_i^{\Diamond}$ y el aprendizaje «en contexto» con sus alumnos sin duda ha podido ser más o menos rico y diverso. Finalmente, también la puesta en común y el análisis de las implementaciones en el aula acabarán de perfilar estas respuestas. En cualquier caso, por ahora tendrán un carácter provisional y se irán desarrollando, por un lado, a través de la práctica diaria (y consciente) en el aula y, de otro lado, en conexión con otros problemas profesionales conectados y abordados en otros módulos PRIMAS. La tabla 2 sintetiza el proceso de estudio profesional descrito en este módulo.

Actividad de desarrollo profesional	*Medias* y respuestas $R_i^\lozenge$	*Medios* y obras O_j
(A) Análisis del tipo preguntas y su función	Profesores → $(R_i^\lozenge)_X$ = tipos de preguntas que utilizan y la función que desempeñan	Grupo, discusión
(B) Preguntas eficaces para apoyar el IBL	Profesores → $(R_i^\lozenge)_X$ = tipos de preguntas que podrían ser eficaces Formador (Y) → $(R_i^\lozenge)_Y$ = cinco principios cuestiones efectivas	Grupo, discusión
(C) Observación y análisis de una lección	No hay *medias.* $(R_i^\lozenge)_X$ y $(R_i^\lozenge)_Y$ están disponibles	Video de una clase Grupos, discusión
(D) Planificación e implementación de una lección	Formador $(R_i^\lozenge)'_Y$ = guías sobre como elaborar un plan de cuestiones efectivas	Clase del profesor (implementación)
(E) Reflexión conjunta sobre la implementación	Profesores Todas las respuestas anteriores, reelaboradas en función de la implementación	Grupo, discusión (Opcional) Vídeos (Opcional) Casos descritos por los profesores

Tabla 2. Actividades, *medias*, respuestas y *medios* presentes en un módulo PRIMAS.

5. Conclusiones

Finalmente, y a modo de conclusión, discutiremos en qué sentido el programa PRIMAS puede ser considerado, a priori, como *transmisivo, transicional* o *transformativo*. Como ya hemos señalado previamente, este análisis es apriorístico y será completado dentro del proyecto con un proceso de evaluación del profesorado participante, cuantitativamente a través de un pre-test y de un post-test, cualitativamente a través de un estudio de casos.

En primer lugar, es evidente que el programa no puede ser considerado como *transmisivo*, en la medida en que los profesores no son receptores pasivos de informaciones facilitadas por un formador. En consecuencia, queda dilucidar si el programa podría ser considerado como *transicional*, e incluso como *transformativo*.

Volviendo sobre las propiedades de los modelos de desarrollo profesional *transicionales* (ver sección 2.1), lo que los caracteriza es que, aunque tienen en cuenta el contexto en el que los profesores trabajan y están fundamentados en las prácticas de aula de los profesores, el grado de autonomía de estos es aún bastante limitado. En particular, el rol del *formador Y* es muy importante en la evolución de la comunidad de estudio. Es este quien fija la agenda y, hasta cierto punto, controla la evolución del grupo. Esto es evidente en los módulos de PRIMAS: si bien estos fomentan una interacción profunda entre los profesores, la emergencia de diferentes cuestiones profesionales, la formulación de posibles repuestas aportadas por los propios profesores y por el formador y su puesta a prueba y evaluación en diferentes *medios*, la presencia y el control del formador es bastante determinante.

En consecuencia, si bien es de esperar un potencial impacto en la praxis y en el logos didáctico del profesorado, no está claro, a priori, si este será muy profundo, precisamente por ese carácter guiado y en ocasiones externo al profesorado. El análisis de los datos recogidos a través de los cuestionarios y los estudios de casos nos permitirán avanzar en este sentido.

En consecuencia, a priori y con carácter general[13], sólo es posible afirmar que el programa PRIMAS tiene las características de un modelo de desarrollo profesional de tipo *transicional*. La pregunta que emerge pues es: al menos a priori, *¿qué se podría hacer para convertir a PRIMAS en un programa transformativo?*

De acuerdo con las características de este tipo de programas, el punto crucial estaría en aumentar la autonomía y auto-regulación de la comunidad de estudio. Siguiendo el esquema herbartiano, parece importante que el

13. Obviamente, su carácter *transicional* o *transformativo* también dependerá de cómo el programa es transpuesto en cada caso concreto.

control que ejerce el formador *Y* sobre la comunidad de estudio fuese menor. En especial, una menor intervención, por un lado, en la identificación y selección de las cuestiones generatrices profesionales y, por otro lado, en el suministro de posibles respuestas $R_i^\lozenge$.

Un posible desarrollo, que estamos experimentando en varios países, podría ser el estructurar el programa de desarrollo profesional de PRIMAS en dos fases:

- *Fase 1*: un modelo transicional en el que los profesores forman una comunidad de aprendizaje regulada por un *formador* en torno a los módulos Π_{Primas}, a partir de los que comenzar a abordar diferentes facetas del problema profesional, a estudiar y validar posibles respuestas $R_i^\lozenge$ y a elaborar elementos para posibles respuestas $R^\heartsuit$. En esta fase el profesorado comienza a *cuestionar su equipamiento praxeológico profesional* ante el problema de orientar su enseñanza hacia la investigación y también a incorporar nuevos componentes al mismo.
- *Fase 2*: la comunidad de estudio se ha consolidado y han empezado a construir un repertorio compartido. Además, han trabajado sobre algunas facetas del problema Π_{Primas} pero también habrán enfrentado nuevos retos y dificultades en los momentos de implementación en el aula incluidos en cada módulo. En esta fase, es la comunidad de estudio la que se autoregula y evoluciona formulando problemas y dificultades profesionales, identificando *medias* y buscando respuestas $R_i^\lozenge$, decidiendo sobre los *medios* para validar dichas respuestas y, finalmente, llevando a cabo una restructuración compartida de su equipamiento praxeológico.

Esta nueva estructura, requeriría de un periodo de tiempo mayor, de al menos 2 años, lo que también es coherente con las características de efectividad de los programas de desarrollo profesional.

Finalmente, es importante señalar, como una conclusión de este trabajo, el potencial de la TAD para cuestionar y problematizar los problemas didácticos. En particular, en este trabajo hemos realizado un avance significativo al poner en funcionamiento la TAD como herramienta de cuestionamiento de los procesos de estudio para el desarrollo profesional del profesorado, y no sólo de los procesos de estudio escolares de las matemáticas, abriendo así una nueva línea de investigación.

Referencias

Adler, J, Ball, D., Krainer, K., Lin, F.-L. & Novotna, J. (2005). Reflections on an emerging field: Researching mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics, 60*, 359-381.

Anderson, R. D. (2002). Reforming science teaching: What research says about inquiry. *Journal of Science Teacher Education, 13*(1), 1-12.

Bosch, M. & Gascón, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. En A. Mercier & C. Margolinas (Eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques* (pp. 107-122). Grenoble: La pensée sauvage.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht, Pays-Bas : Kluwer.

Chevallard, Y. (2004, mayo). *Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire*. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=45

Chevallard, Y. (2008, noviembre). *Afterthoughts on a seeming didactic paradox*. Ponencia presentada en el Colloque international « Efficacité & Équité en Éducation », Rennes. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=159

Chevallard, Y. (2015). Teaching mathematics in tomorrow's society: A case for an oncoming counter paradigm. En S. J. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 173-187). Springer.

Clark, D. (1994). Ten key principles for research for the professional development of mathematics teachers. En D. B. Aichele & F. Coxford (Eds.), *Professional development for teachers of mathematics* (pp. 37-48). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Dorier, J.-L. & García. F. J. (2013). Challenges and opportunities for the implementation of inquiry-based learning in day-to-day teaching. *ZDM Mathematics Education, 45*(6), 837-849. doi:10.1007/s11858-013-0512-8.

Elmore, R. F. (2002). *Bridging the gap between standards and achievement*. http://www.ashankerinst.org/Downloads/Bridging_Gap.pdf

Eraut, M. (2004). Informal learning in the workplace. *Studies in Continuing Education, 26*(2), 247-273.

Franke, M., Fennema, E. & Carpenter, T. (1997). Changing teachers: Interactions between beliefs and classroom practice. En E. Fennema & B. Nelson (Eds.), *Mathematics teachers in transition* (pp. 255-282). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Gascón, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del algebra elemental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 14*(2), 203-231.

Hawley, W. & Valli, L. (1999). The essentials of professional development: A new consensus. En L. Darling-Hammond & G. Sykes (Eds.), *Teaching as the learning profession: Handbook of policy and practice* (pp. 127-150). San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Joubert, M. & Sutherland, R. (2009). *A perspective on the literature: CPD of teachers of mathematics*. National Centre for Excellence in the Teaching of Mathematics.
https://www.ncetm.org.uk/enquiry/9251

Kennedy, A. (2005). Models of continuing professional development: A framework for analysis. *Journal of In-service Education, 31*(2), 235-250.

Loucks-Horsley, S., Love, N. B., Stiles, K. E., Mundry, S. E. & Hewson, P. W. (2003). *Designing professional development for teachers of science and mathematics*. Thousands Oaks, CA: Corwin.

Matos, J. F., Powell, A. & Sztajn, P. (2009). Mathematics teachers' professional development: Processes of learning in and from practice. En R. Even and D. L. Ball (Eds.), *The professional education and development of teachers* (pp. 167-183). New York, NY: Springer Science+Business Media.

OCDE. (2009). *Creating effective teaching and learning environments. First results from talis.*
http://www.oecd.org/education/school/43023606.pdf

Olson, S. & Loucks-Horsley, S. (2000). *Inquiry and the national science education standards: A guide for teaching and learning* (National Research Council).
http://www.nap.edu/catalog.php?record_id=9596#toc

Portugais, J. (1995). *Didactique des mathématiques et formation des enseignants : le cas des erreurs de calcul* (Thèse de doctorat). Université de Genève, Suisse.

Ruiz-Higueras, L. & García, F. J. (2010). Didáctica de las Matemáticas y Formación de Maestros. En A. Bronner et al. (Eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 171-213). Montpellier: IUFM.

Ruiz-Higueras, L. & García, F. J. (2011). Análisis de praxeologías didácticas en la gestión de procesos de modelización matemática en la escuela infantil. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *14*(1), 129-158.

Schwan Smith, M. (2001). *Practice-based professional development for teachers of mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Sowder, J.T. (2007). The mathematical education and development of teachers. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 157-223). Charlotte, NC: Information Age.

Tirosh, D. & Graeber, A. (2003). Challenging and changing mathematics teaching classroom practices. En A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & F. K. S. Leung (Eds.), *Second international handbook of mathematics education* (pp. 643-687). Dordrecht: Kluwer.

Enquêter pour questionner le monde : conditions et infrastructures didactiques

Michèle Artaud
EA 4671 ADEF, Université d'Aix-Marseille (IUFM), France

Abstract. We intend to identify some didactic infrastructures that are required in the process of implementing a paradigm of questioning the world, some conditions that the very existence of this type of infrastructures needs; some differences between these conditions and the common requirements of a paradigm of the visit of works. This communication is based on the work done in the frame of the third axis of this congress.

Resumen. Nos proponemos poner de manifiesto ciertas infraestructuras didácticas que se requieren en la construcción de un paradigma del cuestionamiento del mundo, así como ciertas condiciones que la existencia de este tipo de infraestructuras necesita y la diferencia con las que existen en el marco de un paradigma de la visita de las obras. Nos apoyamos en el trabajo desarrollado en el marco del eje 3 del congreso.

Résumé. Il s'agit de mettre en évidence certaines infrastructures didactiques que suppose la mise en œuvre d'un paradigme de questionnement du monde, certaines conditions que l'existence de ce type d'infrastructures nécessite et le contraste avec celles prévalant dans le cadre d'un paradigme de visite des œuvres. Nous nous appuyons sur le travail effectué au congrès dans le cadre de l'axe 3.

IV[e] congrès international sur la TAD (Toulouse, 21-26 avril 2013)
Axe 3. *Entre visite des œuvres et questionnement du monde*

Artaud, M. (2017). Enquêter pour questionner le monde : conditions et infrastructures didactiques. Dans G. Cirade et al. (Éds), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* (pp. 557-574). https://citad4.sciencesconf.org

Mon intervention fait suite à la conférence de Javier García (2017) : il s'agit de « réagir » à l'apport riche et stimulant qu'il nous a proposé.

Je modéliserai l'enquête comme il en va usuellement en TAD et comme l'a fait J. García par le schéma herbartien $[S(X, Y, Q) \curvearrowright M] \hookrightarrow R^{\heartsuit}$, dans lequel le milieu pour l'étude M peut comprendre des réponses $R_i^{\lozenge}$ à Q, des œuvres O_k nécessaires pour étudier Q auxquelles j'ajouterai, comme l'a introduit Yves Chevallard récemment (Chevallard, 2013), des questions secondaires, Q_j, qui surgissent dans l'étude de la question première Q.

1. Questionner le monde... du développement professionnel professoral : gestes d'enquête

J. García a examiné dans sa conférence une institution de développement professionnel des professeurs, PRIMAS, qui se donne pour objet de promouvoir l'investigation (*Inquiry*) dans l'enseignement des mathématiques et des sciences. L'investigation est considérée comme un type d'enquêtes particulier et la question Q_{primas} à l'étude dans le programme PRIMAS est la suivante : « Comment développer l'équipement praxéologique du professeur pour qu'il puisse occuper sa position dans une pédagogie de l'investigation ? ». J. García regarde les dispositifs d'enquête mis en place par PRIMAS pour examiner la mesure dans laquelle ce programme questionne le monde professionnel.

À la question Q^{δ}_{primas} « Comment enquêter sur le monde professionnel du professeur pour développer son équipement praxéologique ? », PRIMAS propose une réponse en termes de « modèle en spirale » qui est une répétition de cycles « analyse, mise en œuvre, réflexion », que J. García reformule et développe en deux points :

> 1. Le début du processus, passé sous silence, est l'identification de questions professionnelles « vives » et cruciales, Q_i (j'ajoute que ces questions sont a priori au moins au nombre de sept, puisque sont proposés sept modules de formations que J. García a explicités) ;
> 2. *Analyser* les réponses existantes avec certaines œuvres ; *mettre à l'épreuve* d'un milieu didactique scolaire (des classes) les réponses $R_i^{\lozenge}$ et œuvres existantes ou la réponse $R^{\heartsuit}$; *évaluer* les réponses $R_i^{\lozenge}$ et $R^{\heartsuit}$ en fonction de la question de départ et des résultats de sa confrontation avec le milieu convoqué. (García, 2017, p. 547 ; traduction de M. Artaud)

On a là une première mise au jour de différences avec la notion d'enquête poussée en avant par la TAD que je voudrais souligner : c'est en effet une structuration cyclique en cinq gestes d'enquête, que nous mettons en œuvre depuis plusieurs années (Chevallard, 2004 ; Artaud, 2007) : il s'agit pour enquêter d'observer des réponses, de les analyser, de les évaluer, de les développer pour constituer une réponse $R^♥$ avant de défendre et diffuser cette réponse $R^♥$, les différents gestes pouvant s'entremêler.

Je reprends ci-après le tableau 2 constitué par J. García (2017, p. 550) pour analyser le quatrième module, relatif à la question $Q_{primas4}$ « Comment développer des stratégies de questionnement qui sont efficaces pour la démarche d'investigation ? » en le traduisant en français, en modifiant légèrement la mise en forme et en le complétant. J'ai rassemblé les deux dernières colonnes sous l'égide du milieu pour l'étude, M, et j'ai ajouté dans une troisième colonne, les gestes de l'enquête au sens de la TAD qui y sont réalisés.

Activité de développement professionnel	Milieu pour l'étude$M$	Gestes de l'enquête
(A) Analyse du type de questions et de leur fonction	Professeurs ; Réponses des professeurs $(R_i^\lozenge)_x$ = types de questions qu'ils utilisent et rôle qu'elles jouent ; Groupes ; discussion	Observation et analyse
(B) Questions efficaces pour appuyer l'IBL [*inquiry based learning*]	Réponses des professeurs $(R_i^\lozenge)_x$ = types de questions qui pourraient être efficaces ; Formateur : $(R_i^\lozenge)_y$ = cinq principes pour un questionnement effectif ; Groupes ; discussion	Observation, analyse et évaluation
(C) Observation et analyse d'une séance en classe	$(R_i^\lozenge)_x$ et $(R_i^\lozenge)_y$ sont disponibles Vidéo d'une classe ; Groupes ; discussion	Observation, analyse et évaluation
(D) Conception et mise en œuvre d'une séance en classe	Formateur ; $(R_i^\lozenge)'_y$ = guide pour élaborer un plan de questions effectives ; La classe du professeur x (mise en œuvre)	Développement des $R_i^\lozenge$ pour constituer une $R^♥$; défense et diffusion

(E) Réflexion collective sur la mise en œuvre	Professeurs ; Les réponses antérieures élaborées à nouveau en fonction de la mise en œuvre ; Groupes ; discussion ; Optionnel : vidéos ou cas décrits par les professeurs	Observation, analyse, évaluation, développement

Tableau 1. Étapes du processus d'étude réalisées dans l'investigation et gestes de l'étude.

La première étape, (A), demande aux professeurs de réfléchir aux questions qu'ils posent en classe et à leur fonction : ils ont donc à observer leurs praxéologies de questionnement de façon à donner une réponse $R_i^\lozenge$ et à analyser cette réponse. La deuxième étape, (B) demande les mêmes gestes de l'étude auxquels on peut adjoindre l'évaluation des réponses précédentes pour voir si elles favorisent ou non l'investigation – l'évaluation se faisant à l'aune de la réponse apportée par le formateur $(R_i^\lozenge)_y$; dans la troisième étape, (C), l'observation est réalisée par le biais d'une vidéo d'une séance en classe, qu'il s'agit d'analyser du point de vue des questions posées par la professeure et d'évaluer à nouveau ces questions pour apprécier la mesure dans laquelle elles favorisent ou pas l'investigation. La quatrième étape, (D), devrait voir le développement d'une réponse $R^\heartsuit$ par les participants (préparation d'une séance) et sa défense et sa diffusion par la mise en œuvre en classe. Enfin dans la dernière étape, (E), on observe les $R^\heartsuit$ qui deviennent donc des $R_i^\lozenge$ que l'on analyse et que l'on évalue, voire que l'on développe.

L'observation est donc présente, mais non mise en avant par le modèle en spirale PRIMAS et considérée pour l'essentiel comme allant de soi : en particulier, les œuvres qui permettent d'observer un domaine de réalité et leur mise dans le milieu ne sont pas interrogées. Ainsi, les deux premières observations pour recueillir des $R_i^\lozenge$ consistent à mettre les professeurs en groupe pour les interroger sur les praxéologies de questionnement qu'ils mettent en œuvre. On suppose donc que le dispositif de mise en groupes permettra, à lui seul, de mettre à disposition de la communauté d'étude formée par les professeurs et le formateur certaines praxéologies professionnelles des professeurs formés, ces praxéologies constituant des $(R_i^\lozenge)_x$: chaque professeur est ainsi supposé savoir s'observer ou pouvoir observer les autres. Par contraste, on aurait pu préparer l'observation : demander par exemple à chaque professeur d'enregistrer une séance en classe et de faire un compte rendu d'un extrait significatif où il pose des questions aux élèves aurait permis d'avoir des $(R_i^{\lozenge})_x$ de façon plus objectivable.

Cet ingrédient relatif à l'observation est, de mon point de vue, loin d'être anecdotique en matière de paradigme de questionnement du monde. En effet, on considère souvent comme allant de soi qu'une enquête sur une question Q va « directement » apporter au moins quelques réponses $R_i^{\lozenge}$; or cela dépend à la fois du milieu que l'on a réuni pour cela – a-t-on des œuvres qui sont susceptibles de fournir de telles $R_i^{\lozenge}$? – mais aussi de la question Q : il pourra en effet être nécessaire de passer par l'étude d'œuvres fournissant des questions secondaires pour lesquelles on pourra réunir des $R_i^{\lozenge}$ – d'où l'intérêt de signaler les questions secondaires parmi les œuvres dans le milieu pour l'étude. Un exemple pour illustrer cette dernière assertion peut être donné à partir de l'enquête que J. García a mené sur la question : « dans quelle mesure PRIMAS questionne-t-il le monde professionnel professoral ? ». Il a dû constituer une réponse à partir d'une analyse, menée dans le cadre de la TAD, de la réponse apportée par PRIMAS à la question secondaire « comment enquêter sur le monde professionnel du professeur pour développer son équipement praxéologique ? ».

Le geste de développement des réponses $R_i^{\lozenge}$ pour constituer $R^{\heartsuit}$ me paraît appeler également quelques remarques supplémentaires.

Là encore, il n'est pas véritablement mis en avant par le modèle en spirale, qui insiste sur la défense et la diffusion de cette réponse, comme si la constitution d'une réponse $R^{\heartsuit}$ n'était pas véritablement problématique. Ce fait me semble d'abord corroboré, dans le module étudié, par les indications horaires fournies : « Le module se découpe ainsi : une première session de deux heures ; retour des enseignants en classe et expérimentation de la démarche d'investigation durant une semaine ; une deuxième session d'environ une demi-heure. » La première étape constituée par (A), (B), (C) et le début de (D) se voit donc consacrer deux heures de travail collectif, tandis que la troisième et dernière étape (E) se voit allouer une demi-heure de travail collectif, la deuxième étape étant à la charge de l'étudiant qui a une semaine pour constituer sa réponse $R_x^{\heartsuit}$ et la mettre en œuvre.

Il est également étayé par un élément qui apparaît très clairement dans l'analyse de J. García synthétisée dans le tableau 1 ci-dessus : le manque d'œuvres autres que des $R_i^{\Diamond}$ dans le milieu, et notamment d'œuvres issues de savoirs – que ces savoirs soient relatifs à l'enjeu de l'étude de l'enquête sur le savoir professionnel ou à celui de l'enquête scolaire à diriger.

On notera que cela rejoint certains des éléments mis au jour par Maria Otero, Maria de los Angeles Fanaro et Viviana Carolina Llanos (2013) dans une communication orale à ce même congrès traitant de la pédagogie de l'investigation : elles notent en effet que[1] :

> … ni les développeurs, ni les évaluateurs des résultats obtenus par les projets basés sur l'*inquiry* ne remarquent explicitement ou ne problématisent les aspects didactiques et transpositifs, bien qu'ils se préoccupent de « la pauvre connaissance conceptuelle obtenue par les élèves ». Cela ne devrait pas surprendre, puisque ni dans les recommandations, ni dans les évaluations des projets d'*inquiry*, le savoir scientifique n'apparaît comme l'une des variables à considérer ; dans un sens fort, on dirait que le savoir semble transparent. (Otero et al., 2013, p. 13)

J'ajouterai que ce manque d'œuvres autres que des $R_i^{\Diamond}$ dans le milieu conduit au fait que le geste d'évaluation est restreint, notamment parce que les réponses fournies par le formateur font autorité et ne sont pas mises à l'épreuve d'autres œuvres – en d'autres termes, on manque d'une dialectique des médias et des milieux développée et systématique.

2. Questionner le monde... du développement professionnel professoral : moments de l'étude

Ces considérations sur l'absence des œuvres autres que des $R_i^{\Diamond}$ dans le milieu peuvent être appuyées par une modélisation fonctionnelle du processus d'étude en termes de moments didactiques (Chevallard, 1999) – l'enjeu de l'étude auquel ces moments font référence étant relatif à la question Q_{primas4} : « Comment développer des stratégies de questionnement qui sont efficaces pour la démarche d'investigation ? ». Je reproduis ci-après ce que dit le site du projet PRIMAS à propos de l'étude de cette question sous le titre « Caractéristiques » :

> Le module se structure ainsi : premièrement, les enseignants réfléchissent à leurs propres habitudes de questionnement, leurs objectifs, leurs forces et

1. J'ai légèrement retouché la formulation en français.

> leurs faiblesses telles qu'ils les voient. Deuxièmement, ils se confrontent aux types de questions qui encouragent la démarche d'investigation, aux stratégies qui permettent d'échanger dans une vision d'investigation – par exemple, refuser de trancher, de donner un avis ou un jugement – et qui établissent les principes de base pour la discussion.
>
> Troisièmement et finalement, les enseignants regardent une vidéo d'exemple de leçon et en discutent. Ils reproduisent ensuite ces expériences en classe et en font un compte-rendu. (PRIMAS, 2013b)

En dehors du fait que cela confirme ce que je développais plus haut à propos de la naturalisation de l'observation, cela permet de produire une première modélisation en termes de moments de l'étude, résumée dans la troisième colonne du tableau 2 ci-après : les deux premières colonnes sont, comme précédemment, celles mises en place par J. García dans son tableau 2 (2017, p. 551) augmentées des indications horaires données par le guide du module.

<table>
<tr><td>Activité de développement professionnel</td><td>Milieu pour l'étude M</td><td>Principaux moments de l'étude</td></tr>
<tr><td>(A) Analyse du type de questions et de leur fonction (15 min)</td><td>Professeurs ; Réponses des professeurs $(R_i^\lozenge)_x$ = types de questions qu'ils utilisent et rôle qu'elles jouent ; Groupes ; discussion</td><td rowspan="3">Première rencontre ; Exploratoire ; Technologico-théorique. Institutionnalisation ?</td></tr>
<tr><td>(B) Questions efficaces pour appuyer l'IBL (20 min)</td><td>Réponses des professeurs $(R_i^\lozenge)_x$ = types de questions qui pourraient être efficaces ; Formateur : $(R_i^\lozenge)_y$ = cinq principes pour un questionnement effectif ; Groupes ; discussion</td></tr>
<tr><td>(C) Observation et analyse d'une séance en classe (30 min + durée de la séance)</td><td>$(R_i^\lozenge)_x$ et $(R_i^\lozenge)_y$ sont disponibles Vidéo d'une classe ; Groupes ; discussion</td></tr>
<tr><td>(D) Conception et mise en œuvre d'une séance en classe (15 min + séance)</td><td>Formateur ; $(R_i^\lozenge)'_y$ = guide pour élaborer un plan de questions effectives ; La classe du professeur x (mise en œuvre)</td><td>Travail. Institutionnalisation ?</td></tr>
</table>

(E) Réflexion collective sur la mise en œuvre (15 min + 20 min)	Professeurs ; Les réponses antérieures élaborées à nouveau en fonction de la mise en œuvre ; Groupes ; discussion ; Optionnel : vidéos ou cas décrits par les professeurs	Évaluation ; Travail.

Tableau 2. Moments de l'étude dans l'investigation professionnelle.

Si l'on peut être à peu près certain qu'un ou des épisodes des moments de première rencontre, exploratoire et technologico-théorique à propos d'entités praxéologiques relatives à des types de tâches comme « Poser des questions appuyant le travail d'investigation des élèves » ou « Gérer les réponses des élèves aux questions posées par le professeur » auront lieu dans les trois premières étapes, les épisodes de moments de l'étude susceptibles d'être réalisés autour de ces mêmes entités praxéologiques dans les étapes (D) et (E) sont moins aisément identifiables. Le fait que les auteurs du module affirment qu'ils « reproduisent ensuite ces expériences en classe et en font un compte-rendu » amène à penser à un épisode du moment de travail (lié à la reproduction et au compte-rendu), et à un épisode du moment d'évaluation lié au compte rendu et à la discussion qui est supposée avoir lieu (même si on peut douter que le tout puisse être véritablement réalisé en 30 minutes). En revanche, le moment de l'institutionnalisation d'une réponse liée à ces deux types de tâches semble, à peu de choses près, absent.

La considération du guide destiné au formateur (PRIMAS, 2013a) éclaire davantage l'analyse. Elle confirme que les étapes (D) et (E) sont bien censées réaliser un épisode du moment de travail et d'évaluation des entités praxéologiques citées. Du point de vue de l'institutionnalisation, les choses sont moins nettes : le document distribué dans l'étape (B) – les cinq principes pour un questionnement effectif dont les titres sont reproduits ci-après –, et qui permet la réalisation d'un épisode du moment technologico-théorique, peut être considéré comme réalisant également un très bref épisode du moment de l'institutionnalisation. En effet, les cinq principes figurant dans ce document peuvent constituer une référence pour l'analyse de la séance dans l'étape (C). On peut noter que la séance pourrait également servir à mettre à l'épreuve ces cinq principes mais cela ne me semble pas être prévu par le guide pour le formateur qui donne comme consigne :

> Which of the following principles can you see Gwen using in her lesson? Give examples.
>
> [1.] Plan to use questions that encourage thinking and reasoning;
>
> [2.] Ask questions in way that include everyone;
>
> [3.] Give students time to think;
>
> [4.] Avoid judging students' responses;
>
> [5.] Follow up students' responses in way that encourage deeper thinking.
>
> (PRIMAS, 2013a, p. 6)

Dans l'étape (D), qui doit préparer la mise en œuvre dans les classes des participants, deux documents sont susceptibles d'être distribués. Le premier (PRIMAS, 2013a, p. 9), intitulé un plan pour un questionnement effectif, fournit, en une page, sept étapes pour préparer la séance de ce point de vue : il s'agit de préparer comment arranger la salle et les ressources nécessaires ; comment introduire la session de questions, comment établir des règles de base (comme la fameuse « *no hands up* ») ; la première question utilisée ; comment donner du temps de réflexion ; comment et quand intervenir ; les questions à utiliser dans le cours de la séance et à la fin. Le second (PRIMAS, 2013a, p. 9), un exemple de plan de séance sur un problème de partage de coût d'essence, tient en deux pages et six étapes : introduire le problème et donner du temps pour la réflexion individuelle (5 minutes) ; collecter les idées initiales au tableau (5 minutes) ; travail des élèves sur le problème (20 minutes) ; discussion en classe entière sur les approches utilisées (10 minutes) ; les élèves ont un second temps de travail sur le problème (10 minutes) ; la classe entière rend compte des raisonnements (10 minutes). Leur distribution peut constituer un épisode, toujours fort bref, d'un moment d'institutionnalisation.

On voit donc que des éléments mis en évidence par J. García dans son analyse de ce quatrième module peuvent se reformuler en termes de moments de l'étude ainsi : la réalisation des épisodes du moment technologico-théorique prend la forme de l'apport par le formateur dans le milieu d'ingrédients de réponse déjà constitués, $(R_i^\lozenge)_y$, à partir desquels on mettra à l'épreuve certains $(R_i^\lozenge)_x$; seuls deux brefs épisodes du moment d'institutionnalisation sont réalisés par le truchement de la distribution d'au plus trois documents dont l'un d'entre eux est la réponse $(R_i^{\lozenge})_y$ évoquée et on peut donc avoir $(R_i^{\lozenge})_y$ inclus dans $R^{\heartsuit}$ sans que $(R_i^{\lozenge})_y$ ait été mise à l'épreuve par une dialectique des médias et des milieux appropriée. Ce que J. García complète ainsi : « Hablamos de "respuestas", en plural, porque es de esperar que cada profesor elabore una posible respuesta $R^{\heartsuit}$, con posibles elementos comunes con otras, pero propia. » (García, 2017, p. 550)

On met ainsi en évidence, de mon point de vue, deux éléments principaux des difficultés que rencontrent la mise en place d'un paradigme de questionnement du monde : la constitution d'un milieu pour l'étude « suffisamment riche » et son exploitation par le biais notamment d'une dialectique des médias et des milieux suffisamment développée pour mener l'enquête ; la réalisation de l'institutionnalisation de la réponse $R^{\heartsuit}$ que l'enquête a permis de faire émerger. C'est ce deuxième point que je développerai quelque peu ci-après parce qu'il est au cœur de la réalisation du premier dès lors que les réponses $R^{\heartsuit}$ produites constituent des œuvres qui sont appelées à venir s'intégrer au milieu pour l'étude d'autres questions sur lesquelles mener une enquête.

3. Infrastructures pour questionner le monde... Le moment de l'institutionnalisation

On voit dans ce qui précède combien le moment de l'institutionnalisation, qui met en forme la réponse $R^{\heartsuit}$, est peu présent dans les organisations de l'étude proposées. Or la réalisation de ce moment est cruciale dans la mise en forme des organisations de savoir (Artaud 2007 & 2011 ; Ali Tatar et al., 2010) ou, plus largement, dans celle des entités praxéologiques qui constituent la réponse $R^{\heartsuit}$ comme on l'a vu plus haut dans l'analyse de PRIMAS.

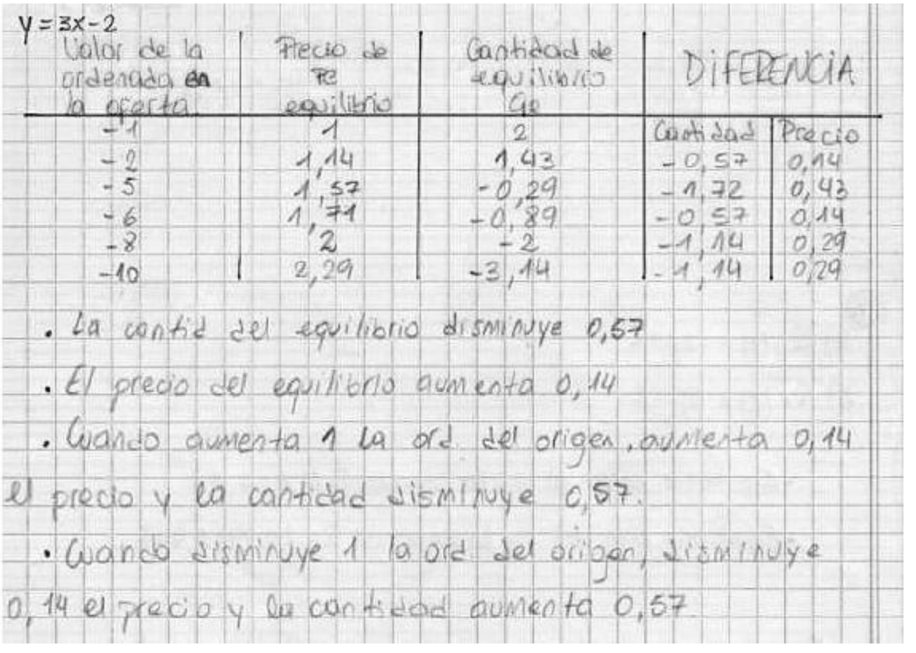
La réalisation d'une enquête demande, en effet, que l'on fasse régulièrement le point sur l'avancée de cette enquête du point de vue de la production de la réponse $R^{\heartsuit}$ à la question Q pour « garder le cap » et pouvoir relancer l'enquête ; ces mises au point ou ces bilans d'étapes vont constituer un certain nombre de $R_j^{\heartsuit}$ à des questions Q_j qui sont apparues au cours de l'enquête et qui se sont avérées cruciales pour Q – ou encore que l'on a cru déceler comme étant cruciales un certain temps – et que pour cela je noterai Q_j^c. Je supposerai pour simplifier mon propos que cette question relève d'un savoir S identifié – en donnant au mot « savoir » toute l'extension possible et usuelle en TAD.

Le fait que l'enquête que l'on va mener sur Q_j^c soit motivée par l'enquête menée sur Q va en conditionner la nature : la mise en forme de la praxéologie $R_j^{\heartsuit}$ – qui concrétise la réalisation d'un (épisode d'un) moment d'institutionnalisation – a à prendre en charge le fait que cette praxéologie doit venir s'insérer dans la réponse $R^{\heartsuit}$.

Je prendrai pour illustrer mon propos l'exemple d'un PER dont une analyse de la réalisation à partir des dialectiques de l'enquête a fait l'objet d'une communication à ce congrès par Verónica Parra, María Rita Otero et María de los Ángeles Fanaro (2013). La question Q qui suscite l'enquête est une question issue de la microéconomie : « Comment déterminer le comportement de l'équilibre du marché d'un bien, connaissant la demande et l'offre de ce bien sur ce marché ? »

Un travail est mené dans la classe, que l'on synthétisera grossièrement ainsi : l'étude de la question Q est limitée à des fonctions d'offre et de demande affines, du type $C_o(p) = dp - c$ et $C_d(p) = -bp + a$ où a, b, c et d sont des nombres réels positifs, fonctions dont on étudie un spécimen par groupe ; le point d'équilibre est déterminé, dans le cas particulier du spécimen et dans le cas général, comme intersection de ces deux fonctions, et on cherche à voir comment varie le point d'équilibre quand les paramètres de l'offre et de la demande (valeurs absolues de l'ordonnée à l'origine et de la pente) sont modifiés et de combien il varie. C'est cette dernière question – cruciale pour apporter réponse à la question initiale – que nous considérerons ici : nous la noterons Q_5^c.

Son étude suscite la convocation dans le milieu – par l'intermédiaire du professeur – d'une œuvre jusque-là inconnue, la dérivation, après que les élèves ont réalisé une étude expérimentale dont la figure 1 fournit un exemple de trace écrite (Parra et al., 2013, p. 16).



y = 3x - 2

Valor de la ordenada en la oferta	Precio de equilibrio Pe	Cantidad de equilibrio Qe	DIFERENCIA Cantidad	DIFERENCIA Precio
-1	1	2		
-2	1,14	1,43	-0,57	0,14
-5	1,57	-0,29	-1,72	0,43
-6	1,71	-0,89	-0,57	0,14
-8	2	-2	-1,14	0,29
-10	2,29	-3,14	-1,14	0,29

- La cantid del equilibrio disminuye 0,57
- El precio del equilibrio aumenta 0,14
- Cuando aumenta 1 la ord del origen, aumenta 0,14 el precio y la cantidad disminuye 0,57.
- Cuando disminuye 1 la ord del origen, disminuye 0,14 el precio y la cantidad aumenta 0,57.

Figure 1. Une étude expérimentale de la variation du point d'équilibre.

Les auteures explicitent le fait que l'introduction de la notion de dérivée à l'aide de celle de limite (œuvre qui pouvait venir s'intégrer dans le milieu pour l'étude puisqu'elle avait été enjeu de l'étude dans une classe antérieure) a suscité un « hors-sujet », qui a conduit à « reconstruire partiellement la praxéologie relative à la limite de fonctions » en réponse à des questions posées par les élèves comme « La limite d'une fonction existe-t-elle toujours ? » ou encore « Combien d'indéterminations trouvons-nous ? Comment peuvent-elles se sauver ? » (Parra et al., 2013, p. 17).

Pour le dire autrement, on a antérieurement constitué une réponse $R^{\heartsuit}_{\text{Lim}}$ qui répondait à au moins une question Q_{Lim} ; elle intervient ici comme œuvre O_{Lim} que l'on met dans le milieu pour l'étude et dont on a à faire sortir des éléments utiles pour la constitution d'une réponse $R^{\heartsuit}_5$ ou que l'on a à compléter pour qu'elle puisse participer à la production de $R^{\heartsuit}_5$. C'est ce geste de l'étude, relatif à la dialectique de l'inscription et de l'excription tout comme à la dialectique des médias et des milieux, qui s'avère semble-t-il difficile à mettre en œuvre ici au sein des moments technologico-théorique et de l'institutionnalisation – on notera que ce geste pourrait également intervenir dans la réalisation d'un épisode du moment exploratoire. C'est ainsi par exemple que les deux questions citées plus haut à propos des limites pourraient être laissées de côté si leurs réponses ne s'avèrent pas utiles pour l'étude poursuivie.

Nous examinerons le point de vue de l'institutionnalisation seulement, en considérant le processus d'étude de la question Q_5^c : comment varie le point d'équilibre quand on modifie les paramètres de l'offre et de la demande (valeurs absolues de l'ordonnée à l'origine et de la pente) et de combien varie-t-il ? On trouvera ci-après un élément d'institutionnalisation dont nos collègues rendent compte, une affiche (voir figure 2) produite par un groupe d'élèves en réponse à une demande du professeur de « réaliser une synthèse de toutes les questions étudiées depuis le premier jour de classe » (Parra et al., 2013, pp. 18-19).

On voit que cette réponse, que je noterai $(R_5^{\heartsuit})_x$, comprend la définition de la dérivée en un point et la raison d'être rencontrée dans l'étude, à savoir le fait que la dérivée permet d'étudier la rapidité de changement d'une grandeur en fonction d'une autre ; mais on n'a pas la trace des éléments qui permettent d'accomplir cette étude : on aurait pu par exemple trouver la trace de la manière d'exploiter la dérivée pour obtenir la variation du point d'équilibre en fonction de celle de la pente de la fonction d'offre. On trouve également, comme prévu, des éléments de O_{Lim}, qui ont un rôle théorique ici puisqu'ils permettent de justifier par exemple le fait que la dérivée de $p(b) = \dfrac{a+c}{b+d}$ est $-\dfrac{a+c}{(b+d)^2}$; mais on a à la fois davantage que ce qui est nécessaire à la constitution de la réponse (par exemple, la limite en l'infini n'est pas ici pertinente) et pas assez, puisqu'on n'a pas la manière de déterminer la limite de $\dfrac{\Delta p}{\Delta b}$ pour la fonction $p(b) = \dfrac{a+c}{b+d}$ (ce qui n'est cependant pas très surprenant compte tenu du rôle théorique joué par la détermination de la limite dans la praxéologie mise en place).

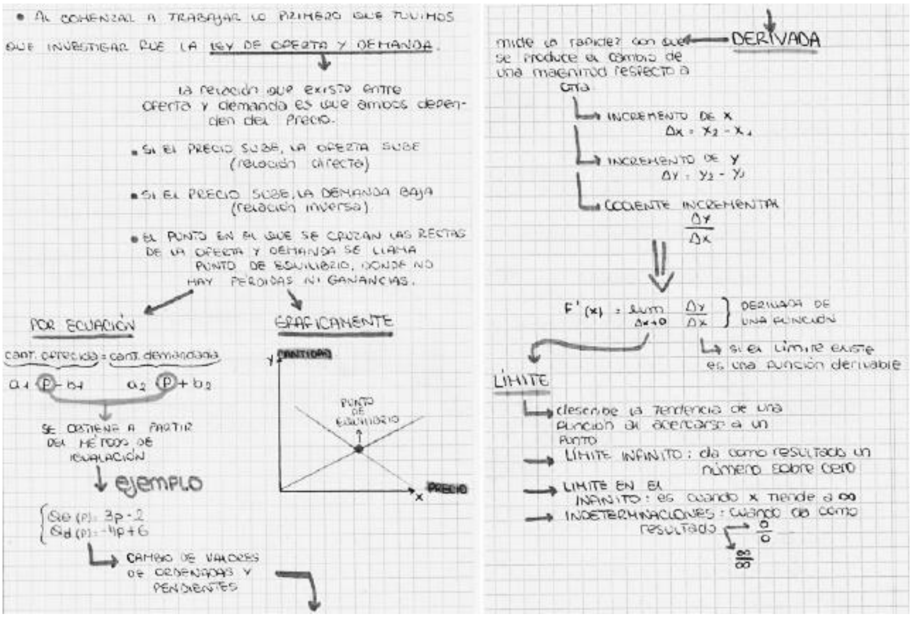


Figure 2. Un élément d'institutionnalisation.

La communication de V. Parra, M. Otero et M.-A. Fanaro ne développe ni la manière dont l'excription/inscription de la dérivation a été réalisée, ni dans quelle mesure la réponse obtenue par cette étude a été mise en forme et insérée dans $R_5^{\heartsuit}$, bien qu'elles notent que « chaque groupe a apporté ses recherches et dans l'ensemble, on a noté dans le tableau chacun des cas élémentaires d'une dérivation, les règles et certaines des propriétés » (Parra et al., 2013, p. 18). On peut cependant penser qu'à partir du moment où la nécessité de la dérivation a été mise en évidence, le paradigme de la visite des œuvres a dû peser sur l'étude effectuée et sa mise en forme.

Imaginons que tel n'ait pas été le cas. En gardant les notations de l'article – $C_o(p) = dp - c$ et $C_d(p) = -bp + a$ où a, b, c et d sont des nombres réels positifs –, le prix d'équilibre p_e (qui est le prix pour lequel l'offre est égale à la demande, soit la solution de $C_o(p) = C_d(p)$) vaut $\dfrac{a+c}{b+d}$: il est donc une fonction affine des ordonnées à l'origine et une fonction homographique du type $f(x) = \dfrac{k}{x+m}$ des valeurs absolues des pentes. On devrait donc avoir, dans le chaînage des questions, au moins deux questions supplémentaires : « Comment calculer la dérivée d'une fonction affine ? » et « Comment calculer la dérivée d'une fonction du type $f(x) = \frac{k}{x+m}$? ». On remarque bien entendu l'absence de la constitution de la technique qui permet de répondre à la question Q_5^c : ce dernier aspect peut être absent ici en raison de la demande du professeur d'institutionnaliser les questions, mais on notera que la consigne n'a pas suffi à éviter l'institutionnalisation d'une partie de l'environnement technologico-théorique...

Pour avoir davantage de fonctions, il faudrait poursuivre l'étude en changeant le type de fonction d'offre, en considérant par exemple des fonctions du second degré du type $\mathcal{O}(x) = ap^2 + b$ et $\mathcal{D}(x) = -cp^2 + d$. Le prix d'équilibre serait donné, comme solution d'une équation du second degré, par $p_e = \sqrt{\frac{d-b}{a+c}}$ et on aurait à déterminer la dérivée d'une fonction du type $\sqrt{x+k}$ ou d'une fonction du type $\frac{k}{\sqrt{x+m}}$. On aurait là un nouvel ingrédient qu'il faudrait ensuite amalgamer à la réponse déjà mise en forme.

Ce processus d'amalgamation d'un certain nombre de réponses entre elles me semble être rendu spécialement nécessaire par le fait que l'on est dans une institution didactique : un enquêteur occasionnel peut en effet mettre en forme une réponse $R^{\heartsuit}$ sans trop se préoccuper de la mise en forme des réponses aux questions secondaires et de leur éventuelle possibilité d'amalgamation ; mais un enquêteur professionnel se verra pénaliser s'il laisse de côté des morceaux de réponses qui lui seraient utiles plus tard, ou s'il n'amalgame pas suffisamment ses réponses – notamment du point de vue du temps d'horloge dépensé.

On a là donc une praxéologie didactique relative au type de tâches « Réaliser le moment de l'institutionnalisation » dans lequel le partage topogénétique entre le ou les directeurs d'étude et les étudiants est particulièrement sensible, et sur laquelle pèsent en outre davantage que dans un moment exploratoire, par exemple, les conditions du paradigme de la visite des œuvres. En d'autres termes, il y a une frontière fragile à dessiner pour institutionnaliser suffisamment mais pas trop si l'on veut créer des conditions pour que l'institutionnalisation puisse échapper à l'influence du paradigme de la visite des œuvres...

4. Le paradigme du questionnement du monde... Conditions, contraintes et infrastructures

Je soumettrai au débat, pour terminer, quelques éléments qui me semblent avoir émergé du travail présenté.

Pour juger la mesure dans laquelle une enquête donnée relève du questionnement du monde, J. García a principalement identifié les éléments du milieu pour l'étude. Pour importants qu'ils soient, ces éléments me semblent devoir être complétés par l'analyse des moments de l'étude, celle des gestes de l'étude et celle des dialectiques. La problématisation ou la non problématisation du geste d'observation, la façon dont la dialectique des médias et des milieux est réalisée, la façon dont les moments sont réalisés sont autant d'indicateurs, dont la liste n'est bien entendu pas exhaustive, de la présence ou de l'absence d'un questionnement du monde « authentique ».

Si l'on adopte ce point de vue pour analyser une enquête, il me paraît que l'analyse de la réalisation des moments de l'étude doit être première : c'est elle qui donne les fonctions didactiques des étapes de l'enquête et permet de mettre au jour les praxéologies de savoir qui émergent de l'enquête ; les gestes de l'étude, les dialectiques, la constitution du milieu pour l'étude, le *topos* respectif du directeur d'étude et de l'étudiant, etc. permettent d'analyser la façon dont les moments de l'étude sont accomplis, et donc s'inscrivent dans la technique de réalisation de ces moments.

Dans cette analyse, la réalisation du moment de l'institutionnalisation me semble une dimension à considérer avec un intérêt particulier dans une institution didactique. Nous avons vu qu'il permet de mettre en forme une réponse $R^{\heartsuit}$, qui aura probablement à s'insérer dans le milieu pour une enquête future, voire pour celle en cours. La mise en forme de l'organisation praxéologique qui a émergé de l'enquête n'est alors pas neutre, d'autant que la réalisation de ce moment semble particulièrement sensible au partage topogénétique et aux conditions de la visite des œuvres. En particulier, si dans le paradigme de la visite des œuvres la décontextualisation est à son acmé, dans celui du questionnement du monde il convient notamment de garder une trace des raisons d'être de l'œuvre étudiée.

L'étude des conditions sous lesquelles la motivation propre au paradigme du questionnement du monde peut exister dans le moment de l'institutionnalisation, comme celle des praxéologies de mise en forme qui sont produites ou qui pourraient l'être alors, me paraît une source d'avancées dans les recherches sur les PER notamment.

L'examen de ces différentes dimensions mettra en lumière les questions posées à partir de la question principale objet de l'enquête et dont certaines seront cruciales : le réseau de questions cruciales manifeste le cheminement de l'étude et toutes les questions du réseau n'ont pas à être conservées en tant que telles dans la praxéologie de savoir institutionnalisée $R^{\heartsuit}$; certaines en effet sont relatives à la réalisation des moments de l'étude et c'est la réponse qui leur est apportée, ou une partie de celle-ci, qui trouvera éventuellement une place adaptée dans la réponse $R^{\heartsuit}$. La gestion de plusieurs processus d'étude simultanés, en quelque sorte emboîtés, ou du moins qui ne se succèdent pas linéairement, nécessite d'articuler la chronogenèse de chacun et c'est la question objet de l'enquête initiale, comme les nécessités de son étude, qui doivent guider cette articulation pour faire vivre le paradigme du questionnement du monde : la considération du moment de l'institutionnalisation me paraît, à cet égard, particulièrement révélateur.

Références

Ali Tatar, M.-L., Artaud, M. & Sahraoui, L. (2010). Modélisation et mise en place d'organisations mathématiques mixtes. Dans A. Bronner et al. (Éds), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 677-696). Montpellier : IUFM.

Artaud, M. (2007). La TAD comme théorie pour la formation des professeurs. Structures et fonctions. Dans L. Ruiz-Higueras, A. Estepa & F. J. García (Éds), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD)* (pp. 241-259). Jaén, Espagne : Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Artaud, M. (2011). Les moments de l'étude : un point d'arrêt de la diffusion ? Dans M. Bosch et al. (Éds), *Un panorama de la TAD* (pp. 141-162). Barcelone, Espagne : CRM.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques, 19*(2), 221-266.

Chevallard, Y. (2004, mai). *Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire*. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=45

Chevallard, Y. (2013). *Journal du séminaire TAD/IDD 2012-2013. Séances 1 et 2*. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=212&var_recherche=tad%2Fidd

García, F. J. (2017). Modificación de las praxeologías didácticas del profesorado: un programa de desarrollo profesional en torno al aprendizaje por investigación. Dans G. Cirade et al. (Éds), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* (pp. 529-556). https://citad4.sciencesconf.org

Otero, M., Llanos, V. C. & Fanaro, M.-L. (2013, avril). *La pédagogie de l'enquête et l'*inquiry *: une analyse depuis l'enseignement des mathématiques et de la physique.* Communication présentée au 4e congrès international sur la théorie anthropologique du didactique (TAD), Toulouse. https://www.researchgate.net/publication/235993070_La_pedagogie_de_l%27enquete_et_l%27inquiry_une_analyse_depuis_l%27enseignement_des_mathematiques_et_de_la_physique

Parra, V., Otero, M. & Fanaro, M.-L. (2013, avril). *Comment fonctionnent les dialectiques dans un parcours d'étude et de recherche autour d'un système économique*. Communication présentée au 4e congrès international sur la théorie anthropologique du didactique (TAD), Toulouse. https://www.researchgate.net/publication/236003195_Comment_fonctionnent_les_dialectiques_dans_l%27implementation_d%27un_parcours_d%27etude_et_de_recherche_autour_d%27un_systeme_economique

PRIMAS. (2013a). *Asking questions that encourage inquiry-based learning*. http://www.primas-project.eu/servlet/supportBinaryFiles?referenceId=2&supportId=1362

PRIMAS. (2013b). *Module 4 de développement professionnel : Poser des questions suscitant la réflexion*. http://www.primas-project.eu/artikel/fr/1362/module-4-dp-poser-des-questions-suscitant-la-rflexion/view.do?lang=fr

À la recherche du didactique sur internet : un outil de formation [et de recherche] en didactique à l'université

Caroline Ladage

EA 4671 ADEF, Université d'Aix-Marseille, France

Abstract. Completing a didactic analysis is a learning task which goal is to discover that the didactic is all around us in society (and not only in "classical" educational institutions). We study an experiment with students in educational sciences in the task of achieving a didactic analysis of a didactic situation they have to find by themselves. The story of their research and the didactic analysis they produced are analysed in the light of the study of the conditions and constraints of the introduction of the study mode based on questioning the world, highlighting the need to learn to identify, to see, to spot and ultimately to fully analyse the didactic to improve its social efficiency.

Resumen. El análisis didáctico es un tipo de tareas cuyo objetivo consiste en aprender a descubrir que lo didáctico está a nuestro alrededor, en el seno de la sociedad (y no solo en las instituciones escolares «clásicas»). Estudiamos un dispositivo experimental con estudiantes de ciencias de la educación cuando llevan a cabo un análisis didáctico de una situación didáctica que deben encontrar por ellos mismos. Se analiza la narración de sus indagaciones y los análisis didácticos producidos a la luz de una reflexión sobre las condiciones y restricciones de la introducción del modo de estudio del cuestionamiento del mundo, poniendo de manifiesto la necesidad de aprender a ubicar, a ver, a identificar y, finalmente, a analizar plenamente lo didáctico para mejorar su eficacia social.

Résumé. L'analyse didactique est un type de tâches dont l'objectif est d'apprendre à découvrir qu'il y a du didactique tout autour de nous, au sein de la société (et pas seulement dans les institutions scolaires « classiques »). Nous étudions un dispositif expérimental auprès d'étudiants en sciences de l'éducation dans la réalisation d'une analyse didactique d'une situation didactique qu'ils devaient rechercher par eux-mêmes. Le récit de leurs recherches et les analyses didactiques produites sont analysés à la lumière de la réflexion sur les conditions et contraintes de l'introduction du mode d'étude de questionnement du monde, mettant en évidence la nécessité d'apprendre à repérer, à voir, à identifier et, finalement, à analyser pleinement le didactique afin d'en améliorer l'efficacité sociale.

IV^e^ congrès international sur la TAD (Toulouse, 21-26 avril 2013)
Axe 3. *Entre visite des œuvres et questionnement du monde*

Ladage, C. (2017). À la recherche du didactique sur internet : un outil de formation [et de recherche] en didactique à l'université. Dans G. Cirade et al. (Éds), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* (pp. 575-596). https://citad4.sciencesconf.org

1. Introduction

Dans cette communication nous proposons d'étudier une ingénierie didactique qui pose le problème de l'analyse didactique dans le cadre d'un enseignement de *didactique fondamentale* à l'université, en licence et en master de sciences de l'éducation.

L'analyse didactique y est travaillée comme enjeu didactique principal intimement associé à l'analyse praxéologique. L'objet de l'analyse didactique est une situation du monde évoquée dans un texte ou visible dans une séquence filmée, dans laquelle du didactique est repérable.

Pour analyser le didactique dans une situation il faut pouvoir y observer quelqu'un, ou quelque instance *y*, qui fait quelque chose, pour que quelqu'un, ou quelque instance *x*, apprenne quelque chose. Si par exemple on observe une situation didactique dans laquelle l'instance *x* qui apprend quelque chose est absente, cette situation est incomplète (par exemple parce qu'elle ne s'est pas encore déroulée). Elle n'est donc qu'une partie d'un système didactique potentiel dont on ne peut faire que l'analyse *a priori* en se demandant comment elle va par exemple fonctionner pour qui est censé apprendre. L'enjeu didactique de l'analyse d'une situation « complète » est donc de pouvoir repérer les prises de décisions de *y* et de *x* dans le travail du groupe engagé dans l'étude. Un exposé porté par une intention didactique qu'une instance *y* assumerait seule, tel un scénario de leçon, de séquence, etc., ne montre donc pas la situation didactique elle-même.

Yves Chevallard (2001) suggère que « la capacité à engager et à approfondir une analyse didactique a un intérêt beaucoup plus large qu'on ne le croit généralement : un intérêt "citoyen" » (p. 14). Travailler sur l'analyse didactique avec un groupe d'étudiants ne concerne pas ici un travail d'analyse d'une situation didactique donnée. Le travail proposé aux étudiants a pour objectif de les mettre en contact avec le didactique présent autour d'eux et de leur proposer des outils théoriques pour en comprendre les rouages. L'enjeu d'un tel enseignement n'est donc pas d'enseigner l'analyse didactique *en soi*, avec son lot de gestes techniques normalisés appliqués à des situations didactiques disciplinaires que l'on ne serait autorisé à réaliser qu'à condition d'être un spécialiste ou au moins un étudiant du domaine considéré. L'enjeu est de faire émerger au cœur du travail tout d'abord la question de la rencontre de témoins de situations didactiques complètes, faisant apparaître de façon plus ou moins explicite le travail de collectifs réunis en un ou plusieurs systèmes didactiques autour de questions ou d'enjeux didactiques également plus ou moins difficiles à repérer. Comme nous le verrons dans cette étude, ce repérage ne va en effet pas toujours de soi dès l'instant où l'on quitte l'enceinte des institutions éducatives pour chercher le didactique dans des configurations didactiques disponibles dans la société.

La recherche du didactique ainsi formulée se propose de contribuer à changer le regard porté sur la nature des exposés disponibles dans la société, non pas en en faisant une étude formelle, mais en partant à sa rencontre sous la forme d'une recherche de situations, dont il faudra faire l'analyse didactique, sans savoir *a priori* le type d'outil dont il faudra pouvoir se servir pour accomplir cette tâche. La démarche de recherche ainsi mise en œuvre de façon expérimentale trouve toute sa justification théorique dans les notions bien connues en TAD du paradigme de la visite des œuvres et de celui du questionnement du monde.

Nous proposons dans un premier temps d'approfondir l'approche théorique dans laquelle s'inscrit ce travail de quête et de questionnement de situations didactiques pour identifier ensuite les notions théoriques utiles aussi bien à la réalisation de l'analyse didactique elle-même qu'à la compréhension du travail réalisé, ici avec un groupe de 89 étudiants de licence et de master en sciences de l'éducation.

2. Les outils de la TAD sollicités

Comment analyser le didactique présent dans une situation qui nous est donnée à connaître soit par l'observation directe, soit par une description orale ou écrite, plus ou moins allusive, plus ou moins précise de cette situation ?

Nous étudierons brièvement dans ce qui suit les notions au cœur de l'analyse didactique, étude dont les frontières sont difficiles à tracer tant l'analyse didactique, et son approfondissement dans l'analyse praxéologique, sollicitent la théorie anthropologique du didactique dans ses développements les plus récents.

Pour comprendre le complexe des gestes de l'analyse didactique telle qu'elle a été élaborée et enseignée par Yves Chevallard nous nous appuyons sur un ensemble de leçons qu'il a élaborées à l'intention de ses étudiants en licence et en master en sciences de l'éducation. Le matériau essentiel du bref rappel théorique qui suit se trouve de ce fait consigné principalement dans les *Leçons de didactique* du cours de *Didactique fondamentale* de l'année 2011-2012 (Chevallard, 2012), ainsi que dans différentes notes à l'intention des étudiants pour la réalisation de leurs analyses didactiques, mais aussi dans le journal du séminaire TAD/IDD (Chevallard, 2011).

Pour démarrer la recherche de didactique, commençons par rappeler la définition donnée aux étudiants de la notion de *situation didactique* :

> On dira que, dans une situation sociale donnée, il y a du didactique lorsque quelqu'un ou, plus généralement, quelque instance (personne ou institution) envisage de faire (ou fait) quelque chose afin de faire que quelqu'un ou quelque instance apprenne quelque chose. Tous les mots sont importants dans cette formulation. La définition proposée est en fait très large. Lorsqu'une situation sociale contient du didactique, on dira pour faire court que c'est une situation didactique. (Chevallard, 2012, p. 4)

Rappelons aussi que la structure de la situation didactique (*son modèle didactique de référence*) ainsi repérée est formalisée dans la notion de système didactique, système noté $S(x\,;y\,;♥)$.

L'analyse didactique démarrera alors par l'identification, dans les situations sociales examinées, de systèmes didactiques, réalités sociales qui rassemblent ces trois entités : un « élève » x, un « professeur » y et un enjeu didactique ♥. Les mots « élève » et « professeur » sont mis entre guillemets pour souligner le fait que la notion de système didactique $S(X\,;\,Y\,;\,♥)$ s'applique bien au-delà de l'institution scolaire ordinaire.

Le premier moment du travail de l'analyse didactique avec les étudiants est donc d'apprendre à chercher le didactique autour de soi et de l'analyser dans les situations sociales où il se dissimule. Cette tâche n'est pas aisée dans une société marquée, comme le dit Chevallard (2012), par *un refoulement culturel du didactique* : « Il est vraisemblable que le préjugé défavorable qui frappe traditionnellement l'adjectif *didactique* est lié au refoulement culturel du didactique : l'un et l'autre apparaissent comme des traits de civilisation corrélés, pérennes, ubiquitaires. » (p. 12) Ce refoulement du didactique se traduit par le fait que « l'immense majorité des discours et des textes qui parlent du monde social ignorent le didactique ». Si on trouve bien des discours sur l'école ou sur le pédagogique, peu de place est laissée au didactique. Chevallard en donne l'explication suivante :

> Ce refoulement apparaît, à l'analyse, lié aux deux « quelque chose » mentionnés dans la définition du didactique. Tout se passe en vérité comme s'il n'était convenable de parler ni du « quelque chose » que *y* prétend aider *x* à apprendre (le contenu de savoir qui est l'enjeu de l'interaction didactique), ni du quelque chose que *y* fait pour cela (les « gestes » didactiques qu'il accomplit à propos de ce contenu). Les deux « manques » sont en fait liés. S'agissant du second « quelque chose » – que le symbole ♥ représente –, on n'en parle généralement que « du bout des mots », comme si la chose était inconvenante, déplacée, impudique. Quand on a ainsi indiqué grossièrement la « matière » du projet didactique, on ne dit mot, généralement, de la façon dont ce projet prendra forme concrète. Tout se passe, de fait, comme si l'on ne pouvait parler du premier « quelque chose » – l'interaction didactique, les « gestes » didactiques à accomplir – qu'à la condition d'expulser le second « quelque chose ». Ce faisant, on réduit les pratiques didactiques (et leurs principes organisateurs), ainsi évidées des contenus qu'elles visaient, à une structure abstraite : *le pédagogique*. À la place de la didactique, le refoulement des contenus de savoir installe ainsi la *pédagogie*, qui ne saurait pourtant, à elle toute seule, rendre compte de la vie du didactique au sein de la société. C'est en ce point que la didactique se sépare de l'idée d'une pédagogie qui se suffirait à elle-même pour expliquer le didactique et fonder l'action didactique. (p. 11)

Une fois que l'on a repéré dans une situation sociale le schéma de base d'un système didactique observable dans sa complétude, l'analyse didactique s'appuie sur deux outils théoriques centraux en TAD : l'échelle des niveaux de codétermination didactique (pour étudier les conditions et contraintes pesant sur la formation et le déroulement de la situation didactique), et le schéma herbartien.

En commençant par le premier de ces outils et sans pouvoir commenter chacun de ses niveaux dans le cadre de la présente étude, notons à titre d'exemple son intérêt pour identifier la complexité de l'économie et de l'écologie du didactique causant la fragilité d'un système didactique « de la vie quotidienne » dans sa capacité de donner à voir quelques-unes des incertitudes qui pèsent sur sa formation et sur son fonctionnement. Le niveau de l'école dans l'échelle de codétermination peut ainsi révéler que l'environnement dans lequel un système didactique a émergé peut être à l'origine de sa fragilité dès l'instant où l'école en question ne bénéficie pas d'une certaine reconnaissance par la société, d'une « puissance d'investiture sociale » que Chevallard (2012) appelle, en s'inspirant de Brousseau (2010), « mandante à l'endroit de $S(X\,;\,Y\,;\,\heartsuit)$ » (p. 15). Dans les cas où l'instance mandante s'avère autre que les institutions du système scolaire son identification n'est pas aisée mais revêt tout son intérêt dès lors qu'on étudie par exemple les situations didactiques professionnelles.

Identifier les deux « quelque chose » contenus dans la situation didactique suppose d'être capable de repérer la chaîne des intentions et des gestes didactiques qui s'y jouent. C'est à ce stade que le schéma herbartien développé (reproduit ci-après) servira d'outil pour identifier les composants du milieu M.

$$[S(X\,;\,Y\,;\,Q) \curvearrowright \{\, R_1^\Diamond, R_2^\Diamond, \ldots, R_m^\Diamond, O_{m+1}, O_{m+2}, \ldots, O_n \,\}] \hookrightarrow R^\heartsuit.$$

Le travail se poursuit par une série ouverte de questions. Quel est le didactique présent dans la situation ? Quels sont les systèmes didactiques présents ou évoqués par les acteurs de la situation ? Dans la construction de la réponse $R^\heartsuit$, qu'apprend-on ? Quels gestes didactiques sont accomplis ou sont envisagés ? Quels types de tâches, techniques, technologies, théories sont incorporés dans la situation ?

C'est au moment où le travail de l'analyse didactique en arrive à l'analyse de l'enjeu didactique ♥ du système didactique considéré que le besoin d'un approfondissement va émerger. L'analyse didactique de ♥ débouche ainsi sur une *analytique* didactique que Chevallard (2012) explique de la manière suivante :

> On parlera à ce propos d'*analytique didactique*, c'est-à-dire d'une opération analysant – découpant – l'œuvre à étudier, *O*, en parties, sous-parties, etc., dont l'étude est regardée (par *y*, par *X*, par l'institution mandante, etc.) comme participant authentiquement et légitimement de l'étude de *O*, voire – thèse plus forte – comme épuisant l'étude de *O*. (pp. 29-30)

Chevallard (2012) propose alors comme prolongement de l'analyse didactique une analyse praxéologique de l'enjeu didactique avec comme objectif de contribuer à reproblématiser les praxéologies qui y sont visées.

> Faire de la didactique exige que l'on se rende apte à découper, à « lire » dans le flux toujours en mal de naturalisation de l'activité humaine – que celle-ci soit mathématique, culinaire ou autre – des combinaisons parfois hétéroclites, souvent complexes d'innombrables types de tâches, et que l'on y recherche les indices et les signes de la mise en jeu de techniques déterminées. Types de tâches et techniques, même stabilisés, même naturalisés, témoignent en effet *toujours*, à qui sait les regarder, d'apprentissages éventuellement anciens et oubliés, et constituent presque à tout coup les vestiges d'interactions didactiques souvent effacées de la mémoire personnelle ou institutionnelle : ils sont ainsi les restes d'une réalité qui fut un jour problématique et que le didacticien doit apprendre à *reproblématiser*. (p. 40)

L'analyse praxéologique est bien évidemment indispensable à l'analyse didactique. Non pas une analyse praxéologique « en soi et pour soi », mais « une analyse praxéologique finalisée par l'analyse didactique poursuivie […] L'analyse didactique de $S(X ; Y ; ♥)$ appelle l'analyse praxéologique de ♥. » (Chevallard, 2011, p. 2)

Le dispositif que nous étudions dans ce qui suit s'en tient à une analyse didactique comme premier exercice pratique dans le déroulement de l'enseignement de didactique fondamentale. Notons que l'analyse praxéologique fera ensuite l'objet de l'examen final.

3. Le dispositif de recherche : la quête d'une situation didactique

3.1. Le dispositif

Nous étudions les devoirs réalisés dans le cadre d'un travail dirigé d'une unité d'enseignement de didactique fondamentale en sciences de l'éducation à l'université d'Aix-Marseille. L'enseignement est donné sous forme de cours magistral dans un amphithéâtre. Un espace de cours est ouvert sur la plateforme pédagogique de l'université, avec pour objectif de mettre le cours écrit à la disposition des étudiants, d'offrir un espace d'échanges à l'aide d'un forum, ainsi qu'un espace de dépôt des devoirs.

Pour le contrôle continu de l'enseignement une analyse didactique devait être réalisée d'une situation didactique que l'étudiant devait trouver par lui-même. Le travail demandé se déclinait en deux temps. La première tâche de l'étudiant était de réaliser une recherche autour de lui pour trouver un document (écrit ou filmé) présentant une situation didactique. Une fois la situation trouvée, l'étudiant devait la soumettre pour validation par l'enseignant, en le déposant sur le forum de la plateforme pédagogique. La régulation réalisée était ainsi partagée avec l'ensemble des étudiants et permettait du même coup de vérifier si la situation choisie n'avait pas déjà été retenue par un autre étudiant.

Cette première étape du travail a rapidement mis en évidence que le type de situation recherché n'était pas facile à trouver, car alors qu'à première vue la tâche de trouver des situations didactiques semblait aisée pour les étudiants – pour eux il n'y avait qu'à regarder sur Internet pour y découvrir une quantité inestimable de ressources pédagogiques et de « didacticiels » –, la recherche demandée allait rapidement s'avérer plus longue que prévu. Il ne s'agissait en effet pas de trouver un quelconque exposé témoignant d'une intention didactique de son auteur, mais de trouver des documents témoignant de la présence réelle ou à créer de l'ensemble des acteurs d'un système didactique, soit au moins une instance d'aide à l'étude *y* et une instance étudiante *x* réunis autour d'un enjeu didactique ♥ identifiable. Le traitement didactique de documents dans lesquels *x* n'était pas clairement identifiable risquant de se révéler difficile pour des étudiants débutants, ce choix avait été exclu de travail à réaliser. Pour les guider dans la quête d'un document témoignant d'une situation didactique réunissant les deux instances, l'étude de différents types de situations a été réalisée en cours et a donné lieu aux précisions suivantes :

> ① Le premier type de documents est fait de documents proposant une narration (par un auteur *z*) d'une situation particulière réellement observée, où, par exemple, un formateur *y* tente d'obtenir de personnes en formation *x* qu'elles réalisent une certaine tâche *t*. Un tel texte peut être ainsi la narration (par *z*) d'un stage réalisé au sein d'une institution de loisir ou de formation. Notez que l'on peut avoir en certains cas $y = x$: le document décrit alors la personne *x* tentant – en s'aidant elle-même − de réaliser une certaine tâche *t*.
> ② Un deuxième type de documents est constitué de documents où un auteur *z*, jouant en quelque sorte le rôle de formateur de formateurs, décrit à un formateur *y* hypothétique une situation didactique impliquant des personnes en formation *x* hypothétiques, [situation] qu'il s'agirait de créer (ou qui pourrait advenir, tout simplement). Dans ce cas, l'utilisateur y visé par

l'auteur *z* du texte est censé extraire de celui-ci une certaine organisation didactique en vue de la réaliser en quelque institution auprès de personnes *x* hypothétiques. À nouveau, on peut avoir ici $y = x$.

③ Un troisième type de documents décrit une certaine organisation praxéologique ♥ présentée comme enjeu didactique possible d'un certain type de systèmes didactiques ou autodidactiques. En ce cas, le document ne décrit pas une situation didactique observée ou à créer : il est un exposé *E* relatif à une organisation praxéologique ♥ face à laquelle il se situe comme une aide à l'étude possible d'une étude possible.

À propos du document du troisième type l'exemple suivant a été étudié :

Considérons un document où une dentiste explique « comment bien se brosser les dents » (http://www.youtube.com/watch?v=UQ1gest6j4U). On y voit cette personne, *y*, visible sur la capture d'écran ci-dessous, parler à un *x* supposé, qui visionnerait sa vidéo :

Figure 1. Capture d'écran.

Pour passer d'un document du troisième type à un document du premier type, il faudrait que, dans la vidéo, cette dame, *y*, explique par exemple à un jeune garçon *x* comment faire pour se brosser les dents ; et qu'on aperçoive à cette occasion quelques interactions entre *y* et *x* (par exemple on verrait *y* corriger la manière de faire de *x*, commenter cette manière de faire, on verrait *x* interroger *y*, etc.). Faute de cela, on ne peut qu'imaginer ce que *x* pourrait faire : pour y parvenir de façon réaliste, il faut sans doute avoir une connaissance de ce type de tâches – l'analyse didactique d'un document du troisième type − qui n'est pas requise à ce niveau de formation didactique.

Le travail de recherche réalisé par les étudiants a généré 83 messages sur le forum du cours de licence et 25 sur celui du master. Un total de 89 analyses didactiques a été déposé, comprenant 65 travaux d'étudiants en licence et 24 travaux d'étudiants en master. Avant d'étudier la qualité des analyses obtenues, nous nous arrêtons dans un premier temps sur la manière dont les étudiants ont déclaré avoir cherché puis trouvé leurs situations didactiques.

3.2. Le récit des recherches

Le travail à réaliser comportait une première section dans laquelle l'étudiant devait expliciter de façon concise mais informative le déroulement de sa recherche d'une situation didactique, pour expliquer : 1) comment la situation sélectionnée a été trouvée (elle peut ainsi avoir été trouvée par une recherche par mots clés sur Google ou sur un site particulier ; ou alors par souvenir d'un passage dans un livre ou dans un manuel ; ou encore cette situation pouvait être une situation authentique filmée par ses soins, etc.) ; 2) où le récit (écrit ou filmé) de la situation a été trouvée (il pouvait par exemple s'agir de la référence d'un livre ou d'une vidéo).

L'analyse des praxéologies déclarées dans cette première section comprenant les récits du déroulement de la recherche d'une situation didactique, permet une série de constats et de conjectures à deux niveaux : d'abord celui des techniques de recherche d'information mises en œuvre (le niveau de la *praxis*), ensuite celui des discours sur ces techniques (le niveau du *logos*). L'analyse révèle également les conditions et contraintes énoncées dans la réalisation du type de tâches « Rechercher une situation didactique d'un certain type ». Enfin le corpus donne à voir toute la difficulté d'accomplir le type de tâches « Rédiger le déroulement de sa recherche ».

Notons d'abord quelques caractéristiques générales des déclarations étudiées. Sur les 65 travaux de licence, 4 étudiants n'incluent pas la première section du travail et 5 déclarent avoir décidé de filmer une situation par leurs propres soins, sans juger utile de préciser comment ils ont fait le choix de leur situation. Sur les 24 travaux de master, ils sont 3 à ne pas préciser comme ils ont réalisé leur recherche. La taille moyenne de cette section (pour laquelle aucune limitation de volume de mots n'avait été donnée) est de 133 mots pour le groupe de licence et de 138 mots pour celui de master, ce qui correspond approximativement au volume du présent paragraphe. En licence le texte le plus court est de 36 mots, le plus long de 350, en master le plus court contient 16 mots et le plus long 417 (correspondant à une page).

À part quelques textes d'au moins une demi-page (il n'y a guère plus que 4 étudiants à avoir écrit un texte de plus de 200 mots en licence, et 3 en master), les étudiants consacrent peu de place à expliquer le déroulement de leur recherche.

Une praxis *peu explicitée*. Cette pauvreté purement quantitative est confirmée par l'analyse qualitative que fournit le repérage des praxéologies énumérées par les étudiants. Les gestes de recherche cités sont principalement des recherches sur Internet. Quelques étudiants déclarent avoir cherché dans leur mémoire, une seule dans sa bibliothèque et vidéothèque (« J'ai, dans un premier temps, fait appel à mes souvenirs en examinant minutieusement ma bibliothèque et ma vidéothèque »). Le démarrage de la recherche s'est fait pour 55 étudiants sur Internet, le reste se partageant entre le souvenir précis d'un film (6), d'un livre (4) ou d'une émission de télévision (1). Un petit nombre déclare avoir commencé par réfléchir pour essayer de se rappeler des situations didactiques dans des films ou des livres. Un seul déclare avoir consulté le forum du cours pour s'inspirer des propositions des autres étudiants.

Nous notons que peu de précisions sont données quant aux outils utilisés pour réaliser les recherches. Sur l'ensemble des 89 récits de recherche, 25 déclarent avoir utilisé Google, dont seulement 8 étudiants précisent « le moteur de recherche Google », alors qu'un autre parle du « navigateur Google ». 53 étudiants déclarent avoir utilisé YouTube, 19 l'appellent « le site YouTube », 9 parlent du « site internet Youtube », et on trouve des occurrences uniques pour les appellations suivantes : « la plateforme Youtube », « le moteur de recherche Youtube », « les sites d'hébergement de vidéos comme You tube », « le site communautaire de partage de vidéos YouTube ».

Les recherches par mots clés, sur le moteur de recherche Google ou sur le site Internet YouTube, ont été la technique de recherche la plus partagée : 39 étudiants la citent. Le choix des mots clé a été précisé dans 30 cas, dont 22 pour nommer des mots clés spécifiques à un domaine (la danse, le tennis, la langue, les mathématiques…) et 8 pour donner des mots clés génériques, comme on peut le lire dans la liste des mots clés comprenant l'ensemble des suites de mots clés cités, reproduite ci-après :

> situation didactique, cours de, leçon de, séquence didactique, apprendre à, démonstration de / situation d'apprentissage / classe qui apprend / professeur, leçon, élèves / stage de, formation de, cours de, comment… ? apprendre à / dialogue professeur enfant / Comment faire pour enseigner...? / Freinet / cours de langue, leçon d'anglais, école / cours de tennis, professeur de tennis / cours de danse zumba / cours musique, initiation, masterclass / cours de danses exotiques / apprentissage basket / cours de danse (2) / cour [*sic*] de poterie / enregistrement cours, cours de français / leçon de ski, de planche à voile / Français langue étrangère / mots clés sur le thème du sport / première leçon de / Théorème de Thalès, Théorème de Pythagore / cours de…, cours de français en maternelle, langage en maternelle / cours en classe filmé, cours de français, maths, anglais, élèves qui apprennent les percussions / cours de calligraphie / danse classique / lecture / séance, type, d'anglais / apprendre à jouer du piano, tutoriel de guitare, leçon de violon dans une classe / vidéo cours de pâte à sucre.

On peut se demander si le récit de recherche a été fabriqué *a posteriori* pour répondre à la consigne de préciser comment la situation a été trouvée, le parcours de recherche détaillé, les mots clés tapés et les liens cliqués étant certainement dans beaucoup de cas oubliés, alors même que la consigne était donnée au départ de les recenser. On note que certains étudiants se donnent la peine d'écrire une suite de mots clés, alors que d'autres s'en tiennent à une expression vague, supposant qu'elle seule a suffi pour trouver la situation recherchée. D'autres recherches apparaissent surprenantes et invraisemblables, comme en témoigne la déclaration suivante : « En tapant sur le moteur de recherche Google les mots clés “professeur”, “leçon”, “élèves”, j'ai trouvé mon texte. Ce texte est donc un extrait du livre “La leçon” d'Eugène Ionesco. » Une chose apparaît clairement à la lecture des récits : ils ne pourront qu'à de rares occasions servir à reproduire la recherche réalisée. Ils n'ont certainement pas été rédigés dans l'intention de servir de modèle opérationnel, mais le manque de soin quasi général donné à leur rédaction peut être vu comme le témoin, soit d'une réelle difficulté à rédiger des notes de ce type, soit d'une naturalisation des techniques de recherche, dont le compte-rendu ne nécessiterait pas une élaboration particulière. Tout se passe comme si ce type de tâches allait de soi et que parler de sa recherche ne présentait aucun intérêt dans le travail réalisé (certains étudiants ont d'ailleurs omis d'écrire cette section). Nous retrouvons ici le déni de problématicité étudié en TAD, que nous avions déjà observé dans l'étude des pratiques de recherche d'informations sur Internet : « On tend à s'en tenir aux tâches qui n'apparaissent pas *a priori* problématiques, en y renonçant dès lors que la problématicité de la tâche envisagée devient évidente, en "oubliant" ensuite de tels épisodes » (Ladage, 2008, p. 53).

Un logos *lacunaire.* On note dans les déclarations des étudiants un grand nombre de manifestations de difficultés, qui s'expriment sous les formes suivantes (où nous avons choisi de ne pas corriger les diverses défectuosités affectant la forme du propos) :

> – La situation sélectionnée pour l'analyse didactique a été trouvé difficilement. Après plusieurs recherches sur Google dans la section vidéo, en tapant des mots clés du type « situation d'apprentissage », « cours.. », « apprendre à... », je n'avais toujours pas trouvé ce que je voulais. Il est extrêmement difficile, d'après mes recherches, de trouver sur internet des vidéos de cours où quelqu'un apprend quelque chose à quelqu'un d'autre.
>
> – Concernant la recherche de mon texte cela a été un réel périple. En effet, j'ai dû utiliser différentes ressources, ainsi que différents types de taches et techniques pour le trouver.
>
> – La recherche d'une situation didactique n'a pas été facile.
>
> – La « quête de l'analyse didactique » ne fut pas aussi aisée que ce que je l'avais imaginé en premier lieu.
>
> – J'ai fait une recherche par mots clefs (« situation d'apprentissage ») en cherchant longuement une séquence où l'on pouvait voir le professeur et son élève en même temps.
>
> – La recherche d'une situation didactique a été longue, en effet, il était important de trouver une situation qui me plaisait, me tenait à cœur.
>
> – Après de longues heures de recherches, et de nombreux sites visités, j'ai trouvé une situation didactique.
>
> – Dans le cadre d'une analyse didactique, il nous a été demandé de rechercher une situation didactique. Cela semblait aisé en théorie, mais dans

la pratique ce sont quelques heures et un peu de chance qui nous ont permis de trouver un document à la fois adéquat et intéressant.

– La situation didactique présentée ici a fait l'objet d'une recherche minutieuse.

– Pour trouver cette situation il m'a fallu un peu de temps.

– Pour mon analyse didactique, il m'a fallu partir à la recherche d'une situation à analyser, tâche qui n'a pas été des plus faciles.

– J'ai choisi de prendre comme support un mini-film pour créer mon analyse didactique. Je me suis donc tourné vers le site YouTube pour essayer de trouver une vidéo illustrant une leçon de surf. Après avoir essuyé de nombreux visionnages, je suis tombé sur celle que je vais vous présenter.

– La recherche d'une situation didactique n'a pas été une mince affaire.

– Un jour à force de chercher je finis par trouver cette vidéo, mais je ne me souviens plus en quoi tapant.

– J'ai trouvé cette vidéo par hasard sur le site TFL (Télé Formation Lecture) dédié à l'université Paris 5.

– Après de longues heures de recherches, et de nombreux sites visités, j'ai trouvé une situation didactique.

– Après pas mal de recherches, nous sommes donc tombé sur un document Pdf. avec comme titre « Livret-accueil-HG2 ».

On note que les difficultés sont rarement explicitées, on ne sait que peu de choses sur les techniques mises en œuvre, encore moins sur la justification des techniques. Les récits livrés par les étudiants ne permettent pas, dans la grande majorité des cas, de comprendre précisément ce qui a été fait, comment ça a été fait et pourquoi ça a été fait ainsi. La description des recherches réalisées se limite pour cette population d'étudiants au schéma simplifié suivant : je vais sur Internet (ou sur Google ou sur YouTube) et je tape des mots clés. Ce qui se passe après semble alors être un parcours long et difficile, mais sur lequel nous ne savons que très peu de chose. Le geste technique que les étudiants racontent n'est que rarement accompagné d'un développement technologique. On y retrouve ce que Chevallard (2012) constate quand il écrit qu'« on observe même fréquemment un phénomène d'amuïssement technologique : le discours technologique devient inaudible ; la technologie se fait silencieuse » (p. 67).

Rares sont donc les récits d'étudiants dans lesquels une véritable enquête peut être détectée. De ce point de vue, le travail d'un étudiant a attiré notre attention. Le rapport de sa recherche de didactique est parmi les plus riches de l'ensemble des travaux produits. Il ne parle pas de difficultés, mais note une série de problèmes et de frontières rencontrées et fait part des stratégies de recherche qu'il a mises en œuvre. Voici ce qu'il écrit :

> La « quête de l'analyse didactique » ne fut pas aussi aisée que ce que je l'avais imaginé en premier lieu. Je me suis heurté à plusieurs problèmes ; le premier, et non des moindres, fut mon entêtement à chercher une situation dans le domaine de la musique. Je cherchais désespérément une master-classe de violon sur internet. En effet la probabilité que ce genre d'événement soit filmé est plus grande que celle qu'une classe traditionnelle ne le soit. Je pensais de plus qu'il serait intéressant de voir des cours de professionnels qui sont à priori plus musiciens solistes reconnus plutôt que pédagogues entraînés. Enfin, il m'est venu à l'esprit que je pourrais profiter de cette « enquête » pour bénéficier d'informations pouvant me servir dans mon propre apprentissage de la musique, je ne manquais alors pas de motivation !
>
> Cependant je m'aperçus très vite que toutes ces vidéos de master-classes de violon, du moins celles que j'ai trouvé, étaient en Anglais et ce, même pour des professionnels français ; ce qui n'est à priori pas un obstacle, mais qui le devient malgré tous les traducteurs quand notre niveau anglais est vraiment faible, et que la qualité de vidéo ne permet pas toujours l'écoute par une oreille trop peu entraînée.
>
> Je me suis alors lancé dans la recherche de toutes sortes d'instruments à cordes frottées où le résultat fut soit le même, soit des extraits aguicheurs dont le but ne fut autre que l'achat d'un DVD.
>
> Je me résous finalement à étendre ma recherche internet à une seule expression : « master-classe » (car après tout il n'y a pas que les cordes frottées dans ce beau monde). Je trouvai alors facilement une vidéo d'une master-classe de harpe d'un peu plus d'une heure ou l'enseignante donnait un cours particulier à plusieurs étudiants à tour de rôle. Il ne me restait alors plus qu'à visionner la vidéo et choisir le passage qui me semblait le plus intéressant, ce qui ne fut pas aisé non plus car sur une si longue vidéo, il y a multitude de passages se prêtant à l'analyse didactique.

Alors que ce récit fournit bien un parcours d'enquête, on note ici aussi que les techniques utilisées ne sont que très discrètement évoquées. Ce n'est par exemple qu'à la fin du récit que l'auteur de ce texte confie s'être résolu à « étendre [*sic*] sa recherche internet à une seule expression », ce qui laisse supposer que quand il annonçait s'être « lancé dans la recherche de toutes sortes d'instruments à cordes frottées », il a bien là aussi réalisé des recherches sur Internet à l'aide de requêtes par mots clés formulés sur un moteur de recherche ou sur un site de partage de vidéos. Notons en passant que nous ne sommes pas tombée sur une master-classe de harpe avec la seule expression « master-classe » : là encore, malgré la longueur du récit proposé, la mise en mots opérationnelle de la technique utilisée fait défaut.

Une dernière observation mérite d'être mentionnée : la difficulté à trouver une situation didactique réunissant *une instance étudiante* et *une instance d'aide à l'étude* serait pour certains davantage le fait de la recherche dans des textes. La quête d'un support vidéo ou d'une séquence de film a d'ailleurs été majoritairement adoptée. Plusieurs étudiants décident de justifier ce choix : la vidéo est ainsi déclarée « plus simple », « plus intéressant », « plus ludique » :

> – Avant de me mettre à chercher ma situation didactique, j'avais déjà opté pour l'étude d'une vidéo plutôt qu'un texte. En effet, durant mes deux premières années de faculté, j'ai été habituée à travailler sur des textes. Je trouvais donc plus intéressant pour mon travail de me pencher, cette fois-ci, sur une vidéo. La vidéo permet d'étudier correctement une situation didactique tout en étant plus ludique qu'un texte.
>
> – Mon choix pour trouver une situation didactique c'est porter [*sic*] sur une vidéo, cela me semblait plus simple de travailler sur un support vidéo, que sur des extraits de texte.
>
> – Lors ma recherche d'une situation didactique, j'ai pu remarquer quelques difficultés à trouver un extrait de texte adéquat, je me suis donc dirigé vers une vidéo.
>
> – Une analyse didactique m'ayant été demandée, j'ai voulu concentrer mes recherches sur une vidéo qui montre davantage les interactions entre deux ou plusieurs individus plutôt que sur un texte.

Enfin si filmer soi-même a séduit plusieurs d'entre eux comme technique pour trouver du didactique, filmer soi-même une situation didactique est aussi regardé comme un type de tâches difficile, comme en témoigne les extraits suivants :

> – Au début de ma recherche de situation didactique, il me semblait bien plus simple de filmer moi-même une situation, plutôt que d'en emprunter une. Malheureusement, après de longs essais dans le lycée où j'effectue un stage, la qualité de ma vidéo était insuffisante, et le contenu de mes situations trop ténus.
>
> – L'idée de départ était donc de travailler sur une vidéo filmée par mes soins, mais après plusieurs essais, la spontanéité n'était pas forcément au rendez-vous, la présence de la caméra déstabilisait.
>
> – J'ai filmé un de ses cours donnée au troisième année [*sic*] de journalisme sur « l'étymologie des mots ». Ces séquences furent riches et intéressantes. Or mon principal problème fut de sélectionner la partie de vidéo qui me sembler la plus pertinente pour mon analyse. Après mures réflexions et d'autres recherches sur Internet via le moteur de recherche Youtube j'ai trouvé une vidéo qui me semblait plus intéressante d'analyser en tapant comme mots clé « cours de théâtre » (car je suis passionné de théâtre) j'ai trouvé une vidéo plus courte, plus intense et plus riche à analyser.

Certains vont ainsi jusqu'à abandonner le film qu'ils ont réalisé pour préférer le travail filmé disponible sur Internet. On constate là la difficulté d'être en contact direct avec la situation didactique, de capter et ensuite de faire le choix d'une séquence traduisant l'intention didactique et mettant en jeu de façon claire la situation didactique.

On peut se demander si la difficulté est bien du côté de l'objet recherché, ou si le manque de techniques pour la chercher ne contribue pas à nourrir l'idée d'une mission impossible. L'ouverture de la recherche de situations didactiques à des supports filmés mis en ligne sur Internet contribue certainement à améliorer la diffusion des phénomènes didactiques, à condition d'être capables de les trouver, ce qui ne devrait pas toujours aller sans reconsidérer son équipement praxéologique utile pour la recherche d'information. À la décharge des étudiants, il faut noter que régulièrement, les noms donnés aux séquences filmées sont loin de traduire la spécificité du type de situation didactique recherché. Nous pouvons voir là encore un témoin d'un déni de problématicité : le soin d'un nommage davantage partagé des ressources mises en ligne sur Internet ne semble pas encore être considéré comme un savoir utile à toute personne déposant des ressources sur Internet.

3.3. La mise en œuvre d'une analyse didactique

La deuxième partie du travail demandé aux étudiants portait sur la réalisation d'une analyse didactique de la situation trouvée. Cette section s'intitulait *Éléments d'analyse*. Elle devait comporter, dans toute la mesure du possible – ce qui dépendait des informations disponibles ou raisonnablement conjecturables à partir du document examiné –, une analyse construite à partir d'une liste de questions étudiée en cours, que nous reproduisons ci-après :

> Σ_0. Quelle est l'institution mandante de $S(X ; Y ; \heartsuit)$?
>
> Σ_1. Qu'est-ce que X ?
>
> Σ_2. Qu'est-ce que Y ?
>
> Σ_3. Qu'est-ce que ♥ ?
>
> Σ_4. Que font X et Y pour que X « apprenne » ♥ ?
>
> Σ_5. Qu'est-ce que X aura-t-il pu apprendre, à court ou moyen terme, du fait du fonctionnement de $S(X ; Y ; \heartsuit)$?
>
> Σ_6. Qu'est-ce que Y et certains environnements éventuels de $S(X ; Y ; \heartsuit)$ auront-ils pu apprendre, à court ou moyen terme, du fait du fonctionnement de $S(X ; Y ; \heartsuit)$?
>
> Σ_7. Quels changements le fonctionnement de $S(X ; Y ; \heartsuit)$ a-t-il pu apporter dans les conditions et les contraintes gouvernant son fonctionnement ultérieur ?

Il était également précisé dans les consignes que :

> Pour espérer pouvoir répondre à ces questions, on devra identifier (et l'écrire dans l'analyse à rendre) les principaux « paquets » de *conditions et contraintes* qui rendent possibles, facilitent ou au contraire interdisent (ou, du moins, gênent) la survenue de tel ou tel *état* des systèmes didactiques examinés, ce pour quoi on se référera à l'échelle des niveaux de codétermination didactique qui a été étudié en cours.

Ajoutons enfin que le travail devait être rendu dans un délai de deux mois et que les éléments théoriques utiles à la réalisation de l'analyse avaient été étudiés avant la fin de cette période.

Nous ne pouvons étudier dans le détail le type d'analyses réalisé par les étudiants. Nous en proposerons donc quatre traits saillants, mettant en évidence les conditions et contraintes pesant sur l'accomplissement d'une analyse didactique dans le cadre de l'étude du didactique à l'université.

1) Une multiplicité d'enjeux didactiques. L'étude des enjeux didactiques ♥ identifiés par les étudiants montre une grande disparité d'objets et de niveaux d'approfondissement analytique. Nous en livrons ci-après quelques exemples (les expressions sont celles choisies par les étudiants) :

> langue des signes / écrire le français / s'exprimer correctement en français / enrichir le vocabulaire en relation avec le coin cuisine et les aliments / réaliser un service au tennis / améliorer la technique du saut et du grand saut en danse classique / faire du vélo sans stabilisateur / un soin en esthétique / le grip décalé en basketball / les passage de vitesse dans une voiture / développer la conscience phonologique / harpe (apprendre la bonne position des doigts et l'assouplissement des poignets et du haut du corps) / enseigner l'anglais à l'oral pour le cycle 3 / interpréter le personnage de Phèdre / réaliser de jolis petits cupcakes pour la soirée du nouvel an / découvrir le violoncelle / fumer de la marijuana / tenir sur une planche à voile / la date en maternelle / le Théorème de Thalès / apprendre à faire un poirier / cinq nouveaux enchaînements de karaté / apprendre à ne pas avoir l'air d'être étonné / les gestes de premiers secours / la soustraction / Human Beat Box (l'art de reproduire des sons musicaux avec son corps et plus particulièrement avec sa bouche) / la calligraphie / le swing en golf / les différentes parties du corps du poney / se préparer à l'accouchement / Agir et s'exprimer avec son corps / Interpréter de façon théâtrale un texte portant sur une femme qui a marqué l'histoire / utiliser un thermomètre / le lancer d'un mini-boomerang…

Une lecture attentive permet de mesurer la difficulté pour certains à exprimer l'enjeu didactique précis d'une séance donnée. On observe ainsi souvent que l'enjeu est défini au niveau de l'œuvre dans sa globalité sans que des parties ou des sous-parties de l'œuvre aient pu être repérées.

2) Une analytique du didactique avancée. La liste d'enjeux didactiques présentée ci-dessus montre que, malgré la similitude apparente de certains choix de situations portant sur l'apprentissage d'une même œuvre *O*, ceux-ci ne portaient que rarement sur la même partie ou sous-partie de l'œuvre. La confrontation des choix de situations de chaque étudiant sur le forum a ainsi mis en lumière, pour certaines œuvres, une variété d'enjeux didactiques partiels pouvant tous contribuer à l'étude d'une œuvre *O*.

3) Une certaine prégnance du syndrome rétroactif. Alors qu'en cours il a été fortement conseillé de ne pas chercher une situation dans un domaine qui leur était familier, certains étudiants affirment spontanément dans le récit de leur recherche s'être laissé guider dans leur choix par leur vécu ou leur « passion » pour l'œuvre étudiée. Nous avions observé ce comportement auprès d'un autre groupe d'étudiants de sciences de l'éducation dans l'étude d'un dispositif d'enquête sur des questions de développement durable, dans laquelle on pouvait observer que « d'une manière générale, l'étudiant ne s'affronte ainsi qu'à ce qu'il est censé connaître par avance : on parlera à cet égard de mode d'étude rétroactif. » (Ladage & Chevallard, 2011, p. 335).

4) Une profondeur d'analyse inégale. Le groupe d'étudiants de master a dans l'ensemble réalisé des analyses plus poussées que le groupe de licence. Il faut préciser que les conditions pédagogiques du cours de master ont largement contribué à engager les étudiants dans un mode d'étude davantage proactif : leur nombre plus réduit (le groupe de master comptait 24 étudiants pour 64 étudiants en licence) a favorisé les régulations en cours. Celles-ci ont même pu déboucher sur la réalisation collective de recherches sur Internet grâce au fait que les étudiants apportaient leurs ordinateurs personnels. C'est ainsi par exemple que l'analyse didactique d'une situation sur l'apprentissage du lancer d'un mini-boomerang a engendré des enquêtes réalisées avec le groupe d'étudiants présents, passant du même coup dans l'analyse praxéologique et permettant la découverte par certains d'une multiplicité de techniques de lancer, pendant que d'autres étudiaient le principe de rotation en physique.

4. Conclusion

Les résultats que nous avons obtenus grâce à cette expérience mettent en évidence que le fait de se lancer dans un mode d'étude procognitif semble aujourd'hui ne pas pouvoir se faire sans heurts ni sans la construction d'un dispositif didactique particulier. Un certain nombre de difficultés méritent d'être soulignés. Notons tout d'abord la prégnance du mode d'étude rétrocognitif, qui fait que l'étudiant ne se lancera pas spontanément dans la recherche d'une situation didactique dont l'enjeu serait une œuvre dont il ignorerait tout ou presque. La pédagogie de l'enquête mise en œuvre dans le cadre d'un atelier d'enquêtes sur Internet avec des élèves de collège (Ladage & Chevallard, 2011), témoigne pourtant qu'il est possible d'aborder des questions en apparence complexes avec un public jeune.

Notons ensuite l'usage que les étudiants déclarent faire d'Internet, montrant leur incapacité de rendre compte de façon effective de la manière dont ils ont réalisé leur recherche, ce qui offre un témoignage de plus à ce que nous avions constaté en 2011, à savoir qu'« il existe tout un ensemble d'obstacles, liés plus spécifiquement à l'intégration de "l'univers Internet" dans la culture dominante, qui gênent l'avènement, la diffusion et la popularisation d'une pédagogie de l'enquête. » (Ladage & Chevallard, 2011, p. 86)

Une dernière difficulté qui mérite d'être soulignée concerne le temps nécessaire à l'instance d'aide à l'étude *y* pour accompagner les étudiants dans la réalisation de leurs enquêtes et de leurs analyses. C'est ainsi que la régulation sur le forum numérique du cours a certainement pu enrichir le travail des étudiants, mais nous sommes convaincue qu'un moyen plus opérationnel de diffusion de ce que *y* fait pour que *x* apprenne à réaliser des analyses didactiques et praxéologiques, reste à mettre au point. Il n'en reste pas moins qu'il est donc possible de faire découvrir à des étudiants de sciences de l'éducation 1) qu'il y a du didactique tout autour de nous, au sein de la société (et pas seulement dans les institutions scolaires « classiques »), 2) que ce didactique tend à se dérober au regard non didactiquement éduqué, 3) qu'il faut ainsi apprendre à le repérer, à le voir, à l'identifier et, finalement, à l'analyser pleinement, afin même d'avoir quelque chance d'en améliorer l'efficacité sociale.

Références

Brousseau, G. (2010). *Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques (1998).* http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf

Chevallard, Y. (2011). *Journal du séminaire TAD/IDD. Théorie Anthropologique du Didactique & Ingénierie Didactique du Développement*.

http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/journal-tad-idd-2010-2011-7.pdf

Chevallard, Y. (2012). *Didactique fondamentale. Module 1 : Leçons de didactique*. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/DFM_2011-2012_Module_1_LD_.pdf

Ladage, C. (2008). *Étude sur l'écologie et l'économie des praxéologies de la recherche d'information sur Internet. Une contribution à la didactique de l'enquête codisciplinaire* (Thèse de doctorat). Université d'Aix-Marseille.

Ladage, C. & Chevallard, Y. (2011). Enquêter avec l'Internet. Études pour une didactique de l'enquête. *Éducation & Didactique*, *5*(2), 85-116.

On teaching instrumentation in mathematics using research and study paths

Rosie C. Lopez-Conde
College of Science Education,
Caraga State University-Butuan City, Philippines

Resumen. Este documento se centra en la enseñanza de la «instrumentación en matemáticas» basada en la teoría antropológica de lo didáctico como parte del programa de formación de los docentes en Filipinas. En nuestro estudio, de carácter cualitativo, se observó un grupo de quince estudiantes en licenciatura de Ciencias de la Educación Secundaria, especialidad en matemáticas. Se estudia cómo eta nueva herramienta didáctica contribuyó eficazmente a la enseñanza de la instrumentación en matemáticas. De hecho, los estudiantes lograron desarrollar relaciones entre conceptos matemáticos y cuestiones problemáticas en el proceso de estudio.

Résumé. Ce document met l'accent sur l'enseignement de l'« instrumentation en mathématiques » basé sur la théorie anthropologique du didactique, dans le cadre de la formation des futurs professeurs de mathématiques aux Philippines. Dans notre étude, de type qualitatif, on observe un groupe de quinze étudiants de licence en Sciences de l'enseignement secondaire, dont la majorité suit la spécialisation mathématiques. On étudie comment le nouveau dispositif didactique introduit a contribué dans l'enseignement de l'instrumentation en mathématiques, permettant aux étudiants de créer un lien entre concepts mathématiques et questions problématiques dans le processus d'étude.

Abstract. This paper focuses on teaching "instrumentation in mathematics" within the anthropological theory of the didactic. A new didactics of mathematics course is proposed to improve knowledge in teaching among future mathematics teachers as part of the pre-service teacher education curriculum in the Philippines. Fifteen students of a major in mathematics of a Bachelor of Science in Secondary Education were observed at a College of Science Education. We analyse how the new didactic device implemented helped in teaching instrumentation in mathematics by creating a connection between mathematical concepts and problematic questions in the study process.

IV[e] congrès international sur la TAD (Toulouse, 21-26 avril 2013)
Axe 3. *Entre visite des œuvres et questionnement du monde*

Lopez-Conde, R. C. (2017). On teaching instrumentation in mathematics using research and study paths. Dans G. Cirade et al. (Éds), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* (pp. 597-608). https://citad4.sciencesconf.org

1. Introduction

As mandated by the Commission on Higher Education in the Philippines, secondary teacher preparation in mathematics includes the following major subjects which are compulsory for student teachers: advanced algebra, plane geometry, trigonometry, analytic geometry, calculus, probability, number theory, elementary statistics, linear algebra, seminar of problem solving in mathematics, history of math and instrumentation in mathematics.

Instrumentation in mathematics is a 3-units course (54 hours) within a semester (4 months). This course is designed to train student teachers to develop visual aids, manipulatives and models with accompanying activity sheets that will aid students' understanding of abstract or difficult concepts in mathematics and make the study of the subject more appealing to students. As an output of the course the students will improvise/design instructional devices or manipulatives using available low-cost or indigenous materials.

It is in this light that the researcher introduced a design which seemed appropriate to teach instrumentation in mathematics. This is carried out through a research and study course (RSC) in the perspective of the anthropological theory of the didactic (ATD). This framework will help student teachers design more appropriate teaching and learning equipment (manipulatives) to aid high school students. The course was made up of classroom discussions on the current issues of mathematics education, workshops on questioning the world and problem posing, didactics in mathematics and ATD related seminar series, as well as about mathematics anxiety and misconceptions with the highlight on designing manipulatives, presentation, discussions and high school class immersions using the manipulatives. The study is qualitative in nature. It consists in a phenomenological study about a group of fifteen (15) students of a major in Mathematics of the Bachelor of Science in Secondary Education (BSED) at the College of Science Education of Caraga State University – Butuan City Campus, Philippines. The course started with the construction of a main generating problem addressing high school students' difficulties in the basic concepts of mathematics. Solving the generating questions and finding answers to the questions required the developing and constructing of praxeologies. In order for the students to focus on a specific area of study, the researcher grouped the class into five groups with three students in each group. From the main generating question, the group derived more generating questions to come up with sets of problems which could produce answers in terms of the design of manipulatives. The researcher used interview, portfolio, lesson plans, classroom presentations, immersion observations and discussions/feedback sessions as well as the reports submitted containing a pre-test, a post-test and a survey questionnaire.

2. Background

According to Chevallard (2015), the notion of *research and study path* (RSP) is the newest development in the field of ATD which is directed to an inquiry-based form of school study. In this course, a group of students will study a generative question, in which the group output will create a rich succession of more problems that they will have to solve in order to reach a valuable answer to the question being studied.

This paper uses the anthropological theory of the didactic (ATD) in the light of the notions of *research and study course* (RSC) and of *praxeology*. Solving the generating questions and finding answers to questions involve developing and constructing praxeologies most commonly within a group. The focus will be on the notion of *praxeology* which is described by its two main parts which are the *praxis* or “know-how” and *logos* or “thinking-reasoning” about the *praxis*. The students will be acquainted with the praxis which refers to the types of tasks and techniques that are available for them to solve the task of addressing high school students’ difficulties and designing manipulatives and teaching materials that may aid in teaching. They will also be taught with the *logos* which refers to technology that describes and explains the techniques and the theory (Bosch & Gascón, 2006). Chevallard (2004 & 2006 as cited by Barquero, Bosch & Gascón, 2007) introduced the concept or study and research paths (SRP) as a model for designing and analysing study processes. A RSC allow retaining the relationship between questions and answers which is used in the formulation of scientific knowledge as a result of this process. Through this study process, the students were able to live the experiences which help them to create hypotheses, develop more generating questions, compare their outputs and choose relevant literature and mathematical concepts.

This didactic organization seemed very effective in teaching instrumentation in mathematics since the students can start with generative questions with corresponding possible answers making the main generative questions “alive”. One of the functions of RSP in the course was to be able to allow students magnify their beliefs and compare results in the feedback sessions and classroom discussions provided by the teacher to come up with more appropriate manipulatives within each group. During the RSP, the design activity progressively achieved the status of a *(mathematical) study object* farther from the status of being a *(didactic) tool* to study a number of mathematical organisations needed to come up with the desired output. The students take the responsibilities usually assumed by the teacher. They individually formulate questions related to mathematical and didactic techniques within each group.

The researcher would like to offer a didactics of mathematics course such as this research and study path (RSP) in instrumentation in mathematics which is a newly developed approach in line with notions from the ATD framework.

3. Main research problems

This study sought to answer the following problems:

1. Does this research and study path (RSP) add something to the mathematical knowledge and organization among students?
2. How do the students develop praxeologies in the design of manipulatives and activities, and how is this affected by the format of RSP?
3. How did the design of the manipulatives and activities transform to study problematic questions and articulate the contents of the course during the study process?

4. Body

The teaching design is based on the ATD notion of research and study path (RSP) build upon the generating questions for students to address high school students’ difficulties, problems and misconceptions in the five areas of mathematics, namely: measurement and geometry, numbers, probability and statistics, geometry, algebra and trigonometry. The teaching design of the study process of the course is shown in figure 1.

Course orientation → group assignment → posing of generative questions → planning and discussions → output presentation → classroom trial → students utilization → observation → analysis

Figure 1. Teaching design of the course.

In each of the five groups, the design formulations were conceived by formulating generating questions and make the main generating question, Q_0 “alive” which developed to more generating questions as follows:

Q_0: What are some of the difficulties, problems and misconceptions in this area that can be addressed using manipulatives? (main generating problem)

Q_1: Given those specific areas, which of the topics is most problematic?

Q_2: What possible manipulatives can be designed in these topics?

- $Q_{2,1}$: What are those possible didactic games and activities that can be constructed using these manipulatives?
- $Q_{2,2}$: How can activity sheets be made using these manipulatives with some basic concepts in that area?

Q_3: Does it make a difference to high school students?

- $Q_{3,1}$: What are students’ perceptions regarding the manipulatives with the specific areas?
- $Q_{3,2}$: What are the experiences of these high school students with the created manipulatives?

The formulation of the generating questions from the main generating question is shown in the schematic diagram as follows (see figure 2).

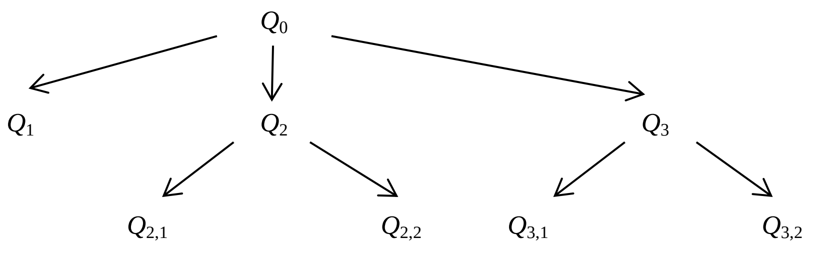


Figure 2. Schematic diagram of the construction of generating questions.

The intended mathematical knowledge of this SRP is the basic concepts in measurement and geometry, numbers, probability and statistics, geometry, algebra and trigonometry. Five groups composed of three students where each group was assigned to study and make researches on the misconceptions and problems among these areas of study. The students were regularly checked with respect to the developments of possible answers to the generating questions like: What are your possible answers to the generating questions? What have you done to answer these questions? What else are your plans in order to have more concrete answers to the questions?

Before the students came up with designs of their outputs, they did some research and discussions on origins of didactic games using manipulatives, mathematics misconceptions, the relations between mathematical concepts and manipulatives, the effectiveness of the created manipulatives to address preliminary questions and the scope and limitations of those created manipulatives. Thus, students did not only learn how to design manipulatives but at the same time they learned about mathematical knowledge and organization needed to address the main generating problem. The student teachers were given ample time to discuss within each group possible generating questions to address some difficulties regarding high school learning mathematics. After some thorough discussions within their respective groups, they were given chances to present those constructed generating questions with the teacher facilitating in each presentations and discussions.

In the presentations, the students did feedback sessions regarding the constructed generating questions, designs and improvisation of the designed manipulatives and didactic games and activities. From time to time the teacher required them to give answers to their generating questions by then they were able to present a more flawless and better designs of manipulatives and didactic games and activities with the hypothesis that these manipulatives and activities will improve CSU-high school student’s understanding on basic concepts in mathematics and enjoy the given activities.

The CSU-high school students were given pre-test and post-test, before and after each of the group activities. They were given a survey questionnaire for them to express their ideas regarding the manipulatives, activities and in the learning of some concepts in mathematics. Observations were also recorded and the class interaction was audiotaped.

The data collected from the interview of the student teachers, the pre-test and post-test of the high school students were re-evaluated, reanalysed and revisited by the researcher from the submitted research reports, portfolio and lesson plans of the students participants taking up SciEd 5 (instrumentation of mathematics). Data also included interview responses from student teachers and high school students. Statements from the interviews and conversations (formal and informal; between me and the participants or among participants), and feedbacks from the class observations were also highlighted. Artefacts from lesson plans, writing on the boards, pictures, interview, classroom observation and project reports and filled survey questionnaire were also reanalysed. These were done to further address the main research problems.

After undergoing planning, discussions and several trials the students successfully made the following manipulatives under different areas in measurement and geometry, numbers, probability and statistics, geometry, algebra and trigonometry. These were experiences from them and from high schools students of CSU-Laboratory High School.

Let’s measure game | Math spin the wheel | APH Protractor

Figure 3. Group 1 on Measurement and geometry.

Group 1 designed manipulatives on measurement and geometry. These include a “Let’s measure” game, “Math spin the wheel” and “APH protractor”. The second group worked on numbers and created and modified the design on double block, pattern block and 100’s board.

Double Block | Pattern Block | 100’S board

Figure 4. Group 2 on Numbers.

Group 3 worked on Probability and Statistics with the following designs: "Snake and ladder", EPI-INFO experimentation and experimental probability. The fourth group designed G.A.T. boards, geometric tangrams and pattern blocks with Geometry.

Snake and Ladder

EPI-INFO Experimentation

Experimental Probability

Figure 5. Group 3 on Probability and statistics.

Group 5 designed on algebra and trigonometry more specifically designed point locators; discover the bingo's X and Y and styrograph.

G.A.T. Boards

Tangrams

Pattern Blocks

Figure 6. Group 4 on Geometry.

Point Locators

Discover the BINGO's X and Y

Styrograph

Figure 7. Group 5 on Algebra and Trigonometry.

The researcher documented some meaningful and good observations on how well students faced the obstacles that come their way. The SRP was able to provide good experiences to student teachers which enhanced their teaching and learning on the basic concepts of mathematics as observed. In an interview from a representative of the group, Marvin said that

> we have made many investigations and instrumentation that make us develop a better understanding of mathematics. These factors make us follow the great arithmetic and logic which enable us to input much of the significance of mathematics in our lives. Much of the learning we gained developed our hidden talents; we have received much of learning which improve our problem-solving skills and analytical skills that we can use for further studies and for our future profession.

The SRP allowed the members of the group to be able to question what was initially designed and this questioning became the driving force of the entire project design that enabled the group to redesign, restructure, correct activity sheets and come up with more appropriate and more practical designs.

5. Conclusion

The result of the research and study path was overwhelming. The groups of students were very engrossed with solving their generating questions on addressing misconceptions. Mathematical concept organization was developed among students as well as designing manipulatives to address these problems. Other groups had difficulties in designing the manipulatives as well as in constructing activity sheets for the didactic activities. The high school students also did not only improve their understanding in some concepts in mathematics but also enjoyed the activities they experienced using the manipulatives.

In solving the generating questions and finding answers to these questions, the student teachers developed and constructed praxeologies mostly within each group. To solve the main task which was to design manipulatives, they were able to learn and understand the difficulties and misconceptions among high school students through classroom observations, discussions and with the help of textbooks and internet resources. These were the techniques used by the students to be able to present their designs in the classroom discussions and feedback sessions with the teachers and their peers. After a series of presentations and try outs, they were able to have their final designs. The research and study path format helped in the development of students' praxeologies. The students were able to do among each group the more appropriate design of manipulatives and were able to independently constructed problems and activities using the manipulatives.

They were able to device procedures among their group mates through research, planning and discussions on how to address and design these manipulatives as well as researching their basis in books and the internet. The "thinking-reasoning" was done using classroom discussions, presentation and try outs. The students became very familiar with the types of tasks and techniques that were available for them to solve the task on addressing high school students' difficulties, designing manipulatives and teaching materials that may aid high school students.

With this SRP, some adequate conditions to formulate some generative questions were done by students concerning the origins of didactic games using manipulatives, the relations between mathematical concepts and manipulatives, the effectiveness of the created manipulatives to address preliminary questions and the scope and limitations of those manipulatives.

6. Connections between SRP and instrumentation in math

"Instrumentation in mathematics" was designed to train student teachers to develop visual aids, manipulatives and models with accompanying activity sheets that will aid students' understanding of abstract or difficult concepts in mathematics. Designing a SRP in teaching instrumentation in mathematics produced an output which is improvised or made possible with originally made manipulatives using available low-cost materials as well as indigenous materials, but also trying to utilize them to study more generative questions. In using a SRP, the contents expected from the course were very well articulated during the study process. The students did not only finish the course as expected, but they were also able to concretize their plans and ideas. In fact, they were even so thankful that the SciEd 5 course (instrumentation in mathematics) was transformed to a more challenging and interesting research and study path (RSP), resulting in the convergence of ideas among their peers.

As in the design phase of each group, it has been verified that the content of the course was covered as well as some important ideas were included in the study process. The event was more efficient since the students were learning not only within the boundaries of the course content which is ideal for a mathematics course. SRP is a very important didactic tool in which the current statute should be considered. The researcher believed that allowing the students to experience the “live” moments allowed them to hypothesize, experiment, think, formulate more live questions and choose a relevant mathematical organization and concepts which are the core factors in instrumentation of mathematics. The didactic process allowed the students to stay in the didactic contract: group discussions, presentations and on their defence regarding the design as well as to take hold of the openness to more generative questions that might arise even in the final presentation and utilization of the high school students at CSU-Laboratory High School. These crucial stages of the study process may not be present in the traditional curriculum and methods in teaching instrumentation of mathematics but indeed very instrumental for students not only to cover the intended curriculum but more importantly help in the process of acquiring necessary knowledge as well as in the criticism, study limitation and links in the design with the assigned topics.

Instead of being the provider of knowledge, the teacher took some roles to facilitate students in course. Some of these roles include scheduling, helping in selecting mathematical concepts needed for the group assignment, in the problem posing for generative questions within each of the groups, in the planning and discussions among each group, in the evaluation of output presentation and observe in the class’s trial and high school students utilization and more specially evaluate results for the analysis. Thus, the idea of “monumentalism” was taken out for the entire study process.

7. Study and research paths as a new teaching paradigm

This most recent development in anthropological theory of the didactic according to Chevallard may go as a far more promising way in teaching mathematics. This new paradigm may cause the encounter of some parts (maybe all parts) of the contents but can maintain a high degree of widening as compared to other existing study processes. Instead of starting from the intended contents set by the discipline or a body of knowledge, SRP is commenced by a generating question, Q_0. This has to be a very powerful question able to generate more questions with potential answers leading to various bodies of knowledge to teach. This didactic framework is motivated by the intent to answer generating questions, not in a prearranged way, but following a plan guided by the contents of the course and the necessity to give rightful answers. Chevallard postulated that SRP would allow substituting the "thematic confinement" that the students and teachers usually follow at school because of its inherently co-disciplined nature. For the didactic contract to exist, the students should have enough knowledge on how to start the study and deal with the initial generating question. The students must be allowed to obtain ways which are fundamentals that in term allow self-evaluation of their answers and solutions (Rodriguez, Bosch & Gascón, 2007; Barquero, Bosch & Gascón, 2007). Unlike any other traditional classroom, in SRP the students are those who take the full responsibility to answer the questions posed and a majority of the decision making. The teacher will act as the director of the study making the students spend suitable study moments while giving them due attention and appropriate time to interact. The metacognitive activities such as planning, regulating and evaluating should also be taken care of and regulated by the teacher to possibly overcome constraints.

References

Barquero, B., Bosch, M. & Gascón, J. (2007). Using *research and study courses* for teaching mathematical modelling at university level. In D. Pitta-Pantazi & G. Pilippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2050-2059).

Bosch, M. & Gascón, J. (2006) Twenty-five years of the didactic transposition. *ICMI Bulletin, 58,* 51-65.

Chevallard, Y. (2015). Teaching mathematics in tomorrow's society: A case for an oncoming counter paradigm. In S. J. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 173-187). Springer.

Rodríguez, E., Bosch, M., Gascón, J. (2007). An anthropological approach to metacognition: The "study and research courses". In D. Pitta-Pantazi & G. Pilippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1798-1807).

La modelización funcional y la razón de ser del cálculo diferencial elemental en la enseñanza secundaria

Catarina Lucas y Cecilio Fonseca
Dpto. de Matemática Aplicada I, Universidad de Vigo, España

Josep Gascón
Dt. Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, España

Abstract. We present a doctoral thesis project that emerges from the results of a study of the didactic phenomenon of disarticulation, atomization and rigidity of the school mathematics praxeologies in Spain and Portugal (Fonseca, 2004; Lucas, 2010). To deepen the study of this phenomenon in the field of *elementary differential calculus* we propose criteria to build a *reference epistemological model* that interprets this field of mathematical activity such as the development of functional modelling (in the sense of Ruiz-Munzón, 2010).

Résumé. Nous présentons un projet de thèse de doctorat qui se dégage des résultats d'une étude sur le phénomène didactique de désarticulation, atomisation et la rigidité des praxéologies mathématiques scolaires en Espagne et au Portugal (Fonseca, 2004 ; Lucas, 2010). Afin d'approfondir l'étude de ce phénomène dans le domaine de *calcul différentiel élémentaire* nous proposons des critères pour construire un *modèle épistémologique de référence* qui interprète ce domaine d'activité mathématique comme le développement de la modélisation fonctionnelle (dans le sens de Ruiz-Munzón, 2010).

Resumen. Presentamos un proyecto de tesis doctoral que parte de los resultados de un estudio del fenómeno didáctico de la desarticulación, atomización y rigidez de las praxeologías matemáticas escolares en España y Portugal (Fonseca, 2004; Lucas, 2010). Para profundizar en el análisis de este fenómeno en el ámbito del *cálculo diferencial elemental* proponemos criterios para construir un *modelo epistemológico de referencia* que interpreta este ámbito de la actividad matemática como el desarrollo de la modelización funcional (en el sentido de Ruiz-Munzón, 2010).

IV[e] congrès international sur la TAD (Toulouse, 21-26 avril 2013)
Axe 3. *Entre visite des œuvres et questionnement du monde*

Lucas, C., Fonseca, C. & Gascón, J. (2017). La modelización funcional y la razón de ser del cálculo diferencial elemental en la enseñanza secundaria. Dans G. Cirade et al. (Éds), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* (pp. 609-631). https://citad4.sciencesconf.org

1. Problemática de base

Este trabajo se sitúa en el contexto de un proyecto de tesis doctoral que se está desarrollando en el ámbito de la *Teoría Antropológica de lo Didáctico* (TAD). Parte del estudio de un *fenómeno didáctico-matemático* complejo que se manifiesta en la desarticulación de los contenidos matemáticos que constituyen el programa oficial de la enseñanza secundaria española y en la consiguiente *rigidez* de las *praxeologías matemáticas* escolares. Hemos tomado como punto de partida los resultados de la tesis de Cecilio Fonseca (2004). Posteriormente, con la intención de constatar si el referido fenómeno es generalizable más allá de las instituciones escolares españolas, en la memoria de investigación (Lucas 2010) presentamos los resultados experimentales obtenidos al contrastar cinco aspectos de la rigidez de las *praxeologías matemáticas* que se estudian en la enseñanza secundaria. En este caso, la base empírica utilizada ha sido, por un lado, los manuales escolares y los diseños curriculares de este nivel de enseñanza tanto en Portugal como en España, y, por otro, una muestra de estudiantes de ambos países.

Esta investigación preliminar permitió poner de manifiesto el alcance del fenómeno didáctico de la *rigidez* de la actividad matemática escolar. Este aparece ligado a la falta de interdisciplinaridad y a la ausencia del cuestionamiento de las técnicas matemáticas escolares, a la fragilidad y a las limitaciones en el dominio de validez de estas y a la carencia de un discurso matemático adecuado que permita interpretarlas y justificarlas. Y, lo que es más importante, volvimos a confirmar, en un ámbito empírico más amplio, la desaparición de las *cuestiones problemáticas* a las que la matemática escolar responde. En definitiva, nuestra investigación reveló claramente la pérdida de la *razón de ser* de la matemática enseñada en ambos países, lo que constituye una clara manifestación del “monumentalismo” y de la primacía del paradigma de la “visita de las obras” (Chevallard, 2005, 2006).

Con el objetivo de profundizar en el estudio de este fenómeno, nos centraremos en un ámbito concreto de la matemática escolar en torno del *cálculo diferencial elemental* (CDE) y partiremos del *problema docente* (Gascón, 1999, 2011) relativo a dicho ámbito que puede formularse mediante las siguientes cuestiones:

> ¿Qué tengo que enseñar a mis alumnos y cómo tengo que enseñarlo en relación al CDE en Secundaria? ¿Cómo se puede introducir el concepto de derivada en Secundaria? ¿Qué técnicas de derivación debo enseñar a mis alumnos y cómo debo presentarlas? ¿Cómo se pueden utilizar las TIC a fin de potenciar la visualización en dicho ámbito?

El proyecto de tesis que aquí presentamos tiene por objetivo inicial, como ya hemos indicado, el de profundizar en el estudio del fenómeno de la desarticulación de la actividad matemática escolar en torno al CDE y la consiguiente ausencia (o desaparición) de la razón de ser de este ámbito de la actividad matemática en la enseñanza secundaria española y portuguesa. Para ello partiremos del citado problema docente del CDE y nos basaremos principalmente en los resultados obtenidos previamente en las dos líneas de investigación citadas y desarrolladas por nuestro grupo:

> (1) Los trabajos de Fonseca (2004) y Lucas (2010) ya citados, en los que se estudia el fenómeno didáctico general de la *rigidez* de la actividad matemática escolar, la *incompletitud* de las praxeologías matemáticas escolares y la consiguiente pérdida de la *razón de ser* de la matemática enseñada.
>
> (2) La tesis doctoral de Noemí Ruiz Munzón en la que se propone un *modelo epistemológico de referencia* (MER), esquematizado en figura 1. Allí se caracterizan tres niveles progresivos de *modelización algebraico-funcional* (MF) como completación de las etapas del *proceso de algebrización* elemental y se sugiere el papel que potencialmente podría jugar la MF como ámbito en el que surgen las cuestiones problemáticas que constituyen la *razón de ser del CDE* en la enseñanza secundaria (Ruiz-Munzón, 2010).

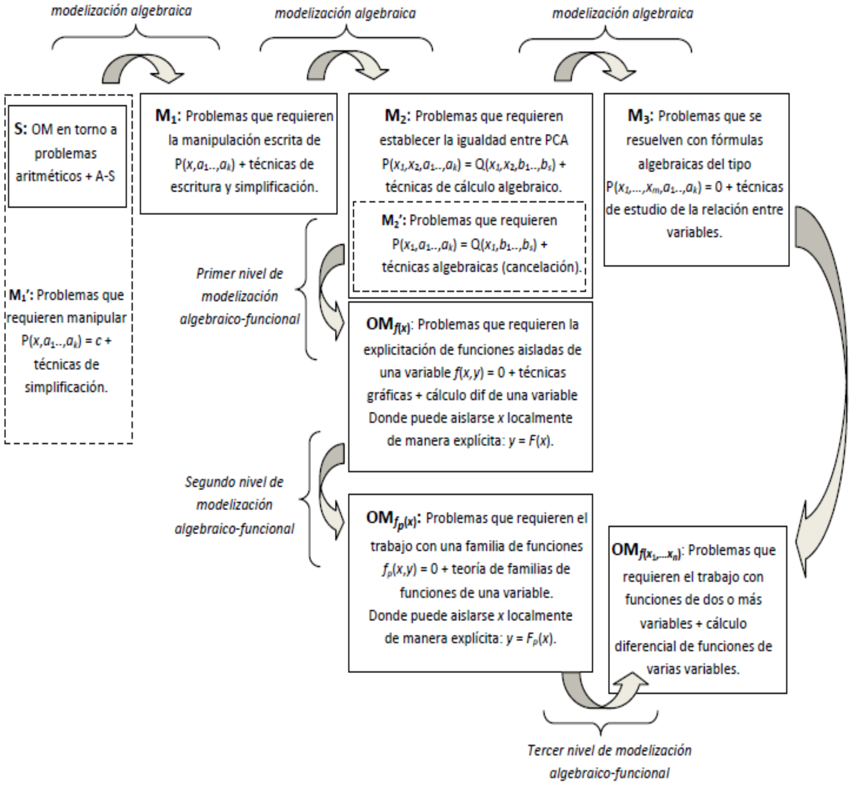


Figura 1. Esquema del MER de modelización algebraico-funcional.

Nos proponemos únicamente mostrar algunos aspectos del estado actual de nuestra investigación y apuntar los desarrollos previsibles de la misma. En concreto, empezaremos por describir la forma como se interpreta en la TAD la modelización matemática y, en particular, la modelización funcional. Luego, continuaremos formulando las diez conjeturas que proponemos para caracterizar el modelo epistemológico, dominante en Secundaria, relativo al CDE y la MF. Mostraremos a continuación la incidencia recíproca entre la formulación del problema de investigación didáctica y la construcción del modelo epistemológico de referencia (MER) que postulamos para el ámbito de la actividad matemática involucrado en nuestro problema. Acabaremos proponiendo algunos criterios para la construcción efectiva del citado MER así como una primera formulación del problema de investigación didáctica que estudiaremos.

2. ¿Cómo se conceptualiza la modelización matemática y, en particular, la modelización funcional en la TAD?

La TAD considera la *modelización matemática* como el prototipo de actividad matemática genuina (Chevallard, Bosch & Gascón, 1997). En Ruiz-Munzón (2010) se postula la *modelización funcional* (MF) como completación de la modelización algebraica elemental y como ámbito en el que surgirá la *razón de ser del CDE* en la enseñanza secundaria. Teniendo en cuenta lo anterior, es necesario precisar la forma como se interpreta en la TAD la modelización matemática en general y, en particular, la MF. Esta interpretación difiere en algunos aspectos de las interpretaciones habituales (Blum, 2002; Blum & Leiß, 2007) tal como esquematizamos a continuación.

(a) La TAD incluye la modelización intramatemática en la noción de "modelización"

Se considera la modelización matemática de sistemas matemáticos (esto es, la *modelización intramatemática* como, por ejemplo, la modelización algebraica de un sistema numérico o topológico y la modelización diferencial de un sistema geométrico) como una parte esencial de la actividad de modelización que, además, es inseparable de la modelización de sistemas extra-matemáticos. Aunque el proceso de modelización parta de un sistema extramatemático como sistema a modelizar (por ejemplo, de un sistema proveniente de las ciencias de la salud), el progresivo desarrollo de la actividad de modelización incluye rápidamente etapas en las que interviene la modelización intra-matemática. Esta ampliación de la noción clásica de modelización matemática es coherente con el desarrollo histórico de las matemáticas y permite considerar la modelización como un proceso de matematización progresiva de un sistema en el cual el primer modelo pasa a jugar el papel de sistema (matemático) y así sucesivamente lo que conduce a trabajar con "*modelos de modelos*" del sistema inicial (*carácter recursivo* de la actividad de modelización matemática). Además la modelización intramatemática pone de manifiesto el *carácter reflexivo* de esta, puesto que el sistema puede hacer el papel de *modelo de su modelo*. Un ejemplo histórico de este proceso nos lo proporciona la modelización mutua entre las geometrías euclidiana y cartesiana, puesto que cada una de ellas puede ser considerada como modelo de la otra.

(b) La TAD asigna estructura praxeológica a los sistemas y a los modelos matemáticos

El modelo epistemológico general de las matemáticas que sustenta la TAD no permite considerar la modelización de "conceptos" ni de "técnicas" ni de "problemas" aislados. Dada la naturaleza dinámica de las praxeologías y la profunda interrelación que hay entre sus componentes, no podemos hablar de modelización de un componente de la praxeología independientemente del resto de sus elementos. Se postula que toda modelización matemática presupone la *modelización de una praxeología en su totalidad*.

(c) Relación entre el sistema y el modelo

La TAD propugna que no debemos caer en la ingenuidad de pensar que un *modelo* es una copia o reproducción fotográfica del sistema que modeliza, sino que es un *añadido* a dicho sistema, una *construcción artificial*. La principal función del modelo no es la de "parecerse" al sistema que modeliza, sino la de *aportar conocimientos* sobre él y hacerlo de la forma más económica y eficaz posible. Debemos substituir, como propone Chevallard (1992), la metáfora "representacionista" del modelo como *imagen del sistema* por la metáfora "funcional" del modelo como *máquina* que permite producir conocimientos relativos al sistema modelizado mediante un *proceso de ajustes sucesivos del modelo al sistema.* A lo largo de este proceso no se va comparando la relativa adecuación de diferentes modelos a un sistema supuestamente invariante, sino que el propio sistema también se va transformando (o reconstruyendo).

(d) La TAD interpreta la modelización matemática como un instrumento de articulación de praxeologías matemáticas de complejidad creciente

Los procesos de modelización parten de cuestiones problemáticas que se plantea una comunidad de estudio y que constituyen la "*razón de ser"* de las sucesivas praxeologías que construye la comunidad como respuestas a dichas cuestiones. La forma como se conceptualiza la complejidad creciente de las praxeologías es la siguiente: las praxeologías matemáticas más elementales se llaman *puntuales* y están constituidas alrededor de lo que en determinada institución es considerado como un único *tipo de tareas*. Cuando una praxeología se obtiene por integración de cierto conjunto de praxeologías *puntuales*, tales que todas ellas aceptan un mismo discurso tecnológico, diremos que tenemos una praxeología *local* caracterizada por dicha *tecnología*. Análogamente, se habla de praxeología *regional* cuando esta se obtiene por integración de praxeologías locales y está caracterizada por una *teoría* y hasta de praxeología *global* cuando incluye toda una *disciplina*.

(e) La TAD estructura en tres niveles inclusivos los tipos de modelización funcional

Siguiendo a Ruiz-Munzón (2010), se denomina *primer nivel de MF* de un sistema el que se materializa en modelos que se expresan mediante *funciones aisladas de una única variable* y las correspondientes ecuaciones (e inecuaciones) asociadas. Este tipo de modelización, incluye en cierta forma la *modelización algebraica* (en el sentido de Bolea, Bosch & Gascón, 2001), y viene a responder a cuestiones que hacen referencia a la variación de una magnitud del sistema en función de otra. Su puesta en marcha requiere, más allá de las técnicas puramente algebraicas, el uso de nuevas técnicas (que llamamos “funcionales” y “gráficas”) que incluyen las relativas al estudio de la variación de magnitudes, crecimiento, decrecimiento, ritmo de variación, extremos, etc. Se trata, en definitiva, de técnicas que permiten el estudio elemental de las relaciones internas entre los elementos de una función y el análisis del comportamiento global de la misma.

Denominamos *segundo nivel de MF* de un sistema el que se materializa en modelos que se expresan precisamente mediante *familias de funciones de una variable* y las correspondientes ecuaciones (e inecuaciones) paramétricas asociadas.

En este segundo nivel de modelización se distingue todavía entre “parámetros” y “variables” de tal forma que sus papeles no se consideran intercambiables. Se trabaja, por lo tanto, con familias de funciones de una variable pero todavía no con funciones de varias variables.

Denominamos *tercer nivel de MF* de un sistema el que se materializa en modelos que se expresan mediante *familias de funciones de dos o más variables* y las correspondientes *fórmulas asociadas*. En este tercer nivel de modelización el papel de los “parámetros” y de las “variables” es intercambiable. Se estudia cómo repercute la variación conjunta de dos o más variables sobre la variación de una función, tarea esta que aunque puede plantearse a partir de los modelos trabajados en el segundo nivel, requiere para su resolución completa de técnicas que no existían en aquel.

Estos tres niveles de MF se esquematizan en la figura 1 considerándolos como desarrollo del proceso de algebrización que, a su vez, se articula en tres etapas de modelización algebraica.

3. Modelo epistemológico dominante en Secundaria en torno al cálculo diferencial elemental

En el trabajo preliminar llevado a cabo en la memoria de investigación (Lucas 2010) presentamos una comparación de los resultados experimentales obtenidos en España y Portugal. Allí contrastamos empíricamente cinco aspectos de la rigidez de las *praxeologías matemáticas* que se estudian en la Enseñanza Secundaria y que aparecen, de manera más o menos fragmentada, en los manuales escolares y en los diseños curriculares de dicho nivel de enseñanza en ambos países. Dicha comparación estaba sustentada sobre el análisis de cinco conjeturas formuladas previamente en Fonseca (2004) y que pueden describirse brevemente mediante las siguientes etiquetas:

C1. Las técnicas matemáticas dependen fuertemente de la nomenclatura

C2. La aplicación de una técnica no implica la interpretación del resultado obtenido

C3. Cada tarea está asociada a una técnica privilegiada

C4. No hay reversión de las técnicas para realizar la tarea matemática “inversa”

C5. Ausencia de situaciones abiertas de modelización

Se aplicó un cuestionario, con diversos ítems para cada una de las conjeturas, a una muestra de estudiantes de ambos países. Los resultados obtenidos fueron analizados y contrastados con los que se obtuvieron a partir del análisis de los libros de texto y de los currículos oficiales. Esta investigación preliminar permitió poner de manifiesto, como ya hemos indicado, el fenómeno de la *rigidez* y de la *incompletitud* de la actividad matemática escolar y, en definitiva, la pérdida de la *razón de ser* de la matemática enseñada.

A partir de estos resultados, efectuamos un *recorte* del ámbito de la actividad matemática escolar para concentrarnos en la que se lleva a cabo en torno al CDE. Una vez situados en este ámbito, pretendemos contrastar empíricamente diez conjeturas para empezar a caracterizar el *modelo epistemológico dominante* en la enseñanza secundaria portuguesa en torno al

CDE, lo que nos proporcionará respuestas provisionales a algunas de las cuestiones que forman parte de la *dimensión económica* del problema del CDE y, a su vez, nos servirá de base para formular nuestro problema didáctico de investigación.

Las diez conjeturas que pretendemos contrastar empíricamente se agrupan en dos bloques de cinco conjeturas cada uno: en el primero de ellos se sitúan las especificaciones de las conjeturas C1-C5 cuando se delimita el ámbito de la práctica matemática escolar al del CDE. Así, por ejemplo, la conjetura C4 se reformularía como sigue:

> C4 (CDE). En el ámbito de la matemática escolar en torno al CDE no hay reversión de las técnicas para realizar la tarea matemática «inversa»

Se puede constatar, por ejemplo, que en la enseñanza secundaria portuguesa son muy escasas las tareas matemáticas que proponen calcular las primitivas de una función dada (considerando las técnicas del cálculo de primitivas como "técnicas inversas de las correspondientes técnicas de derivación") y, mucho más escasas, las tareas que parten de un modelo matemático funcional y plantean la búsqueda de sistemas (matemáticos o extramatemáticos) que pueden ser modelizados mediante dicho modelo. La contrastación empírica de este primer bloque de conjeturas pretende profundizar en el análisis del fenómeno de la rigidez y atomización general de las praxeologías matemáticas escolares en el caso particular del CDE.

En el segundo bloque se sitúan cinco nuevas conjeturas que, junto con las anteriores, constituyen la hipótesis que proponemos para el *modelo epistemológico dominante* en Secundaria del ámbito de la actividad matemática que está en juego. Esto significa que los resultados de la contrastación empírica de estas conjeturas nos proporcionarán una primera caracterización de la manera de interpretar, describir y utilizar la matemática escolar en torno al CDE por parte del propio sistema portugués de enseñanza secundaria. Este modelo epistemológico dominante incidirá fuertemente sobre la manera de interpretar la enseñanza de este ámbito de la matemática escolar en la institución en cuestión (Gascón 2001). Proponemos a continuación la formulación de las conjeturas de este segundo bloque.

> C6 (CDE). La definición de derivada (como límite de la tasa de variación media) no juega ningún papel relevante en la enseñanza secundaria. Podría

> afirmarse que dicha definición, en cuanto a su incidencia en las técnicas matemáticas escolares, es meramente "decorativa".

Postulamos que si bien pueden existir algunas tareas elementales, relativas al cálculo de la derivada de una función elemental (lineal o cuadrática) en un punto utilizando la propia definición de derivada como técnica, estas tareas serán excepcionales y prácticamente irrelevantes en el desarrollo posterior de la actividad matemática escolar.

> C7 (CDE). La representación de la gráfica de una función (y de la función derivada cuando aparece) se considera en la enseñanza secundaria como un objetivo en sí mismo y no se les da ningún tipo de funcionalidad técnica. En particular la gráfica de una función no se utiliza como modelo gráfico-funcional de un sistema.

Postulamos que muy raramente se utilizará la gráfica de una función (y, mucho menos la gráfica de la función derivada) como instrumento técnico para responder cuestiones relativas a un sistema modelizado por dicha función.

> C8 (CDE). El significado del signo de la función derivada segunda raramente se interpreta en términos del sistema modelizado, esto es, como ritmo o velocidad de variación de la función. En consecuencia nunca se interpretan los puntos de inflexión en términos del sistema modelizado.

Postulamos que la función derivada segunda está prácticamente ausente como herramienta de modelización funcional, salvo para obtener los intervalos de concavidad/convexidad y los puntos de inflexión cuando el objetivo consiste únicamente en representar la gráfica de una función sin ninguna otra finalidad.

> C9 (CDE). Las funciones se suelen estudiar en forma aislada, no se estudian sistemáticamente familias de funciones ni, en consecuencia, la relación entre la variación de los parámetros y la posición y la forma de las gráficas de las funciones de una familia. En particular no se utilizan las familias de funciones (ni, mucho menos, sus derivadas) como modelos de sistemas matemáticos o extramatemáticos.

Postulamos que el estudio sistemático de familias de funciones está prácticamente ausente salvo, a lo sumo, en el caso de las funciones lineales y cuadráticas. Solo en casos muy excepcionales podemos encontrar una familia de funciones (con uno o más parámetros) jugando el papel de modelo de un sistema.

> C10 (CDE). No existe una actividad sistemática en torno a la tasa de variación media de una función. En consecuencia nunca se trabajan las técnicas de resolución de ecuaciones en diferencias finitas lo que impide constatar que se trata de técnicas poco "económicas" y evita que surja la necesidad de substituirlas por otras técnicas más potentes y económicas como las que proporciona el cálculo infinitesimal elemental.

Postulamos que la tasa de variación de una función en un intervalo juega esencialmente un papel preparatorio para la definición de la derivada de una función en un punto. Al no utilizarse como modelo de un sistema, no aparece el problema de resolver ecuaciones elementales en diferencias finitas ni, por lo tanto, las dificultades técnicas que estas entrañan.

Paralelamente a la contrastación empírica de estas conjeturas, pretendemos también efectuar un análisis de la evolución histórica del CDE en la enseñanza secundaria portuguesa, definiendo y describiendo diferentes etapas históricas y mostrando la incidencia de determinados fenómenos transpositivos sobre el estado actual del CDE en el currículum. Se trata de un aspecto del proyecto de tesis doctoral que no trataremos en esta comunicación.

4. Dialéctica entre la formulación de un problema didáctico y la construcción de un modelo epistemológico-didáctico de referencia asociado

La formulación de un problema didáctico (en el sentido de problema de investigación en didáctica de las matemáticas) presupone siempre, de manera más o menos explícita, una interpretación del ámbito de la actividad matemática que está en juego. Así cuando en el enunciado de un problema didáctico se habla de la enseñanza, del aprendizaje, de la difusión, etc., del *concepto de derivada*, de la *geometría analítica*, de los *sistemas de numeración*, o de la *proporcionalidad*, se está sustentando inevitablemente una interpretación (un modelo, aunque sea muy impreciso) de la actividad matemática que se supone que acompaña a dicha noción en la institución en cuestión.

Desde la TAD postulamos, por una parte, que la explicitación de dicho modelo, que denominamos modelo epistemológico de referencia (MER), es imprescindible para poder formular el problema didáctico con precisión y como un auténtico problema científico. Por otra parte, la construcción del MER demanda cierta formulación previa, aunque sea transitoria, del problema didáctico, puesto que el MER puede considerarse como una respuesta provisional (que debe contrastarse experimentalmente) a las cuestiones que forman parte de una dimensión básica o nuclear del problema didáctico en cuestión, la dimensión epistemológica que condiciona toda la problemática [1].En realidad el MER constituye únicamente la base sobre la que se sustenta la respuesta al problema didáctico de partida porque este, cuando se plantea en el ámbito de la TAD, contiene siempre algunas de las cuestiones que forman parte de su dimensión ecológica (Gascón, 2011).

Para hacer compatibles los dos principios metodológicos citados es necesario que, en la práctica efectiva de la investigación didáctica, la construcción del MER y la progresiva formulación del problema de investigación avancen en paralelo, *dialécticamente*. A medida que vayamos perfilando las características del MER será posible formular con más precisión algunas de las cuestiones que formarán parte del problema didáctico (e incluso podrán formularse cuestiones nuevas) y, recíprocamente, al ir avanzando en la formulación del problema didáctico será posible avanzar en el detalle de los componentes de un MER asociado a dicho problema.

En general, la estructura de los MER que construye la TAD toma la forma de una *red de praxeologías matemáticas* cuya dinámica comporta *ampliaciones* y *completaciones* progresivas (Bolea, 2002; Sierra, 2006; Barquero, 2009; Ruiz-Munzón, 2010). Una manera alternativa y relativamente equivalente de describir un MER es mediante una *red de cuestiones y respuestas* donde las respuestas tienen una estructura praxeológica (son precisamente estas praxeologías-respuesta las que forman la red de praxeologías cada vez más amplias y completas). Podemos afirmar, además, que el papel que juega la actividad de modelización matemática en

1. El MER debe interpretarse como una hipótesis o conjetura provisional y, por lo tanto, susceptible de ser completado, modificado y revisado constantemente. Un MER es una hipótesis científica creativa que debemos someter a la prueba de la contingencia.

la construcción de un MER es crucial puesto que las praxeologías matemáticas que estructuran un MER suelen cumplir la siguiente condición: cada nueva praxeología no solo amplía y completa relativamente (en el sentido de Bosch, Fonseca & Gascón, 2004) a la praxeología anterior, sino que además puede considerarse en muchos casos como un *modelo matemático* de esta.

Dado que la TAD interpreta la actividad matemática como una actividad humana institucionalizada, un MER se elabora siempre en relación a una institución. Pero las instituciones no son compartimentos estancos y las cuestiones problemáticas se desarrollan a medida que se van estudiando, de manera que es posible concebir un MER que, potencialmente, pueda sustentar procesos de estudio situados parcialmente en dos o más instituciones que pueden abarcar dos o más niveles educativos diferentes [2].

Digamos para precisar un poco más el papel de los MER en la formulación de los problemas didácticos, que también es importante situar cada MER en relación a otros MER de los que de alguna manera depende y, en especial, de los MER más amplios que lo contienen. En nuestro caso, debemos precisar la relación entre el MER en torno al CDE (que pretendemos construir) y otros MER más amplios. Remarquemos que el diseño matemático que pretendemos construir, no es más que una pequeña parte de un MER mucho más amplio que recubrirá desde la introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la MF con parámetros, hasta la razón de ser del CDE en Secundaria y los primeros desarrollos del cálculo diferencial en la Universidad, y que esta completación la haremos a partir del MER elaborado en Ruiz-Munzón (2010) y esquematizado en la figura 1. Pues bien, dentro de ese MER global, en este trabajo nos situamos en el

2. En este trabajo nos centramos en la enseñanza secundaria de España y Portugal. En España la enseñanza secundaria consta de dos etapas: la Enseñanza Secundaria Obligatoria o ESO (alumnos de 12 a 16 años) y la enseñanza secundaria postobligatoria o Bachillerato (alumnos de 16 a 18 años). En el caso de Portugal, el tercer ciclo de la enseñanza básica está compuesto por tres años de escolaridad (alumnos de 12 a 15 años) y la enseñanza secundaria por otros tres (alumnos de 15 a 18 años). Desde 2009, en base a la Ley número 85/2009, de 27 de Agosto, la enseñanza secundaria portuguesa se tornó universal, gratuita y obligatoria.

momento en que, en el ámbito de la *modelización algebraico-funcional*, surge la necesidad de utilizar las técnicas básicas del CDE.

Entre los objetivos del trabajo de tesis (que, obviamente, quedan fuera de esta comunicación) y para contrastar empíricamente que, tal como se postulará en el MER, las cuestiones problemáticas que constituyen la razón de ser del CDE surgen efectivamente en el ámbito de la MF y están más relacionadas con la economía operatoria que proporciona el cálculo diferencial que con presuntas necesidades conceptuales, será necesario *diseñar, experimentar y evaluar un proceso de estudio* en torno al paso, en el sistema de enseñanza portugués, de la MF al CDE. Dicho proceso, sustentado en el MER que queremos contrastar, tendrá lugar en un contexto institucional concreto, con una historia y unas condiciones particulares.

En el momento de decidir la forma más adecuada para organizar dicho proceso de estudio, esto es, el *modelo didáctico* más apropiado para nuestros fines, la investigación didáctica, de manera análoga a lo que sucedía con los modelos epistemológicos, no puede conformarse con utilizar los modelos didácticos "espontáneos" sino que tiene necesidad de construir modelos didácticos propios, a modo de *modelos didácticos de referencia* (MDR). De modo que estos servirán para analizar los modelos didácticos actualmente existentes y para diseñar otros nuevos que sean potencialmente más adecuados para responder a los *problemas didácticos* que están en el origen de toda investigación.

La TAD propone tomar como MDR los que denomina *recorridos de estudio e investigación* (REI) cuya estructura general puede describirse mediante el *esquema herbartiano* propuesto en Chevallard (2007). Los REI están caracterizados por ser procesos en los que el objetivo del estudio no viene definido como un conjunto de saberes designados de antemano, sino como un conjunto de cuestiones a las que la comunidad de estudio se propone aportar una respuesta. En este tipo de procesos se deben movilizar todos aquellos recursos (medios, saberes y respuestas disponibles) que sean necesarios para poder construir una "buena respuesta" a la pregunta inicial. La puesta en práctica de un REI puede entonces describirse como la *gestión y desarrollo en una institución determinada* de la estructura arborescente de cuestiones y respuestas que constituye el MER en el que se sustenta.

5. Criterios para construir un modelo epistemológico-didáctico de referencia asociado al problema didáctico

Partiendo de los resultados obtenidos en los trabajos anteriores (Fonseca, 2004; Lucas, 2010; Ruiz-Munzón, 2010), hemos elaborado un conjunto de conjeturas que guían y sustentan implícitamente la formulación del problema de investigación y, dialécticamente, la construcción del MER que proponemos para sustentar una organización didáctica que aporte una respuesta a dicho problema. Sintetizamos a continuación dichas conjeturas:

> (a) Diez conjeturas relativas al *modelo epistemológico específico del CDE dominante* en la enseñanza secundaria portuguesa ya descritas en el apartado 2. La contrastación empírica de estas conjeturas es un trabajo en marcha que no ha finalizado todavía y que nos proporcionará un "retrato" del estado actual del CDE en la enseñanza secundaria portuguesa, respondiendo así a una parte de la *dimensión económica* del problema didáctico del CDE (Gascón, 2011).
>
> (b) Cinco condiciones que imponemos al *modelo epistemológico de referencia* (MER) en torno al CDE en Secundaria:

(i) Postulamos, como ya hemos indicado, que este MER debe *articular la modelización algebraico-funcional* (en el sentido de Ruiz-Munzón, 2010) con el ámbito de la matemática escolar que tradicionalmente se considera como el CDE en la enseñanza secundaria, y que gira en torno de la noción de "derivada de una función". De esta manera el MER a construir presentará la introducción y el desarrollo del CDE como culminación de la actividad de modelización algebraico-funcional de sistemas que, en principio, pueden ser de naturaleza matemática o extramatemática.

> […] la modelización funcional debería constituir la razón de ser del cálculo diferencial del Bachillerato y primeros cursos universitarios. Pero hemos de reconocer que se necesita un estudio más detallado para contrastar empíricamente dicho postulado lo que requerirá, en particular, desarrollar el MER propuesto para la modelización algebraico-funcional de tal manera que integre la actividad matemática elemental en torno al cálculo diferencial e integral. (Ruiz-Munzón, 2010, p. 379, volumen 1)

(ii) El MER debe explicitar detalladamente el proceso de *construcción* (y no solo de utilización) de los modelos funcionales y las limitaciones de las técnicas algebraicas, gráficas y funcionales para resolver algunas de las cuestiones que aparecen en el proceso de construcción y de utilización del modelo. Este proceso de construcción de modelos es muy poco frecuente en la actividad matemática escolar que es posible llevar a cabo en Secundaria.

(iii) El MER debe otorgar un papel importante a la *tasa de variación media relativa* de una función en la construcción de los citados modelos algebraico-funcionales.

(iv) La cuestión generatriz del MER debe ser suficientemente general y relativamente ambigua en el sentido que debe ser una cuestión con "parámetros" abiertos con el objetivo de asegurar su carácter fuertemente generador de cuestiones derivadas.

(v) Postulamos que las cuestiones a las que responde el CDE en Secundaria, esto es, su *razón de ser* en esta institución, están relacionadas con las *necesidades operatorias* relativas a la resolución de los problemas que surgen en el ámbito de la modelización algebraico-funcional y, en especial, con las ventajas que proporciona la *economía de las técnicas del cálculo infinitesimal elemental.*

Aceptando provisionalmente estos principios generales y al intentar profundizar en la relación entre los modelos funcionales y el cálculo diferencial a fin de seguir precisando ciertos componentes del MER, surgen diversas cuestiones:

> ¿Por qué los modelos funcionales relativos a fenómenos físicos, biológicos, económicos, geográficos, geológicos, químicos (o de cualquier otro ámbito) se expresan mediante ecuaciones diferenciales?
>
> ¿Por qué los científicos no trabajan directamente con los datos brutos del fenómeno a modelizar e intentan interpolar una función que los aproxime?

Una posible respuesta a estas cuestiones podría estar relacionada con el hecho que la mejor forma de caracterizar una función es en términos del *tipo de variación* que define.

> ¿Por qué aproximan la variación media mediante la derivada en lugar de continuar trabajando con ecuaciones en diferencias finitas?

Es razonable pensar que existen criterios de *economía técnica* que aconsejan utilizar la derivada y el cálculo diferencial elemental, esto es, mientras que trabajar con ecuaciones en diferencias finitas entraña grandes dificultades técnicas, el cálculo diferencial y, en particular, las *ecuaciones diferenciales elementales*[3] que aparecen en muchos de los modelos, requieren un trabajo técnico mucho más sencillo, casi algorítmico.

Pero existen, además, razones intrínsecas a los propios fenómenos que permiten caracterizar el tipo de funciones que aparecen cuando se trabaja con la tasa de variación media relativa de un fenómeno físico, biológico, económico, etc. Así, en la mayoría de los casos la tasa de variación media relativa se aproxima bien mediante una función elemental, mientras que si tomamos los datos brutos la aproximación es mucho más problemática. Este hecho, contrastado empíricamente en muchas investigaciones, permite obtener mediante algún tipo de interpolación, una función elemental que aproxima "bien" la tasa de variación media relativa de la función incógnita. A continuación se identifica la ecuación en diferencias finitas con una ecuación diferencial cuya resolución nos proporciona una solución aproximada al problema.

Todo ello refuerza nuestra hipótesis básica según la cual la MF constituye el ámbito en el que surge la razón de ser del CDE en la enseñanza secundaria y en los primeros cursos universitarios. Más concretamente, en el caso de la enseñanza secundaria, una de las razones de ser del CDE postulamos que reside en su *economía y operatividad para construir los modelos funcionales* y para responder a muchas de las cuestiones que se plantean tanto en el sistema modelizado como en el propio modelo.

Cumpliendo con las anteriores conjeturas quedan todavía muchos grados de libertad en la elección de los componentes del MER. Podemos elegir un sistema matemático o extramatemático cuya modelización algebraico-funcional comporte la necesidad de utilizar técnicas del CDE. Asimismo, en el caso de elegir un sistema extramatemático tenemos diferentes opciones de sistemas concretos a estudiar y una vez elegido un sistema concreto, la elección de la cuestión generatriz y la forma de construir el modelo algebraico-funcional tampoco están determinadas de antemano.

En nuestro caso elegiremos un sistema extramatemático del ámbito de las ciencias de la salud y, más concretamente, estudiaremos la *evolución de una epidemia*.

3. El tipo de "ecuaciones diferenciales" que aparecerán serán resolubles mediante el cálculo de la primitiva inmediata de una función elemental.

(1) Tomaremos como cuestión generatriz la siguiente: Q_0: ¿Cómo podemos estudiar la evolución de una epidemia?

(2) Utilizaremos inicialmente una epidemia cuya evolución está determinada mediante hipótesis muy fuertes y, por tanto, simplificadoras y cuyo estudio requiera una MF muy sencilla.

(3) Debilitaremos progresivamente la hipótesis sobre la evolución de la epidemia lo que provocará la aparición de nuevos parámetros y nuevos factores que harán más complejo el modelo y, por lo tanto, el estudio de la citada evolución.

(4) Ensayaremos la posibilidad de tomar en consideración un esquema hipotético de la construcción científica de algunos modelos funcionales y, en particular, de los modelos de la dinámica de poblaciones (como, por ejemplo, de los modelos que describen la evolución de una epidemia).

Se trata de una hipótesis atrevida que, desde luego, no pretendemos que sea la única forma de construir los modelos funcionales. Dicho esquema contiene las siguientes etapas:

– Se parte de ciertos valores obtenidos experimentalmente de la evolución de una población como, por ejemplo, de la población de infectados en una epidemia I(t) para ciertos valores discretos del tiempo t.

– Se elabora una tabla de la tasa de variación media (y de la tasa de variación media relativa) de I(t) en una determinada serie discreta de intervalos de la variable independiente.

– Se obtiene, mediante algún tipo de interpolación, una expresión analítica aproximada de la “tasa de variación media relativa” de I(t), esto es, una ecuación que iguala aproximadamente la tasa de variación media relativa de I(t) y una función elemental.4

4. Los datos puntuales de la evolución de una población no se tratan directamente sino que se transforman en datos de la evolución de la tasa de variación media relativa de dicha población (en los sucesivos periodos de tiempo). Ello se debe a que empíricamente se ha puesto de manifiesto, como ya hemos dicho, que la tasa de variación media se comporta “mejor” (en el sentido que tiene una evolución más previsible) que los datos brutos. En los casos más sencillos (teóricos) dicha tasa es constante o lineal y, cuando se utilizan datos reales, se aproxima bien mediante una función polinómica. En todos estos casos la evolución de la población estudiada sigue un comportamiento próximo al de una función exponencial de base el número e.

– Se identifica la ecuación aproximada citada con una ecuación diferencial cuya incógnita es I(t).

Se resuelve la ecuación diferencial resultante y se obtiene así una expresión analítica aproximada de la función I(t) que, clásicamente, es una función exponencial de base e.

En este esquema hipotético de construcción de un modelo funcional se subraya la importancia de la economía técnica que proporciona el cálculo infinitesimal elemental de resolución de ecuaciones diferenciales elementales, en comparación al coste excesivo de la manipulación técnica de la *tasa de variación media* que requeriría el uso de las técnicas de resolución de *ecuaciones en diferencias finitas*. Se pone así claramente de manifiesto que una posible "razón de ser" del CDE en la enseñanza secundaria está relacionada con las *necesidades operatorias* que surgen en la resolución de problemas de MF, más que con la construcción precisa de la noción de derivada o con la problemática del cálculo de la tangente a la gráfica de una función.

Si en lugar de elegir un sistema extramatemático, como el de la evolución de una epidemia, elegimos estudiar un sistema intramatemático como, por ejemplo, el sistema geométrico definido por una curva plana $C = \{(x, y) / f(x, y) = 0\}$ del que disponemos (por definición) de un modelo funcional "exacto", llegará un momento del proceso de estudio (a medida que la función $f(x, y)$ se hace más compleja) en el que las técnicas algebraico-funcionales presentarán tales limitaciones para responder a las cuestiones planteadas que se hará conveniente e incluso imprescindible el uso de técnicas del cálculo infinitesimal elemental, confirmando así que el CDE en la enseñanza secundaria viene a responder, en primera instancia, no tanto a "necesidades conceptuales", sino a *necesidades de economía operatoria*.

6. Formulación del problema didáctico: el paso de la modelización funcional al cálculo diferencial elemental

En este punto estamos en condiciones de avanzar en la explicitación del problema didáctico que, en realidad, hemos ido construyendo implícitamente a medida que precisábamos los criterios para construir el MER. Mientras que las cuestiones que formaban parte del problema docente de partida se enunciaban, inevitablemente, utilizando las nociones existentes y las ideas dominantes en la institución escolar en relación al CDE y su enseñanza-aprendizaje (ver infra, apartado 1), el problema de investigación didáctica se formulará en términos del MER y hará referencia a la *economía y la ecología de las praxeologías matemáticas y didácticas en torno al CDE en la institución de enseñanza secundaria*. En consecuencia, algunas de las cuestiones que forman parte de nuestro problema de investigación, y cuyas respuestas están en proceso de construcción, son las siguientes:

(a) ¿Qué papel juega la noción de "derivada" en la actual organización matemática escolar de secundaria? ¿Cuáles son las cuestiones a las que responde actualmente el CDE en la enseñanza secundaria, esto es, cuál es su *razón de ser*?

(b) El actual modelo epistemológico dominante del CDE en la enseñanza secundaria, ¿cómo *condiciona la forma de organizar su enseñanza* en dicha institución?

(c) ¿Cuál es la *amplitud del ámbito matemático* más adecuada para plantear el problema didáctico del CDE?

(d) ¿Por qué el CDE aparece en la enseñanza secundaria relativamente aislado de la MF (en el sentido de Ruiz-Munzón 2010)? ¿Qué fenómenos de *transposición didáctica* (Chevallard 1991) permiten explicar el estado actual del CDE en la enseñanza secundaria?

(e) ¿Qué condiciones se requieren para introducir el CDE en Secundaria como *desarrollo del proceso de MF*?

(f) ¿En qué niveles de la *escala de codeterminación didáctica* surgen las *restricciones* que dificultan la integración de la MF y el CDE en la enseñanza secundaria?

(g) ¿Qué condiciones se requieren y qué restricciones impiden que el CDE y, en particular, la noción de "derivada de una función" aparezca inicialmente en Secundaria ligada a las *necesidades operatorias* para construir y utilizar modelos funcionales, esto es, como respuesta a una problemática de *economía técnica*, antes que a una problemática *conceptual*?

(h) ¿Qué *dispositivos didácticos* se requieren para construir la infraestructura didáctico-matemática necesaria para organizar el estudio integrado de la MF y el CDE?

Para seguir avanzando en nuestra investigación, debemos contrastar empíricamente las diez conjeturas relativas al modelo epistemológico dominante en Secundaria sobre el CDE (ver apartado 3) y llevar a cabo un análisis de la evolución histórica del CDE en la enseñanza secundaria portuguesa. Con los datos obtenidos en estos estudios y utilizando los criterios descritos en el apartado 5, debemos construir una primera versión de un MER que articule la MF con el CDE y diseñar y experimentar un REI sustentado en él. Analizando la reacción del sistema ante dicha experimentación, podremos describir algunas de las condiciones que se requieren y de las restricciones que dificultan que el tipo de trabajo que proponemos en torno a la génesis y el desarrollo del CDE pueda vivir con normalidad en la enseñanza secundaria portuguesa, lo que constituirá un primer *análisis ecológico* del tipo de actividad matemático-didáctica propuesta.

Agradecimientos

Financiado por la beca de doctorado ref: SFRH/BD/77335/2011 de la Fundação para a Ciência e a Tecnologia (Portugal) y por el proyecto EDU2012-39312-C03-03 La modelización matemática para la formación del profesorado de secundaria: del algebra al cálculo diferencial.

Referencias

Barquero, B. (2009). *Ecología de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las matemáticas* (Tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona, España.

Blum, W. & Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modeling problems? In C. Haines (Ed.), *Mathematical modelling. education, engineering and economics* (pp. 222-231). Chichester, Reino Unido: Ellis Horwood.

Blum, W. (2002). ICMI Study 14: Applications and modelling in mathematics education. Discussion document. *Educational Studies in Mathematics, 51*, 149-171.

Bolea, P. (2002). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares* (Tesis doctoral). Universidad de Zaragoza, España.

Bolea, P., Bosch, M. & Gascón, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización: El caso de la proporcionalidad. *Recherches en didactique des mathématiques*, *21*(3), 247-304.

Bosch, M., Fonseca, C. & Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en didactique des mathématiques*, *24* (2-3), 205-250.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné* (2.ª ed.). Grenoble: La pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *12* (1), 73-112.

Chevallard, Y. (2005). La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire : transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire. En C. Ducourtioux & P.-L. Hennequin (Eds.), *La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire* (pp. 239-263). Paris : APMEP et Animath.

Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. En M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the 4th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME 4). (pp. 21-30). http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/CERME4/

Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. En L. Ruiz-Higueras, A. Estepa & F. J. García (Eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD)* (pp. 705-746). Jaén, España: Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Chevallard, Y., Bosch, M. & Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelona, España: ICE-Horsori.

Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y la enseñanza universitaria* (Tesis doctoral). Universidad de Vigo, España.

Gascón, J. (1999). Fenómenos y problemas en didáctica de las matemáticas. En T. Ortega (Ed.), *Actas del III Simposio de la SEIEM*, (pp. 129-150). Valladolid, España: SEIEM.

Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4*(2), 129-159.

Gascón, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 14*(2), 203-231.

Lucas, C. (2010). *Organizaciones Matemáticas Locales Relativamente Completas* (Memoria de investigación, Diploma de Estudios Avanzados). Universidad de Vigo, España.

Ruiz-Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional* (Tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona, España.

Sierra, T. A. (2006). *Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas. Los sistemas de numeración y la medida de magnitudes* (Tesis doctoral). Universidad Complutense de Madrid.

Médias – milieux, une frontière ténue au sein de la problématique de base

Yves Matheron
EA 4671 ADEF, ENS de Lyon (IFÉ), France

Abstract. This paper presents the outline of a reflection on the concept of *media* in relation to the concept of *milieu*, a concept that has appeared rather recently in the field of didactics from the ATD (Chevallard, 2008).

Resumen. En este trabajo se presenta el esquema de una reflexión sobre el concepto de *media* en relación con el de *medio*, concepto que ha aparecido en el campo de la didáctica hace relativamente poco desde la TAD (Chevallard, 2008).

Résumé. Ce texte présente l'ébauche d'une réflexion sur le concept de *média*, en relation avec celui de *milieu*, un concept apparu dans le champ de la didactique de manière relativement récente et depuis la TAD (Chevallard, 2008).

IV[e] congrès international sur la TAD (Toulouse, 21-26 avril 2013)
Axe 3. *Entre visite des œuvres et questionnement du monde*

Matheron, Y. (2017). Médias – milieux, une frontière ténue au sein de la problématique de base. Dans G. Cirade et al. (Éds), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* (pp. 633-652). https://citad4.sciencesconf.org

Cet article souhaite débattre de la distinction traditionnellement opérée en didactique entre milieu et média.

D'une part, la notion de *milieu* se rapporte en didactique à un système dénué d'intention. Les rétroactions qu'il retourne des actions exercées sur lui n'apparaissent portées par aucune intention… bienveillante, malveillante ou didactique : il peut être vu, d'une certaine manière, se comportant comme la nature.

D'autre part, le terme de *média*, apparu il y a une cinquantaine d'années en français [1], désigne d'après le dictionnaire Larousse « un procédé permettant la distribution, la diffusion ou la communication d'œuvres, de documents, ou de messages sonores ou audiovisuels (presse, cinéma, affiche, radiodiffusion, télédiffusion, vidéographie, télédistribution, télématique, télécommunication) ». À l'opposé d'un milieu, un média porte donc une intention : celle d'informer, de communiquer.

En première approche, les termes de *milieu* et de *média* diffèrent ainsi d'un point de vue cardinal en didactique, si l'on veut bien considérer le didactique comme ensemble de phénomènes traduisant une intentionnalité : celle de faire établir ou de modifier le ou les rapports de personnes ou d'institutions à des praxéologies ou des parties de praxéologies.

1. La question des médias pour l'étude à l'école

De nos jours, lorsqu'une personne ou une institution tentent d'apporter réponse à une ou des questions, il apparaît déraisonnable qu'elle se prive du recours à divers médias parmi une multitude devenue plus facilement accessible : ouvrages ou revues, Internet, radio ou presse audio-visuelle, films, documents, informations recueillies de la bouche de personnes auprès desquelles enquêter, etc.

Pourtant, sous la forme scolaire dominante qui recourt à l'ostension déguisée (Berthelot & Salin, 1992), une organisation pédagogique assez générale confine les élèves en classe dans une position où ils sont dépourvus d'accès à des médias. Ils se retrouvent « à mains nues » face aux problèmes qu'ils affrontent et qui leur sont proposés (Matheron & Noirfalise, 2011). Se

1. Le dictionnaire en ligne du *Trésor de la langue française informatisée* (TLFi, http://www.cnrtl.fr/definition/) fait remonter son apparition à 1964, en tant qu'abréviation de *mass-media*.

lancer par la recherche dans l'étude en classe d'une question dont la réponse est censée faire avancer le temps didactique ne suppose guère plus que la mobilisation de ressources personnelles, éventuellement mutualisées au sein de petits groupes d'élèves. Ainsi, la réponse ne saurait être autrement construite qu'à partir de connaissances antérieures disponibles, intelligemment combinées. Leur accroissement pourrait éventuellement se nourrir de la prise en compte des rétroactions d'actions dirigées sur un certain milieu, commandées par la mobilisation des connaissances antérieures. Un tel système de conditions et contraintes didactiques afférentes à l'étude d'une question problématique est le produit de déterminations qui relèvent de différents niveaux, notamment de ceux propres à l'organisation de l'école et à la pédagogie que la société ou la civilisation souhaitent y voir mise en place. Je n'interrogerai pas davantage les contributions respectives des niveaux de codétermination didactique à cet état de fait. Mais je relève seulement le constat qu'une telle situation au sein de laquelle le recours aux médias « traditionnels » est soit impossible, soit empêché, est celle dans laquelle se trouvent en France, le plus souvent, les élèves des classes de mathématiques [2], ainsi que de nombre de disciplines scolaires. La didactique a pu décrire les effets de contrat dont use l'enseignant sous ce régime didactique, et qui permettent d'entretenir aux yeux de tous, sous la forme didactique de l'ostension déguisée, la fiction que l'on rend néanmoins l'élève « activement constructeur » du savoir.

Ainsi donc, le schéma herbartien proposé par Chevallard (2008, 2015) qui modélise une dialectique des médias et des milieux nécessaire à l'étude, ne semblerait guère vivre, en première approche et à quelques créations didactiques institutionnelles à la vie éphémère près – comme les travaux personnels encadrés (TPE) en France, par exemple –, qu'à l'extérieur du lieu traditionnellement dédié à l'étude des savoirs : l'école. Pour ceux qui la fréquentent, les moments consacrés à la consultation de médias, s'ils

2. Le programme actuel du collège (élèves de 11-15 ans) mentionne : « … *l'activité de chaque élève* [qui] doit donc être privilégiée. Pour cela, et lorsque c'est possible, sont choisies des situations créant un problème dont la solution fait intervenir des « outils », c'est-à-dire des *techniques ou des notions déjà acquises,* afin d'aboutir à la découverte ou à l'assimilation de notions nouvelles. » (Ministère de l'Éducation nationale [MEN], 2008, p. 10 ; c'est moi qui souligne)

existent, relèvent de l'extérieur de la sphère temporelle et spatiale de la classe. C'est un temps non interrogé, celui de l'étude personnelle privée laissée, au nom de l'autonomie, à la libre initiative de chacun, et sur lequel l'institution ne porte pas son regard : temps passé en bibliothèque scolaire, en consultation de manuels, en recherche d'aide auprès de personnes de son entourage proche [3].

De retour dans les temps et lieu de la classe, se plaçant dans le cadre qui vient d'être sommairement décrit et dépourvu de médias, une question large apparaît : à l'aide de quels moyens commencer à étudier une question et lui apporter un embryon de réponse ? Ou encore, sur quoi s'appuyer pour se lancer dans l'ébauche d'une technique lorsque l'on a à résoudre une tâche problématique ? La réponse a été historiquement apportée en didactique par la notion de *milieu* introduite par Brousseau (1990) et reprise par Chevallard (1992). Mais quelle réalité le terme de milieu recouvre-t-il ?

2. Quelques questions soulevées par le concept de *milieu*

2.1. Origine et évolution du concept de *milieu* en didactique

On connaît la définition originelle du milieu telle qu'on la trouve et telle qu'elle a diffusé à partir d'un article de Guy Brousseau (1990) : celle d'un système antagoniste du système-élève. La définition donnée m'apparaît avant tout fonctionnelle. C'est ce que semble confirmer G. Brousseau (1986a) lorsqu'il indique, dans sa thèse d'État, que la description des sous-systèmes, dont celui de milieu, n'est pas un objectif premier lorsqu'on modélise une situation d'enseignement : ce travail, dit-il, concerne avant tout l'étude *des relations* entre les sous-systèmes. Ainsi :

> Modéliser une situation d'enseignement consiste à produire un jeu spécifique du savoir visé, entre les sous-systèmes : le système éducatif, le système élève,

3. L'actuel programme de seconde (élèves de 15-16 ans) indique, dans une partie intitulée *Diversité de l'activité de l'élève* (MEN, 2009, p. 2), quelques techniques du travail mathématique : la recherche et l'expérimentation à l'aide de logiciels, l'application de techniques et d'algorithmes, la recherche de résultats partiels, l'explication orale et la communication écrite. Et hors la classe : « les travaux écrits faits hors du temps scolaire permettent, à travers *l'autonomie laissée à chacun*, le *développement des qualités d'initiative.* » (C'est moi qui souligne.)

> le milieu… etc. Il ne s'agit pas de décrire précisément ces sous-systèmes autrement que par les relations qu'ils entretiennent dans le jeu. (p. 326)

La modélisation du milieu sous forme de structuration, rendue publique par G. Brousseau en 1990, puis développée par d'autres en théorie des situations didactiques, semble poursuivre cette visée avant tout fonctionnelle : le processus didactique au cours duquel sont produites des connaissances nouvelles, progressivement instituées en savoir, est généré par un *mécanisme* temporel qui voit *la situation* de niveau inférieur devenir *le milieu* de la situation de niveau supérieur. La recherche d'un approfondissement du concept de milieu renvoie, comme on peut le constater, au concept de situation. Mais alors, qu'est-ce qu'une situation ? Au niveau le plus élémentaire il s'agit, en théorie des situations, du couple formé par un sujet [4] et un milieu – milieu dit matériel dans ce cas – sur lequel agit le sujet. Les définitions données pour *situation* et *milieu* bouclent alors sur elles-mêmes [5]. Au-delà d'une définition fonctionnelle et en compréhension, demeure ainsi ouverte la question d'une définition en extension de ce qu'est le (ou un) milieu en théorie des situations didactiques. La manière dont s'établissent les relations entre les sous-systèmes, et notamment entre les sous-systèmes élève et milieu, en est une autre.

Si l'on quitte en effet le niveau du milieu matériel sur lequel le sujet agit, pour aller vers les niveaux d'ordre supérieur, c'est-à-dire ceux des milieux objectif, de référence, d'apprentissage et didactique, ainsi que vers les situations qui les contiennent, les relations du sujet à ces milieux sont définies en évoquant la pensée, l'imagination, la représentation, la réflexion. C'est ce qu'explicite G. Brousseau (1986b), lors de la IVe école d'été de didactique des mathématiques. Dans l'extrait suivant du tapuscrit du cours qu'il donne, j'ai volontairement souligné certains passages. L'observateur attentif des théorisations didactiques notera que les numérotations des milieux et des situations ont changé entre la IVe école d'été (cours de G. Brousseau) et la IXe (cours de C. Margolinas).

4. Le « sujet » évoqué est un élève générique, et non un sujet épistémique.

5. Cette définition a été récemment reprise dans le même sens par G. Brousseau : « Nous avons appelé "situation" (sous-entendue mathématique) un modèle d'interaction d'un sujet avec un certain milieu qui détermine une connaissance donnée comme moyen, pour le sujet, d'atteindre ou de conserver dans ce milieu un état favorable » (2012, p. 106).

> Un élève qui *s'imagine agissant* sur M4 se trouve dans la position S3. Les rapports de S4 et de S3 avec leurs milieux respectifs sont *radicalement différents*. Les premiers sont des rapports *d'action*, les seconds, *plus réflexifs*, se rencontrent dans des situations de formulation ou de preuve. Un élève peut se trouver dans une position S3 sans que la position S4 ait été réalisée ni même soit envisagée ; dans ce cas, le sujet S3 *observe M4 sans imaginer* entrer en interaction avec lui ce qui peut limiter sensiblement ses possibilités de raisonnement.

Tenter de saisir ce que sont les milieux propres aux divers types de situations autres qu'objective suppose, dans la modélisation proposée par G. Brousseau, de recourir à ce qui est du domaine de la pensée ; et qui n'est donc pas nécessairement observable.

2.2. L'aspect malcommode du concept de *milieu* en didactique

Les tentatives de redéfinition du concept de *milieu* opérées ces dernières années par nombre de didacticiens m'apparaissent *symptomatiques* de l'aspect malcommode de ce concept, importé car venu d'autres champs scientifiques, lorsqu'on tente de l'opérationnaliser pour étudier l'établissement des rapports au savoir. C'est ainsi que tout en conservant une modélisation en termes de jeux et de stratégies gagnantes, spécifique de l'aspect relatif à l'apprentissage en théorie des situations, Gérard Sensevy (2007) est amené à parler de *référence* :

> Les normes pérennes du contrat didactique, plus ou moins spécifiques, vont faire partie de ce contexte cognitif commun, sur l'arrière-fond duquel les transactions didactiques vont pouvoir se dessiner. Ces significations communes, dans la construction d'une commune *référence*, sont indispensables à la production des stratégies gagnantes.

Cette définition est complétée en 2008 par Florence Ligozat et Francia Leutenegger, qui voient « la référence » comme un « monde supposé partagé par les instances de la relation didactique (même si ce n'est qu'une fiction) et [la construction d'une référence commune comme] une des dimensions essentielles du travail du professeur ». On retrouve, dans leur article, une préoccupation partagée par beaucoup :

> Cette option permet de caractériser avant tout le système d'objets et de tâches auquel les élèves ont affaire et de ne pas poser *a priori* l'existence d'un

milieu mathématique (au sens de Brousseau, 1990) qui aurait des caractéristiques a-didactiques (système antagoniste à l'action de l'élève) de nature à porter des phases d'action, formulation et validation.

Lorsqu'on tente d'aller au-delà de l'analyse d'un milieu au sens « traditionnel » du terme – milieu dont les niveaux de la structuration, selon les schémas venus de la théorie des situations, seront le plus souvent « bancals » –, se pose la question des causes provoquant des phénomènes d'actions d'élèves. Celles-ci peuvent apparaître inattendues lorsqu'on les réfère à l'intention didactique ayant conduit à faire se confronter des élèves à une tâche problématique. Mais à la question « comment se fait-il que des élèves convoquent des moyens inappropriés ? », qui a pu être étudiée en didactique à partir de la notion de bifurcation, il m'apparaît plus fructueux de substituer celle-ci : « comment les élèves convoquent-ils des moyens ? »

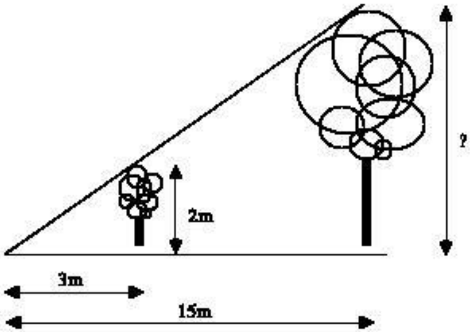
3. Deux observations sur milieu et média

Un retour sur deux observations anciennes montre, entre autres, que des phénomènes relatifs aux milieux et aux médias peuvent parfois être fortuitement constatés, sans qu'on ait eu l'intention de les provoquer ; ce qui donne matière à leur développement.

3.1. Où les ostensifs ne sont pas ceux que l'on croit [6]

Lors de la deuxième enquête internationale sur l'enseignement des mathématiques, au début des années 1980, un item voulant tester la connaissance du concept de similitude était proposé à des élèves de 13-14 ans. La figure 1 donne l'énoncé de cet item, posé en 1982-1983. Comme c'est souvent le cas dans ce type d'enquêtes, il est difficile d'accorder les items aux programmes effectivement enseignés d'un pays à l'autre lorsque l'on prend l'âge des élèves pour seul critère de passation. Aussi, cet item a-t-il été passé par des élèves français de 4^{e} (élèves de 13-14 ans) avant que le savoir traditionnellement attendu pour sa résolution, le théorème de Thalès, leur soit effectivement enseigné : il relevait à cette époque en France du programme du 3^{e} (élèves de 14-15 ans).

6. Il s'agit de la reprise d'une étude que j'ai réalisée (Matheron, 1994).



Le dessin ci-dessus montre comment Pierre utilise le petit arbre pour trouver la hauteur du grand. Quelle hauteur va-t-il trouver ?

A 10 m B 12 m C 14 m D 17 m E 20 m

Figure 1. Item proposé en 1982-1983.

Sur les 27 élèves testés en 1982-1983, 25 trouvent la réponse exacte : 10 m. L’item est repris en 1993-1994, avec 64 élèves de 4^{e} à qui le théorème de Thalès n’est pas encore enseigné, car toujours au programme de la classe suivante. Il s’agit désormais de huit problèmes comparables à celui-ci, utilisant les mêmes données numériques, mais pour lesquels l’habillage ou l’orientation de la figure varie. Contrairement à l’item de 1982-1983, les diverses réponses possibles ne sont pas fournies, et les élèves doivent noter leurs calculs et raisonnements sur la feuille du problème : 70 % des élèves donnent la réponse exacte en utilisant un raisonnement de type proportionnel. Pour expliquer cette réussite que l’on peut considérer inattendue du point de vue institutionnel – une connaissance est disponible alors que le savoir n’est pas encore enseigné –, on aurait pu évoquer la mobilisation de connaissances antérieures formées dans des situations de similitude : connaissances sociales (les photographies, les images des panneaux publicitaires, constituent des occasions de rencontres avec des réductions ou des agrandissements) ou scolaires (échelles, reproductions sur feuilles de papier de figures dessinées au tableau, etc.). Cette connaissance s’exprimerait alors à partir de l’interprétation de l’ostensif représenté par la figure constituée des deux arbres. Cette explication s’est avérée erronée.

D’une part, lorsqu’on proposait aux élèves le problème avec les mêmes données numériques (2 m, 3 m, 15 m), dans une situation où les arbres représentés n’étaient *pas parallèles*, ils recherchaient néanmoins la hauteur manquante du grand arbre par les mêmes calculs et raisonnements que dans le cas d'une similitude, et annonçaient 10 m. D'autre part, lorsqu'on leur présentait le problème dans la situation des arbres parallèles, avec des données numériques exactes mais *plus nombreuses* que les seules trois valeurs 2 m, 3 m, 15 m, par exemple en donnant une valeur de l'angle et les distances du point de visée aux sommets des arbres, ils étaient incapables de répondre. Ainsi la variation du milieu matériel entre ces divers problèmes, ou plutôt des ostensifs contenus dans la représentation du milieu matériel, n'était pas perçue par les élèves à partir de l'observation de la figure elle-même, mais plutôt à partir de *la donnée de trois nombres* et de la *recherche d'un quatrième*. Par contrat, les ostensifs *numériques* et non *pas graphiques* associés à la question, étaient interprétés, pour y répondre, comme indiquant la nécessité de se replacer au sein d'un univers cognitif fait de rapports à des objets antérieurement étudiés au sein du secteur de la proportionnalité [7].

3.2. Replacement et gestes de replacement

L'exemple précédent permet de retrouver un phénomène didactique mémoriel à portée anthropologique, qui s'appuie sur les résultats établis en sociologie de la mémoire par Maurice Halbwachs (1925, 1950) : en situation didactique, pour répondre à des besoins actuels, on se souvient et on mobilise un équipement praxéologique en se replaçant au sein d'un niveau de codétermination didactique antérieurement fréquenté et à partir duquel on pense trouver les aides praxéologiques nécessaires (Matheron, 2011).

L'effet mémoriel peut être provoqué par le professeur à partir de *gestes de replacement*, comme l'a proposé Andrea-María Araya-Chacón (2008). Par exemple, Claudine Garcia-Debanc et Éliane Sanz-Lecina (2008, p. 160) étudient des enseignantes débutantes dans des classes de primaire lors de séances de grammaire relatives à l'identification des sujets des verbes dans des phrases. Il se produit l'épisode suivant dans lequel M désigne la maîtresse et E un élève :

> 246 M – … on va mettre en place des/des choses qui vont nous aider à réussir pourquoi il était difficile à identifier ce sujet Jordan.
>
> 328 E – la méthode que j'ai donnée je la connais du CE1.

7. Il est aussi possible, comme cela m'a été suggéré, que les longueurs entières données guident vers la recherche d'un entier qui devient alors rapport de proportionnalité.

> 329 M – oui ce sont des méthodes qu'on connaît moi l'autre fois on avait parlé de quelque chose ensemble une méthode au début de l'année et aujourd'hui vous ne l'avez pas redonnée.

Cet extrait d'interactions M / E ne permet pas de connaître la technique utilisée par l'élève, ni de savoir à propos de laquelle professeur et élèves « avaient parlé au début de l'année ». Mais, néanmoins, l'élève qui prend la parole *se replace au sein de la classe de CE1* (la classe observée est une classe de CM2, trois niveaux au-dessus du CE1 [8]) qu'il a fréquentée. La maîtresse s'appuie alors sur ce souvenir et sur cette technique mémorielle rendus publics pour tenter de *replacer les autres élèves* au sein d'un épisode d'enseignement de la grammaire, afin de faire advenir « une méthode » permettant la détermination du sujet : « oui ce sont des méthodes qu'on connaît […] *l'autre fois* on avait parlé de quelque chose ensemble ».

3.3. Les aléas liés à l'interprétation d'ostensifs

On revient dans ce court paragraphe sur une observation évoquée par Marc Zarrouati et Yves Matheron (2007). Dans le but d'enseigner la mise en équations et la résolution des systèmes linéaires de deux équations du premier degré à deux inconnues, les élèves d'une classe de 3^{e} (élèves de 14-15 ans) ont à rechercher des problèmes mobilisant le même type de tâches afin de construire des techniques de résolution que l'on souhaite faire converger vers les techniques standard attendues. Par exemple, le premier problème est le suivant : « dans une clinique il n'y a que des chambres à un lit et à deux lits. 20 malades occupent tous les lits des 13 chambres. Combien de chambres à un lit et de chambres à deux lits y a-t-il ? »

Dans le film de la séance en classe, plusieurs indices montrent que la dévolution d'un niveau de codétermination didactique dans lequel se placer a effectivement opéré : celui du domaine des « Travaux numériques ». Une discussion a été enregistrée entre le professeur et deux des élèves qui ont tenté des réponses aux problèmes. Le professeur intervient : « Vous avez pensé aux problèmes d'arithmétique qu'on a vus en début d'année. Et avec le PGCD, ça marche ? Expliquez-moi un peu. » Ces deux élèves ont en effet utilisé l'algorithme dit « des différences successives » pour le calcul du PGCD de deux nombres, étudié quelques mois auparavant. Il se trouve que,

8. En CM2, les élèves ont entre 10 et 11 ans. En CE1, ils ont entre 7 et 8 ans.

fortuitement, la recherche du PGCD de 20 et 13 en calculant tout d’abord 20 – 13 = 7, puis 13 – 7 = 6, revient à une soustraction membre à membre de la deuxième équation à la première dans le système $\begin{cases} x+2y=20 \\ x+y=13 \end{cases}$ qui modélise le problème précédent. Ce qui donne immédiatement $y = 7$, puis en substituant y par 7 dans la deuxième équation : $x = 6$. La portée de cette technique, erronée quand on la rapporte au type de tâches à accomplir mais qui fournit pourtant un résultat satisfaisant dans le cas de ce problème, est mise en échec dès le deuxième problème pour lequel les coefficients n’autorisent plus ce rapprochement technique. La figure 2 fournit la feuille rédigée par ces deux élèves et contenant les solutions qu’ils proposent ; sous le titre « 1er problème » se trouve la solution citée dans les lignes qui précèdent.

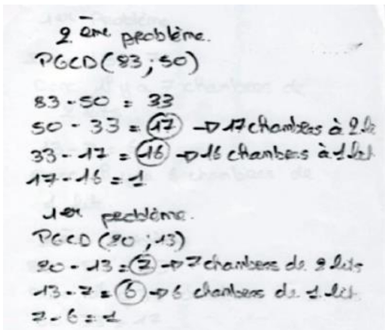

2 ème problème.
PGCD(83 ; 50)
83 - 50 = 33
50 - 33 = 17 → 17 chambres à 2 lits
33 - 17 = 16 → 16 chambres à 1 lit
17 - 16 = 1
1er problème.
PGCD (20 ; 13)
20 - 13 = 7 → 7 chambres de 2 lits
13 - 7 = 6 → 6 chambres de 1 lit
7 - 6 = 1

Figure 2. La feuille de travail des deux élèves.

Pour ces deux élèves, les ostensifs identifiés dans l’énoncé du problème les ont conduits à *se replacer* au niveau du domaine du numérique. Ils jouent le rôle d’ostensifs de guidage vers une organisation mathématique ou l’un de ses éléments, comme le suggère A. M. Araya-Chacón (2010). On retrouve en ce point le même phénomène didactique mémoriel que dans le cas discuté en 3.1. Mais le premier embranchement vers un niveau de codétermination didactique plus spécifique, de l’ordre du secteur[9], a été fatal. La donnée de deux nombres, 20 et 13, et la demande d’en rechercher d’autres, ont rappelé pour ces élèves la recherche du PGCD de deux nombres, et non le tâtonnement à l’aide de schémas représentant des lits et des chambres,

9. Rappelons que les divers types d’organisations praxéologiques peuvent être ordonnés selon une indexation allant du général au spécifique : domaine, secteur, thème, sujet.

comme on a pu l'observer dans cette classe. On peut encore inférer que l'interprétation de certaines clauses contractuelles a peut-être renforcé une orientation dans cette voie : par exemple la clause qui veut que l'on mobilise dans un problème des savoirs étudiés en cours d'année scolaire.

3.4. Quelle leçon tirer des exemples précédents ?

La position adoptée ici consiste à considérer que le « milieu » sur, contre ou avec lequel on agit pour parvenir à résoudre le problème, est constitué de rapports stables (Chevallard, 1992), ou encore *en voie de stabilisation* comme c'est le cas pour les deux élèves engagés dans la recherche erronée d'un PGCD. Des traces de cette instabilité apparaissent d'ailleurs dans leur comportement : ils se sont assurés d'une maîtrise convenable de la technique dite « des différences successives », en recherchant l'explicitation de son usage dans leurs cours. À défaut de pouvoir solliciter la mémoire du collectif constitué de la classe, qui jouerait alors le rôle d'un média, le cahier de cours s'y substitue en tant qu'objet porteur de mémoire externe pouvant ainsi suppléer d'éventuelles déficiences du souvenir personnel. Dans l'ordinaire de l'organisation scolaire et faute de disposer de médias, les rapports constitutifs du milieu – en reprenant la définition donnée par Y. Chevallard (1992) – ne peuvent être que les rapports de type cognitif, relatifs à des souvenirs de parties d'organisations praxéologiques, parfois incomplètes, issues de domaines, secteurs, thèmes ou sujets, qui se convertissent en rapports pratiques, pour l'action.

La question qui se pose alors est celle des objets et des indices autorisant ce rappel mémoriel. Ces objets sont des ostensifs (Bosch, 1994 ; Bosch & Chevallard, 1999), parfois appelés « représentations » au risque de la polysémie du terme, dont la valence sémiotique est, dans le premier moment de la recherche d'un problème, celle qui s'exprime le plus fortement, l'autre valence, instrumentale, n'étant pas nécessairement sollicitée à cet instant. Ainsi donc, la réalité *sensible* de certaines données des problèmes – trois nombres et la recherche d'un quatrième, et non pas l'ostensif graphique constitué de la figure dans le « cas Thalès » du 3.1., ou la donnée de deux nombres dans le « cas des systèmes » du 3.3. –, induit une certaine *perception* variable chez des sujets institutionnels soumis à des clauses contractuelles (disposer des connaissances anciennes permettant de s'attaquer à un problème nouveau est une clause du contrat didactique), qui conduit à son tour vers un *replacement mémoriel* au sein d'un niveau d'organisation du savoir. On retrouve en ce point la distinction classique opérée tant en philosophie qu'en psychologie cognitive entre *sensation* et *perception*, cette dernière dépendant de l'apprentissage et du contexte institutionnel, facteurs qui influent sur l'interprétation des stimuli sensoriels.

La description qui vient d'être proposée et qui fait jouer un rôle important à la sensation et à la *perception sous contrat* s'accorde assez bien avec une des autres propositions de redéfinition du concept de *milieu* en didactique. Pour Sophie René de Cotret (2011) :

> Le milieu est défini, selon mon point de vue, comme ce à quoi est *sensible* l'élève (ou le sujet). Cette définition, bien que compatible au départ avec celle de Brousseau, qui définit le milieu comme le système antagoniste de l'élève, entraîne quelques distinctions. La principale consistant en l'obligation de se demander : le système antagoniste tel que *vu par qui ?* (C'est moi qui souligne.)

Ainsi, *sous contrat*, des objets constitutifs de la tâche problématique, ou si l'on veut du milieu, ce terme étant pris dans le sens « problème ou exercice », se transforment chez certains sujets institutionnels en indices perçus comme des *médias* auxquels on attribue des indications à suivre. La définition de média comme « mise en représentation d'une partie du monde naturel ou social à l'adresse d'un certain public » (Chevallard, 2008) peut sans doute s'appliquer à ce cas si l'on considère que de tels médias possèdent la particularité d'être construits contractuellement par un public restreint qui les adresse… à lui-même. Une telle extension du concept de média ne semble pas tomber sous le coup d'un abus dans la mesure où tout média s'adresse à un public plus ou moins restreint : celui qui sait contractuellement, lire, entendre, voir, évaluer, se servir des informations et en définitive interpréter ce qu'on souhaite lui faire savoir. Dans une institution soumise à un contrat didactique, la frontière entre médias et milieux devient ténue pour certains de ses sujets.

4. Média – milieu et problématique de base

Les observations précédentes ont été réalisées de manière fortuite. Un changement des conditions didactiques rend-il de telles observations plus faciles ? Ou encore, les ingénieries didactiques qui se placent dans le cadre de la problématique de base en didactique, ou les modifications institutionnellement décidées de certaines des conditions, nous fournissent-elles des moyens pour de telles observations et, dans ce cas, que nous apprennent-elles ? Rappelons la définition de la problématique de base en didactique, telle que donnée par Yves Chevallard (2011) lors de la XV^{e} école d'été de didactique des mathématiques : « Étant donné certaines contraintes pesant sur telle institution ou telle personne, sous quels ensembles de conditions cette institution ou cette personne pourrait-elle intégrer à son équipement praxéologique telle entité praxéologique désignée ? »

4.1. Un exemple à partir de conditions modifiées par l'institution

Il arrive que les décideurs en charge d'un système éducatif choisissent d'apporter d'importantes modifications à certaines contraintes qui prévalent d'ordinaire au sein du système, et organisent la mise en place plus ou moins heureuse de conditions nouvelles. Ce fut ainsi le cas en France au tournant des années 2000, qui vit l'apparition, au cycle terminal des lycées (élèves de 16-18 ans), d'un dispositif nouveau : les travaux personnels encadrés. Des contraintes temporelles et pédagogiques étaient libérées et des conditions nouvelles mises en place. Sans entrer dans les détails, les élèves devaient, en petits groupes variant de deux à quatre, construire sur un temps assez long, de l'ordre du semestre, des éléments de réponses à une question inscrite au sein d'un thème. Les élèves avaient à s'engager dans une enquête et pour cela à consulter divers types de médias.

Il m'a été donné de suivre un trinôme d'élèves travaillant sur la question suivante : « Jusqu'où la *caulerpa taxifolia* va-t-elle étendre son développement en mer Méditerranée ? » La question initiale surgissait d'une information sur la pollution en mer Méditerranée, délivrée par des médias. On y apprenait, au détour d'une question relative à la disparition de certaines espèces de poissons, que se développe sur les côtes françaises et italiennes une algue tueuse de l'herbier de posidonies : la *caulerpa taxifolia*.

Une telle information a incité ce groupe d'élèves à approfondir l'étude, à aller s'informer sur cette algue, ses effets, son mode de reproduction et sa vitesse de propagation, etc. Mais tout d'abord une question se posait : en quoi la destruction des posidonies cause-t-elle la disparition de poissons ?

On voit ainsi que l'instruction de la question initiale ayant, dans un premier temps, engagé dans la recherche des médias pouvant apporter une réponse, la rétroaction d'un média informant sur une partie de celle-ci peut, dans un second temps, être aussi considérée comme provenant d'un milieu. En fait, la recherche dans les médias indique que les posidonies sont des plantes à fleurs sous-marines dont se nourrissent certaines espèces de poissons, et qui servent de frayères et de nurseries. Leur disparition entraîne celle de poissons, non pas uniquement parce qu'ils se nourrissent de ces plantes, comme on pourrait tout d'abord le croire, mais parce qu'ils s'y reproduisent et que s'y développent les alevins.

Une telle rétroaction engage à son tour vers la recherche d'une mise à disposition d'autres médias fournissant des éléments de réponses permettant d'instruire la question initiale : jusqu'où cette destruction par extension de la plante tueuse, et ainsi de suite ? Cette quête passe, ou devrait nécessairement passer, par la recherche d'un milieu, en tant que système antagoniste dénué d'intentions, permettant la validation d'éléments de réponses recueillies dans les médias, puisque ceux-ci délivrent intentionnellement des informations dont il convient de vérifier la validité.

Telle que décrite dans les lignes qui précèdent, l'enquête menée pour répondre à la question posée suit un processus que Chevallard (2008) a désigné par l'expression de « dialectique des médias et des milieux ». La libération de contraintes temporelles et de programme, le changement de rôle du professeur qui n'est plus seulement celui qui indique – en tant qu'enseignant – mais celui qui dirige, le *topos* élargi des élèves, etc., engagent vers un processus didactique de ce type. Les médias et les milieux constituent les deux pôles d'une dialectique dont le processus d'alternance assure par dépassement l'avancée dans la production d'éléments de réponses. Mais ces pôles sont-ils si aisément séparables dans d'autres ingénieries didactiques ? Un dernier exemple, bien connu, permet d'éclairer la question.

4.2. Retour sur l'agrandissement du puzzle

Les rares publications anglo-saxonnes présentant des concepts venus de la TSD, si l'on excepte Guy Brousseau (1997), utilisent pour la notion de *milieu* l'exemple de la course à 20, à l'instar de Virginia M. Warfield (2006), ou du puzzle comme le font Kenneth Ruthven, Colette Laborde, John Leach et Andrée Tiberghien (2009). Revenant à la source, on suivra la description de la séance 38 telle qu'exposée dans la brochure de 1987, *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*, de Nadine et Guy Brousseau ; plus précisément on se reportera à la page 141 de la brochure. L'exposé de cette séance est repris de manière plus concise dans la *Théorie des situations didactiques* (Brousseau, 1998, p. 239).

On sait que les élèves ont à agrandir les pièces d'un puzzle de manière qu'une longueur initiale de 4 cm devienne 7 cm dans l'agrandissement. Ils échouent dans un premier temps après avoir proposé soit d'ajouter 3 cm à toutes les longueurs des pièces, soit de les multiplier par 2 puis de soustraire 1 cm. Ils prennent conscience, par rétroaction du milieu matériel, que les pièces ainsi agrandies ne s'accordent pas, et cela invalide les techniques qu'ils ont proposées. On est arrivé en ce point au début de la séance 38 au cours de laquelle le professeur indique : « Vous allez essayer de trouver les bonnes mesures qui permettront de réaliser le puzzle ».

Le déroulement de la séance est décrit à peu près dans les mêmes termes dans les deux ouvrages susmentionnés (N. Brousseau & G. Brousseau, 1987 ; Brousseau, 1998). Dans la brochure de 1987 : « 1°) Pour plus de facilité, l'enseignant (ou quelquefois un des enfants qui a réussi dans l'activité précédente) dispose les longueurs dans un tableau :

4	→	7	
5	→		
6	→		
2	→		
9	→		
7	→		»

Dans l'ouvrage de 1998 : « Lorsque les enfants admettent qu'il doit y avoir une autre loi et se mettent à la chercher, les choses vont beaucoup plus vite, surtout si l'un d'eux, ou le maître, dispose les longueurs dans le tableau […].

4	—	7
5	—	
6	—	
2	—	

9 —

7 — »

Les flèches de l'ouvrage de 1987 sont remplacées par des traits dans celui de 1998, mais le scénario est décrit de la même façon.

L'exposé de ce qui survient ensuite est intéressant. On se contente ici de mentionner l'ouvrage de 1987, plus explicite. « Aussitôt, il en est toujours un pour demander que l'on trouve l'image de 8 (qui ne sert pas, mais qu'ils ajoutent malgré tout dans le tableau)

8 → 14

Cette proposition, qui n'est pas rejetée, permet peut-être le surgissement presque instantané d'un autre modèle : “il faudrait l'image de 1”. » Le fait de disposer dans un tableau la donnée connue (4 → 7) ainsi que celles recherchées, en les ordonnant à l'aide de flèches ou de traits, induit l'engagement dans une technique relevant de la proportionnalité. Une question intermédiaire surgit alors, et qui n'a *a priori* aucun rapport avec les autres questions concernant 5, 6, 2, 9 et 7 : « À quoi correspond le double de 4 ? » ; à cette question, il est immédiatement répondu : « Le double de 7 ». Les ostensifs constitués des nombres, des flèches, des places vides à compléter par des nombres au bout des flèches, de la disposition en tableau du problème, sont perçus comme une « mise en représentation d'une partie du monde » à destination des élèves qui les conduit vers un *replacement mémoriel* au sein du thème de la proportionnalité antérieurement fréquenté, aussi bien dans le monde scolaire que social. La modélisation de la situation, menée par le professeur aidé parfois d'un élève d'après la description donnée, joue le rôle de média. Dans un cadre soumis au contrat didactique, elle informe sur ce qu'il est possible de faire. Le seul milieu pour confirmer la validité de la technique mise en œuvre est celui rencontré ensuite par les élèves, lorsqu'ils constatent que les pièces du puzzle agrandies dans le rapport 7/4 s'accordent effectivement. Au moment où surgit la recherche de 8, le milieu, si l'on souhaite conserver ce terme, n'est fait que des rapports stabilisés à la proportionnalité, indiqué par les ostensifs dont la perception par les élèves équivaut à celle d'un média qui informe.

Arrivés en ce point, il nous faudrait s'engager dans des analyses d'une plus grande finesse pour percevoir la séparation éventuelle des pôles constitués par milieu et média, tant la frontière entre les deux semble ténue.

Références

Araya-Chacón, A. (2008). *La gestion de la mémoire didactique par le professeur dans l'enseignement secondaire des mathématiques : étude du micro-cadre institutionnel en France et au Costa Rica* (Thèse de doctorat). Université Paul Sabatier, Toulouse.

Araya-Chacón, A. (2010). Gestión de la memoria didáctica en secundaria: Estudio del micro-marco institucional de la memoria. Dans A. Bronner et al. (Éds), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 267-287). Montpellier : IUFM

Berthelot, R. & Salin, M.-H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire* (Thèse de doctorat). http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00414065/fr/

Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad* (Thèse de doctorat). Universitat Autònoma de Barcelona, Espagne.

Bosch, M. & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques, 19*(1), 77-124.

Brousseau, G. (1986a). *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques* (Thèse de doctorat d'État). Université Bordeaux 1.

Brousseau, G. (1986b). La relation didactique : le milieu. *Actes de la IVe école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 54-68). Paris : IREM de Paris 7.

Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en didactique des mathématiques, 9*(3), 309-336.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics.* Dordrecht, Pays-Bas : Kluwer.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La pensée sauvage.

Brousseau, G. (2012). Des dispositifs piagétiens… aux situations didactiques. *Éducation & didactique, 6*(2), 101-127.

Brousseau, N. & Brousseau, G. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*. Bordeaux : IREM.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques, 12*(1), 73-112.

Chevallard, Y. (2008). Un concept en émergence : la dialectique des médias et des milieux. Dans G. Gueudet & Y. Matheron (Éds), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques. Année 2007* (pp. 344-366). Paris : ARDM & IREM de Paris 7.

Chevallard, Y. (2011). La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. Dans C. Margolinas et al. (Éds), *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp. 81-108). Grenoble : La pensée sauvage.

Chevallard, Y. (2015). Teaching mathematics in tomorrow's society: A case for an oncoming counter paradigm. Dans S. J. Cho (Éd.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 173-187). Springer.

Garcia-Debanc, C. & Sanz-Lecina, E. (2008). De l'analyse des modèles disciplinaires en acte à la détermination des schèmes professionnels. L'exemple de l'enseignement de la grammaire au cycle 3 par des professeurs des écoles débutants. Dans M.-F. Carnus, C. Garcia-Debanc & A. Terrisse (Éds), *Analyse des pratiques des enseignants débutants. Approches didactiques* (pp. 151-170). Grenoble : La pensée sauvage.

Halbwachs, M. (1925). *Les cadres sociaux de la mémoire*. Paris : Albin Michel.

Halbwachs, M. (1950). *La mémoire collective*. Paris : Albin Michel.

Ligozat, F. & Leutenegger F. (2008). Construction de la référence et milieux différentiels dans l'action conjointe du professeur et des élèves. Le cas d'un problème d'agrandissement de distance. *Recherches en didactique des mathématiques, 28*(3), 319-375.

Matheron, Y. (1994). *De la proportionnalité vers le théorème de Thalès, point d'appui et évolution du rapport au savoir* (Mémoire de DEA). Université Aix-Marseille I.

Matheron, Y. (2011). Le travail du professeur de mathématiques relatif à la conception et la réalisation des phases de dévolution. *Éducation & didactique, 5*(3), 81-100.

Matheron, Y. & Noirfalise, R. (2011). Du développement vers la recherche : quelques résultats, issus du projet (CD)AMPERES, relatifs à la mise en œuvre de PER dans le système d'enseignement secondaire. Dans M. Bosch et al. (Éds), *Un panorama de la TAD* (pp. 57-76). Barcelone, Espagne : CRM.

Ministère de l'Éducation nationale. (2008). Programmes du collège. Programmes de l'enseignement de mathématiques. *Bulletin officiel spécial n^o^ 6 du 28 août 2008.*

Ministère de l'Éducation nationale. (2009). Programme d'enseignement de mathématiques de la classe de seconde générale et technologique. *Bulletin officiel n^o^ 30 du 23 juillet 2009*.

René de Cotret, S. (2011). Des domaines d'expérience au sens commun ? Des ingénieries du quotidien ? Dans C. Margolinas et al. (Éds), *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp. 149-172). Grenoble : La pensée sauvage.

Ruthven, K., Laborde, C., Leach, J. & Tiberghien, A. (2009). Design tools in didactical research: instrumenting the epistemological and cognitive aspects of the design of teaching sequences. *Educational Researcher, 38*(5), 329-342.

Sensevy, G. (2007). Des catégories pour décrire et comprendre l'action didactique. Dans G. Sensevy & A. Mercier (Éds), *Agir ensemble. L'action didactique conjointe du professeur et des élèves* (pp. 13-49). Rennes : PUR.

Warfield, V. M. (2006). *Invitation to didactique.* http://www.math.washington.edu/~warfield/Inv%20to%20Did66%207-22-06.pdf

Zarrouati, M. & Matheron, Y. (2007). Pour une « anthropologie de la compréhension » : essai de reformulation anthropologique du caractère paradoxal du contrat didactique. Dans L. Ruiz-Higueras, A. Estepa & F. J. García (Éds), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD)* (pp. 651-676). Jaen, Espagne : Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Análisis ecológico de la modelización matemática en economía y propuesta didáctica

Lídia Serrano

Institut Can Puig, Sant Pere de Ribes, Barcelona, España

Marianna Bosch

IQS School of Management, Universitat Ramon Llull, España

Josep Gascón

Dt. Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, España

Abstract. We present the main contributions of a Ph.D. research (Serrano, 2013) on the *ecology* of mathematical modelling in university degrees of Economics and Management. The ecological analysis has led us to propose a didactic organisation based on study and research paths, which has been implemented during the last seven academic years in a Spanish university.

Résumé. Nous présentons les principaux apports d'un travail de thèse (Serrano, 2013) sur l'*écologie* de la modélisation mathématique dans l'enseignement universitaire de l'économie et du management. Cela nous a conduits à proposer une organisation didactique basée sur les parcours d'étude et de recherche qui a été expérimentée pendant ces sept dernières années dans une université espagnole.

Resumen. Presentamos las principales aportaciones de un trabajo de tesis doctoral (Serrano, 2013) sobre la *ecología* de la modelización matemática en estudios universitarios de economía y empresa. El análisis ecológico nos ha llevado a proponer una organización didáctica basada en los recorridos de estudio e investigación que se ha experimentado durante estos últimos siete cursos académicos en una universidad española.

IV[e] congrès international sur la TAD (Toulouse, 21-26 avril 2013)
Axe 3. *Entre visite des œuvres et questionnement du monde*

Serrano, L., Bosch, M. & Gascón, J. (2017). Análisis ecológico de la modelización matemática en economía y propuesta didáctica. Dans G. Cirade et al. (Éds), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* (pp. 653-676). https://citad4.sciencesconf.org

1. Hacia un cambio de paradigma

El punto de partida de nuestro trabajo de investigación es la problemática que plantea la enseñanza de las matemáticas en los estudios universitarios de economía, y que podríamos formular inicialmente como la cuestión de qué matemática es posible «hacer vivir» en un primer curso de matemáticas para economía y de cómo organizar esta enseñanza para hacerla lo más efectiva posible.

Actualmente el currículum escolar, en todas sus etapas educativas, ha evolucionado hacia lo que, desde la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) se designa como *monumentalismo* epistemológico (Chevallard, 2015), donde el conocimiento se presenta fragmentado en pequeños pedazos aislados que el estudiante debe conocer. Como consecuencia, se pierde la razón de ser de la matemática enseñada, esto es, se olvidan las cuestiones ya sean económicas, empresariales o incluso matemáticas que están en el origen de los distintos contenidos enseñados. Esta relación con el conocimiento, que invita a olvidarse de lo que uno aprende tan pronto se ha examinado del mismo, se sitúa en las antípodas de un enfoque funcional hacia la construcción del conocimiento, basado en la necesidad de responder a cuestiones problemáticas que surgen en diferentes ámbitos de la realidad, el llamado *paradigma del cuestionamiento del mundo*. Desde la TAD, postulamos que el cambio de paradigma debe basarse en una concepción de las matemáticas como herramienta de modelización de sistemas económicos, empresariales o matemáticos.

2. Problema de investigación

Nuestro problema de investigación se inscribe en lo que se entiende en la TAD como *problemática ecológica*: en lugar de empezar por intentar identificar lo que los alumnos aprenden y cuál es el mejor método de enseñanza, se plantea el estudio de las condiciones que pueden posibilitar la realización de un cambio controlado y efectivo en el sistema universitario actual, las dificultades que pueden ocasionar este cambio y las consecuencias previsibles del mismo. Nos preguntamos, en otras palabras, si es posible enseñar las matemáticas como herramienta de modelización matemática a través de los recorridos de estudio e investigación, cómo puede organizarse su enseñanza, qué condiciones se requieren y qué restricciones dificultan su implementación como actividad normalizada.

El estudio de la ecología de la modelización matemática en los estudios universitarios de economía requiere realizar un análisis previo del papel que juegan las matemáticas en dichos estudios y estudiar las restricciones transpositivas que operan sobre ellas y que permiten explicar la situación de su enseñanza. En el estudio de estas restricciones transpositivas, hemos destacado un fenómeno interesante en España en el ámbito de la transición entre la enseñanza secundaria y universidad: los llamados «cursos cero» o «cursos propedéuticos» que se impusieron hacia el año 2000 en la mayoría de universidades españolas para atenuar las dificultades de los estudiantes en las asignaturas de primer curso universitario. Estos cursos cero suponían para nuestra investigación un ámbito empírico interesante para el análisis ecológico en un doble sentido. Por un lado, nos ofrecían un terreno sin grandes restricciones para experimentar de forma puntual nuevas formas de organizar el estudio de las matemáticas centrándolo en actividades de modelización. Por otro lado, nos brindaban nuevo material experimental sobre la manera en que la institución universitaria diagnostica las dificultades de los estudiantes y el tipo de remediación que propone.

Una vez entrados en la enseñanza universitaria, el estudio realizado también aborda esta doble dimensión: por una parte, la observación naturalista de las propuestas de enseñanza tradicionales, con una ausencia de la modelización matemática como contenido de estudio; por otra, la experimentación de nuevas condiciones que faciliten la inclusión de este contenido, con el análisis de las nuevas restricciones que lo dificultan. En definitiva el estudio ecológico se nutre de la propuesta didáctica que, al modificar las condiciones iniciales, permite a su vez ampliar nuestro conocimiento sobre la ecología de la modelización matemática en los estudios universitarios de economía.

Así, podemos formular nuestro problema de investigación en torno a las cuatro cuestiones siguientes:

$\boldsymbol{Q_1}$: *¿Qué papel juegan las matemáticas en los primeros cursos universitarios de economía y qué condiciones institucionales explican esta situación?*

$\boldsymbol{Q_2}$: *¿Cómo se puede describir e interpretar la respuesta institucional espontánea, que se materializa mediante los «cursos cero» de matemáticas,* *al problema de las discontinuidades matemáticas y didácticas entre la secundaria y la universidad?*

***Q*₃**: *¿Qué características diferenciales, en relación a la respuesta institucional espontánea, pueden presentar los «cursos cero» si se fundamentan en la teoría antropológica de lo didáctico?*

***Q*₄**: *¿Qué condiciones se requieren y qué restricciones dificultan que el estudio universitario de las matemáticas en las instituciones responsables de la enseñanza de las ciencias económicas se organice en torno a la modelización matemática de sistemas económicos?*

3. La enseñanza de las matemáticas para las ciencias económicas en España

Para responder a nuestra primera cuestión, partiremos de los resultados obtenidos en la tesis doctoral de Berta Barquero (2009) donde se postula que el estado actual de la enseñanza universitaria de las matemáticas para las ciencias experimentales se puede explicar en gran medida como una consecuencia del modelo epistemológico dominante, al que denomina «aplicacionismo», donde se supone que las matemáticas y las ciencias siguen procesos de evolución independientes y que las matemáticas, una vez construidas, se aplican a las ciencias experimentales sin contaminarse por ellas. B. Barquero estableció una serie de indicadores que le permitieron contrastar empíricamente hasta qué punto prevalece el aplicacionismo en dicha institución. Los indicadores son los siguientes, adaptado al caso que tratamos en este trabajo:

I1: Las matemáticas se mantienen independientes de las otras disciplinas.

I2: Las herramientas matemáticas que se utilizan para resolver problemas científicos forman parte de una formación matemática básica común.

I3: La enseñanza de las matemáticas sigue la lógica deductivista.

I4: Dado que las aplicaciones vienen después de una formación matemática básica, se destaca una proliferación de cuestiones aisladas con origen en distintos sistemas y que se mantienen fijas.

I5: La enseñanza de las herramientas matemáticas básicas siempre es anterior al estudio de su aplicación.

I6: Se podrían enseñar los sistemas económicos sin modelos matemáticos.

Dado el gran número de similitudes existentes entre el caso de las matemáticas para las ciencias experimentales y el de las matemáticas para la economía, hemos retomado estos indicadores con el objetivo de describir el estado actual de la enseñanza universitaria española de las matemáticas para la economía.

En nuestro estudio hemos considerado los tres ámbitos empíricos siguientes: el sistema de enseñanza universitario español, la enseñanza secundaria y la institución sabia. En el caso de la enseñanza universitaria, hemos seleccionado una muestra de más de cuarenta programas de la asignatura de matemáticas que aparecen publicados en las respectivas páginas web de las universidades de economía españolas, con la intención de valorar los contenidos, las competencias y la bibliografía recomendada. Hemos completado este estudio con los enunciados de exámenes realizados en cinco de estas universidades que corresponden a doce asignaturas diferentes de grados del ámbito de la economía. Y hemos contrastado la situación actual con el programa de la asignatura de matemáticas que se utilizó en el primer curso universitario español de estudios de economía, en la entonces llamada Universidad de Madrid[1], en el curso 1943/44. Ya en aquel momento las matemáticas eran una de las cinco asignaturas que conformaban el plan de estudios, situación que no parece haber evolucionado demasiado.

En el caso de la enseñanza secundaria, nos hemos centrado en el caso de la asignatura de *Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales* de segundo curso de bachillerato de la modalidad humanístico-social en Catalunya[2]. Hemos analizado el currículum oficial marcado por el *Departament d'Ensenyament* de la *Generalitat de Catalunya*, y revisado los libros de texto más utilizados y todos los enunciados de exámenes de las pruebas de acceso a la universidad para esta asignatura desde el curso 1999/2000 hasta la actualidad.

En lo que refiere al análisis del saber sabio, hemos utilizado por un lado, la tesis doctoral de Michel Artaud (1993) sobre la matematización en la economía y, por otro, el manifiesto del denominado «movimiento post-

1. Actual Universidad Complutense de Madrid.

2. En España las distintas comunidades autónomas tienen sistemas de enseñanza gestionados por sus respectivos gobiernos, con currículos propios.

autista» que surgió en Francia en el año 2000, donde un grupo de estudiantes universitarios de economía reclamaba, entre otras reivindicaciones, el cese del uso incontrolado de las matemáticas en estos estudios.

El análisis de los tres ámbitos empíricos antes mencionados nos permite aportar los siguientes elementos de respuesta a nuestra primera cuestión:

> $\boldsymbol{Q_1}$: *¿Qué papel juegan las matemáticas en los primeros cursos universitarios de Economía?*

La mayoría de las universidades españolas responsables de la enseñanza de las matemáticas para la economía adoptan un programa estándar, similar al seguido en carreras científicas, en el que los contenidos se organizan en torno a la lógica interna de los conceptos matemáticos y no en torno a tipos de problemas económicos. La actividad de modelización matemática tiene un papel muy secundario y, cuando aparece, se interpreta como una mera aplicación de conocimientos matemáticos previamente construidos. Se confirma así el aplicacionismo también para el caso de la relación entre las matemáticas y la economía.

En el caso de los estudios de bachillerato y, más específicamente, en la asignatura matemáticas aplicadas a las ciencias sociales aparece el mismo fenómeno transpositivo que sucede a nivel universitario, hasta el punto que la asignatura de matemáticas específica de la modalidad de ciencias sociales ha acabado siendo una versión reducida y simplificada de su análoga para la modalidad de ciencias y tecnología, cuyos contenidos parecen paradójicamente más afines a los de las asignaturas de matemáticas de las carreras de economía.

4. Las matemáticas para la economía en el paso de secundaria a universidad

Una vez delimitado el estado actual de las matemáticas en primer curso de economía y en su etapa previa, la del bachillerato, nos situaremos justamente en la transición entre ambas instituciones. Para ello, partiremos de los resultados obtenidos en la tesis doctoral de Cecilio Fonseca (2004) en los que pone en evidencia la atomización de las praxeologías matemáticas que se enseñan en secundaria, lo que representa una restricción fundamental para la vida de la modelización matemática.

Como hemos comentado anteriormente, en la transición entre la secundaria y la universidad aparece en España un fenómeno interesante, el de los «cursos cero». La llegada a la universidad de los alumnos que habían estudiado bajo la nueva reforma educativa (LOGSE) aumentó la distancia entre la nueva secundaria y una universidad acostumbrada a una élite social e intelectual muy seleccionada por el antiguo bachillerato. Como respuesta, desde las universidades empezaron a ofrecer unos cursos cero cuya duración no suele exceder de tres semanas y se acostumbran a realizar a principios de septiembre, antes de iniciar las clases en la universidad. Su principal objetivo es facilitar la transición de los alumnos entre estas dos instituciones, completando los contenidos matemáticos que se estudian en secundaria con aquellos que se consideran imprescindibles para el inicio de la universidad.

La tendencia de los últimos años apunta a su presencia habitual en casi todos los grados donde en el primer curso universitario se imparte la asignatura de matemáticas, y de hecho en muchas universidades ya se trata de un dispositivo institucionalizado plenamente, que últimamente ha adoptado nuevas formas gracias a las plataformas *on-line* de soporte a la docencia. Ante esta realidad hemos querido analizar cómo están diseñados estos cursos y hemos buscado información sobre diferentes aspectos, como por ejemplo, el origen de su implantación del curso, su relación con el del curso académico habitual, su relación con las matemáticas estudiadas en secundaria y con las que se estudiarán en la universidad, así como su efecto en el «rendimiento» de los alumnos durante el primer año de estudios en la universidad y las nuevas responsabilidades –tanto matemáticas como didácticas– que debe asumir el alumno en estos cursos en relación a las que asumía en secundaria.

Para ello, durante el periodo 2005-2009 llevamos a cabo un estudio pormenorizado de distintos dispositivos (Serrano, 2007) que nos permitieron delimitar el estado de los curso cero que se estaban realizando en diferentes universidades españolas, de diferentes ámbitos. Entre ellos, destacamos:

- Entrevistas con los diseñadores de los cursos, tanto cursos cero como académicos;
- Entrevistas con profesores responsables de impartir los dos tipos de cursos;
- Observación de tres tipos distintos de cursos;

- Análisis de los apuntes y materiales, tanto de profesores como de alumnos;
- Análisis de encuestas pasadas al final del curso a los alumnos;
- Entrevistas con los alumnos.

A partir del curso 2010, una vez todos los estudios universitarios habían pasado a formar parte del Espacio Europeo de Educación Superior se volvió a hacer un estudio sobre la oferta de los cursos cero en los que tan solo se tuvo en consideración los programas ofrecidos.

En base al estudio antes detallado, podemos dar respuesta a nuestra segunda cuestión:

> ***Q*₂**: *¿Cómo se puede describir e interpretar la respuesta institucional espontánea, que se materializa mediante los «cursos cero», al problema de las discontinuidades matemáticas y didácticas entre la secundaria y la universidad?*

La respuesta institucional que la universidad ofrece al problema de las discontinuidades matemáticas y didácticas con las que se encuentran los estudiantes al pasar de secundaria a universidad se materializa en unos cursos cuyo objetivo es trabajar, durante un corto periodo de tiempo, una gran cantidad de organizaciones matemáticas poco conectadas entre sí con una organización didáctica que no activa todos los momentos del proceso de estudio. Este doble hecho tiende a favorecer, y podría incluso agravar, el aislamiento y la desarticulación de las praxeologías matemáticas estudiadas en secundaria porque impide integrar las organizaciones matemáticas escolares en organizaciones más amplias y completas. Por todo ello, estos cursos cero no parecen facilitar la integración de la modelización matemática en los cursos universitarios de economía.

Ante el fenómeno de la atomización y rigidez de las praxeologías matemáticas, el problema didáctico que nos propusimos fue el de diseñar un curso cero fundamentado en la TAD cuyo objetivo general es la *articulación de unas cuantas praxeologías matemáticas* estudiadas en secundaria que los alumnos no son capaces de conectar espontáneamente y que son centrales en el programa universitario y en el trabajo de modelización funcional de sistemas económicos (análisis de oferta y demanda; funciones de ingresos, costes y beneficios, etc.). Dicha articulación se realizaba como respuesta a una cuestión inicial con *interés* y *sentido* para los alumnos. Además, en el diseño se tenían en cuenta los diferentes *momentos* del proceso de estudio.

Un curso con estas características se viene experimentando en el grado de Administración y Dirección de Empresas en IQS-School of Management (Universitat Ramon Llull) desde el curso 2004/05. Se ha realizado siempre en septiembre justo antes del inicio del curso académico. En cada una de las experimentaciones se ha utilizado una cuestión generatriz diferente, dando siempre más énfasis al trabajo de modelización de sistemas económicos reales mediante herramientas algebraicas y funcionales, así como a la presentación oral y escrita de los resultados. Presentamos, a modo de ejemplo, una de las cuestiones generatrices utilizadas en uno de los cursos. En ella se parte de unos datos reales, facilitados por la firma española de moda Desigual, donde se pide hacer previsiones a corto plazo sobre las ventas de determinados productos:

> A pesar de la situación de crisis en la que nos encontramos y el estancamiento del consumo, algunas empresas han conseguido desafiar las no muy alentadoras previsiones. Puede resultar interesante iniciar un estudio sencillo, para una de estas empresas que se encuentran en pleno auge, acerca de las posibles claves de su éxito y analizar algunas de las actividades económicas desempeñadas. Nos centraremos en la firma de moda Desigual, una empresa española en expansión internacional. El objetivo de este ejercicio, que se irá desarrollando a lo largo del curso introductorio, será realizar un estudio simplificado de algunas de las características empresariales y económicas de esta firma de moda a través de modelos y razonamientos matemáticos, utilizando datos reales orientativos proporcionados por la propia empresa e información que los alumnos deberán ser capaces de encontrar de forma autónoma. Con todo ello se realizará una predicción de la situación a la que podría llegar esta empresa a corto plazo, creando debates de las ventajas y los inconvenientes de las magnitudes económicas que constituyen los modelos utilizados y razonando acerca de la viabilidad de estas predicciones.

Desigual nos ha facilitado información que representa, de forma orientativa, la evolución de algunas características empresariales y económicas relevantes para la empresa. A modo de ejemplo, presentamos los datos que nos ha facilitado la empresa:

		Tienda en Barcelona			
		Pº Gràcia, 47	Ramblas, 136	R.de Catalunya, 140	c. Arcs, 10
Semana	S1	21570	52500	25000	21550
	S2	22000	25250	25450	21975
	S3	25000	25000	26750	24790
	S4	26750	26750	28800	23980
	S5	32000	28790	31300	27500
	S6	37500	31300	35050	37450
	S7	42000	35000	34995	41900
	S8	45500	34990	40975	45555
	S9	55000	41000	43700	56700
	S10	67500	43550	45973	-
	S11	75000	45570	-	-

Tabla 1. Ingresos semanales en diferentes tiendas durante el año 2010.

En base a la experimentación de los diferentes cursos cero fundamentados en la TAD, podemos aportar elementos de respuesta a la cuestión:

> ***Q*₃**: *¿Qué características diferenciales, en relación a la respuesta institucional espontánea, pueden presentar los «cursos cero» si se fundamentan en la teoría antropológica de lo didáctico?*

Los cursos cero fundamentados en la TAD parten de una *cuestión generatriz* con suficiente poder generador e interés económico como para requerir, mediante el uso sistemático de la modelización matemática, la articulación de praxeologías matemáticas puntuales que aparecen aisladas en la matemática escolar de secundaria. Pero resultan insuficientes para resolver el problema de la transición entre secundaria y universidad.

Por tanto, deberemos abordar el problema didáctico desde un nivel superior de actuación. Vemos dos posibles vías en este sentido. En primer lugar existiría la posibilidad de hacer más propuestas dando lugar a un abanico de «cursos cero» que, en su conjunto podrían presentarse como la «estrategia de articulación» de las matemáticas de secundaria. O bien, actuar sobre las matemáticas que se enseñan en un primer curso universitario. Esta segunda opción parece más económica porque en la universidad hay más autonomía docente que en secundaria y porque los cambios que haría falta proponer afectan a menos grupos de alumnos, a menos profesores por centro y a alumnos que ya tienen —o tendrían que estar adquiriendo— más recursos didácticos.

5. Recorridos de estudio e investigación en un primer curso universitario de matemáticas para la economía

Nos situaremos en un primer curso universitario, con el objetivo principal de realizar un *análisis ecológico de la modelización matemática*. Para ello, partiremos de las respuestas ya aportadas a las preguntas Q_1 y Q_2, que muestran que el entorno universitario nos ofrece, de forma espontánea, unas condiciones apropiadas para la enseñanza de la modelización matemática. Además, hemos comprobado que se confirman los resultados de B. Barquero (2009) sobre la incidencia del aplicacionismo.

Por otro lado, el estudio de Q_3 también sugiere algunos criterios para diseñar e implementar *recorridos de estudio e investigación* en un primer curso de economía. La experimentación de estos REI aportará elementos de respuesta para la cuestión que todavía nos queda pendiente, Q_4.

La respuesta al problema didáctico de la modelización matemática que propone la TAD se sustenta en un nuevo dispositivo didáctico, los recorridos de estudio e investigación, que se lleva experimentando desde el curso 2006/07 en la asignatura de matemáticas impartida en los estudios de Administración y Dirección de Empresas de IQS-School of Management (URL). Dicha asignatura es de carácter anual con una frecuencia de cuatro horas y media a la semana. Se imparte en dos sesiones semanales de clase magistral con explicaciones y resoluciones de problemas por parte del profesor en la pizarra, y una donde se desarrolla lo que se designa como «taller de modelización matemática», centrado en el estudio de una cuestión relacionada con la economía, y con el temario del trimestre y que se organiza en forma de recorrido de estudio e investigación. Acoge entre 150 y 200 estudiantes repartidos en tres grupos clase. Su programa se divide en tres grandes ámbitos que corresponden a los tres trimestres del curso: álgebra lineal, cálculo diferencial en una variable y cálculo diferencial en varias variables, que se organizan alrededor de grandes tipos de problemas y no de conceptos.

A continuación mostramos una tabla con la relación de recorridos de estudio e investigación que se han realizado desde el curso 2006/07 hasta el 2011/12 en IQS-School of Management:

Curso	**Trimestre**	**Descripción REI**
2006/07	Primero	REI sobre movilidad (versión 1)
	Segundo	REI sobre previsión (versión 1)
2007/08	Primero	REI sobre movilidad (versión 2)
	Segundo	REI sobre previsión (versión 2)
2008/09	Primero	REI sobre movilidad (versión 3)
	Segundo	REI sobre previsión (versión 3)
2009/10	Primero	REI sobre optimización 1
	Segundo	REI sobre optimización 2
2010/11	Primero	REI sobre evolución de poblaciones. Caso discreto
	Segundo	REI sobre evolución de poblaciones. Caso continuo
	Tercero	REI sobre evolución de poblaciones. Caso matricial
2011/12	Primero	REI sobre venta de camisetas. Ingresos y costes
	Segundo	REI sobre venta de camisetas. Estudio de la demanda
	Tercero	REI sobre venta de camisetas. Gestión de stocks

Tabla 2. Recorridos de estudio e investigación experimentados.

5.1. Organización general de los talleres de modelización

Para el diseño de cada recorrido de estudio e investigación hemos utilizado una metodología similar que se inicia elaborando un *análisis matemático a priori* de la *cuestión generatriz* que guía el REI y un *análisis a priori de la organización didáctica* en la que se encarna.

A continuación detallaremos el funcionamiento general de un taller. Los alumnos se distribuyen en grupos de cuatro personas y trabajan en grupo durante todo el taller. Cada clase está así formada por entre 10 y 15 grupos de alumnos. El trabajo en el taller se presenta como el de una asesoría matemática que recibe encargos de distintas empresas. El profesor actúa como responsable de la asesoría y se reparte el trabajo entre los grupos para elaborar, entre todos, tanto las respuestas parciales que se deben entregar cada dos semanas como la respuesta final a dicho encargo. En la primera sesión se presenta a los alumnos el conjunto de cuestiones que plantea la empresa junto con los datos proporcionados. Se lee el encargo, se reparten los datos entre los grupos y se formulan las cuestiones que parecen posibles de responder inicialmente. Se deja a los grupos que trabajen de forma autónoma, se hace una puesta en común con las aportaciones de todos los grupos y se decide el camino a seguir. En la siguiente sesión, cada grupo debe entregar por escrito un «informe de avance» y algunos grupos lo presentan oralmente para su discusión. Esta puesta en común plantea generalmente nuevas cuestiones o retos para avanzar en la siguiente sesión, de trabajo en grupo. La pauta sesión-de-presentación y sesión-de-trabajo-en-grupo se repite cada dos semanas, hasta el final del taller, que dura entre seis y ocho semanas, según el trimestre. Una vez acabado, cada estudiante debe redactar un informe individual de tres hojas con una síntesis de los resultados obtenidos.

En las sesión de presentación, aparece una figura nueva, la del «secretario de la clase», cuya responsabilidad es la de elaborar un informe con una síntesis de las discusiones y los acuerdos tomados en las puestas en común de cada sesión, informe que se pone a disposición del resto de la clase mediante la plataforma virtual del curso.

Respecto al alumnado, las condiciones de realización han sido análogas en todas las experimentaciones: los talleres son una actividad obligatoria para todos los estudiantes de matemáticas de primer curso del grado de Administración y Dirección de Empresas. Los profesores responsables han cambiado: en las primeras experimentaciones eran tres investigadoras en didáctica de las matemáticas pero, a partir del tercer año, pasó a ser una única profesora, ajena al grupo de investigación, la responsable de todos los grupos clase. De todos modos, nuestro grupo de investigación ha colaborado con la profesora en todo momento, especialmente en el diseño de los talleres y, obviamente, en la recogida de información.

Al final de cada taller se ha pasado un breve cuestionario a los alumnos, cuyos resultados están pendientes de análisis en la actualidad. Al final del curso 2010/11 se realizaron entrevistas tanto a una muestra de alumnos como a la profesora responsable del curso.

5.2. Ejemplo de trabajo de modelización en un taller

A modo de ejemplo, mostraremos brevemente el desarrollo de uno de los talleres, concretamente el correspondiente al segundo trimestre del curso

2006/07, poniendo especial atención en el papel de la modelización matemática (Serrano, Bosch & Gascón, 2009, 2010).

La cuestión generatriz, muy similar en los primeros talleres de cada curso, consiste en una petición de previsión a partir de una serie temporal. En este caso, la empresa presenta unos datos relativos a las ventas trimestrales de distintos productos. El encargo concreto es el siguiente:

La empresa de software educativo TAD (*Tecnologías Aplicadas a la Docencia*) lleva un registro de las ventas trimestrales de siete de sus principales productos durante los últimos tres años. Nos encarga un informe sobre las cuestiones siguientes:
P1: ¿Qué ventas se pueden prever durante los próximos trimestres para cada producto? ¿Y para los próximos meses? Presentar una fórmula que permita calcular las previsiones y justificarla explicando las garantías y limitaciones de cada propuesta.
P2: ¿Para qué productos se prevén unas ventas con un crecimiento mayor al 10% trimestral? ¿Para cuáles se prevé un decrecimiento mayor al 12% anual?

Donde los datos facilitados fueron:

TRIMESTRE	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**	**P7**
Marzo 2003	1890	1050	1375	1300	300	750	250
Junio 2003	1940	1100	1100	1105	800	740	270
Septiembre 2003	1970	1120	920	940	1050	735	290
Diciembre 2003	1980	1160	790	800	1200	730	315
Marzo 2004	1990	1200	690	680	1250	720	340
Junio 2004	1995	1250	610	580	1300	710	370
Septiembre 2004	2000	1300	550	490	1330	700	400
Diciembre 2004	2001	1360	500	420	1350	685	430
Marzo 2005	2004	1420	460	350	1370	670	460
Junio 2005	2015	1490	420	300	1380	650	500
Septiembre 2005	2030	1550	390	260	1390	635	540
Diciembre 2005	2060	1640	370	220	1400	615	580
Marzo 2006	2100	1720	340	185	1410	590	630
Junio 2006	2170	1810	325	160	1415	570	680
Septiembre 2006	2250	1900	310	135	1420	545	730
Diciembre 2006	2365	2000	290	115	1425	520	790

	Diccionario Español ingles	Juego simulación empresarial	Tutorial de programación	Videos ciencias naturales	Programa horarios centro	Calculadora gráfica numérica	Calculadora simbólica

Tabla 3. Ventas trimestrales de los distintos productos ofertados por TAD.

A partir de los datos correspondientes a las ventas trimestrales de varios productos se pide a los alumnos hacer una previsión a corto plazo, sin ninguna orientación más. Estos datos forman el sistema inicial (S1). El primer gesto de los alumnos es representar los datos gráficamente para tener información sobre la tendencia de la serie, lo que constituye un primer modelo del sistema (M1). Este modelo no permite aportar una buena respuesta sobre el sistema inicial. Hay que considerar un nuevo sistema formado por el conjunto de datos y gráfico, al que llamaremos sistema gráfico-numérico (S1'). Este nuevo sistema se puede modelizar mediante diferentes modelos funcionales ($M1_i$'), observando las tendencias gráficas de los datos (funciones lineales, parabólicas, exponenciales, etc.). Por tanto, la primera decisión es fijar la *familia de funciones* que parece reproducir la dinámica observada en los datos a partir de la representación gráfica de los datos en Excel.

Una vez elegida la familia de funciones a partir de la forma del gráfico, se necesita un criterio para calcular, dentro de la familia, la función que parece más apropiada a la dinámica observada, lo que constituye un tercer modelo M1''. Una posibilidad es calcular el menor error medio, ya sea el *error absoluto* o *cuadrático*. De este modo se obtiene una primera matematización del ajuste entre el modelo considerado M1'' y el sistema S1.

El criterio del menor error medio permite siempre determinar el mejor modelo dentro de una familia de funciones, pero no es siempre un buen criterio para comparar funciones de distinto tipo, por ejemplo cuando los errores medios cometidos con una parábola y una exponencial dan valores parecidos. Se plantea así la necesidad de introducir un nuevo criterio para determinar cuál es el mejor modelo. Una posibilidad es introducir en el sistema la serie de las variaciones de las ventas, que lleva implícita *la noción de derivada*: si un modelo ajusta las ventas, entonces la derivada del modelo debería ser un buen ajuste para las variaciones de las ventas.

Tomaremos el caso del producto 2 a modo de ilustración:

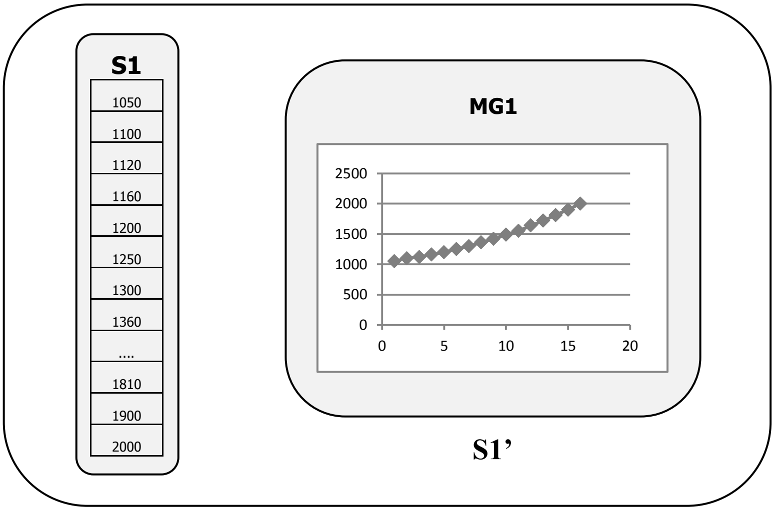


Figura 1. Sistema gráfico-numérico de las ventas.

Consideramos el sistema formado por S1 y MG1: el sistema gráfico-numérico S1'. La tendencia creciente de los valores S1 observada en el gráfico MG1 puede hacer pensar en un comportamiento lineal ($M1_L$'), exponencial ($M1_E$') o parabólico ($M1_P$'). Mediante el uso de la técnica gráfica —previamente explicada en clase—, los alumnos pueden encontrar de forma aproximada, expresiones analíticas que parecen ajustar bien los valores.

El uso de la herramienta de Excel: *solver* (que actúa como una caja negra para los alumnos), permite encontrar la expresión analítica de cada familia que mejor aproxima a los valores iniciales. En nuestro caso:

$$M1_L\text{'}: f(x) = 60{,}923x + 973{,}027;$$
$$M1_E\text{'}: f(x) = 326{,}95 \cdot 1{,}095^x;$$
$$M1_P\text{'}: f(x) = 2{,}46 \cdot (x + 5{,}17)^2 + 995{,}013$$

Una vez se ha encontrado la función que mejor aproxima dentro de cada familia, necesitamos de un criterio que nos permita decidir cuál de las tres familias ajusta mejor a los datos reales. Consideramos el promedio de la diferencia entre el valor real (S1) y el aproximado ($M1_i$') en valor absoluto, al que llamamos error medio ($E1_i$). Se obtiene:

$$E1_L = 40{,}65;\ E1_E = 6{,}98;\ E1_P = 3{,}71$$

Este criterio nos permite descartar una de las funciones, la lineal, ya que el error medio cometido es muy grande respecto el cometido por las otras dos funciones. Pero no es concluyente sobre las otras dos. Necesitamos otro criterio adicional que vendrá dado por la consideración de un nuevo sistema obtenido al considerar la variación trimestral de las ventas, S2:

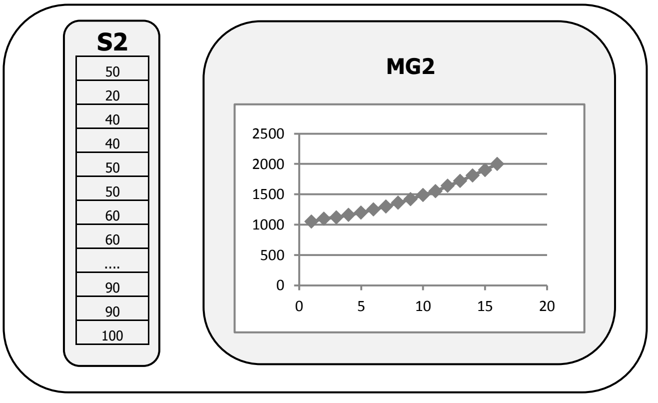


Figura 2. Sistema gráfico-numérico de las variaciones de las ventas.

Con el sistema S2 y el modelo gráfico MG2, consideramos el nuevo sistema gráfico-numérico S2' en el que volvemos a utilizar el mismo razonamiento anterior. La tendencia gráfica de los nuevos datos sugiere una aproximación lineal ($M2_L$') o exponencial ($M2_E$'). De nuevo la técnica gráfica permite a los alumnos encontrar de forma aproximada, expresiones analíticas que ajustan los valores. Y, con la ayuda de *solver*, se obtienen las expresiones analíticas de cada familia que mejor ajusta a los valores iniciales. En nuestro caso:

$$M2_L\text{'}: f(x) = 5x + 25$$

$$M2_E\text{'}: f(x) = -0{,}99 \cdot 1{,}27^x$$

De nuevo se considera el criterio del error medio, cuyos valores obtenidos son:

$$E_1 = 5{,}66; \qquad E_2 = 16{,}92$$

La familia lineal es la que menor error medio comete al aproximar las variaciones de las ventas. A su vez, esta expresión analítica coincide prácticamente con la derivada de la expresión analítica de la familia parabólica encontrada para las ventas trimestrales. Y justamente este será el criterio para determinar cuál es el mejor modelo: si un modelo ajusta las ventas, entonces la derivada del modelo debería ser un buen ajuste para las variaciones de las ventas.

Con este ejemplo hemos querido ilustrar el tipo de trabajo que se realiza en el taller y que los grupos de alumnos habrán ido elaborando, redactando y presentando en forma de informes parciales e informes finales, siempre tomando como interlocutor la hipotética «empresa-cliente». Para completar esta breve descripción, cabe añadir que durante las otras dos sesiones semanales de clase que tienen los alumnos, organizadas en forma de clases magistrales de teoría y problemas, los contenidos que se estudian son precisamente las familias de funciones elementales, la derivación e integración, dentro de un problemática global de utilización de las funciones para resolver problemas de modelización de situaciones empresariales o económicas, algunas muy similares a las encontradas en el taller.

5.3. Resultados de las experimentaciones

Tras seis experimentaciones consecutivas de los talleres de modelización matemática en IQS-School of Management podemos aportar elementos de respuesta a nuestra última cuestión:

> $\boldsymbol{Q_4}$: *¿Qué condiciones se requieren y qué restricciones dificultan que el estudio universitario de las matemáticas en las instituciones responsables de la enseñanza de las ciencias económicas se organice en torno a la modelización matemática de sistemas económicos?*

Se ha adoptado un dispositivo didáctico para la enseñanza de las matemáticas como herramienta de modelización basado en los llamados *recorridos de estudio e investigación.* Se han diseñado y experimentado tres recorridos de estudio e investigación distintos durante más de cinco cursos académicos consecutivos en la asignatura de matemáticas de primer curso de Administración y Dirección de Empresa en IQS School of Management.

El «análisis clínico» de estas experimentaciones ha dado lugar a dos grandes tipos de resultados. Por un lado, se confirman los resultados obtenidos por Barquero (2009) que los recorridos de estudio e investigación son un dispositivo didáctico apropiado para facilitar la integración de la modelización matemática en los estudios universitarios. Se han ampliado estos resultados en dos sentidos. En primer lugar, se incorpora el ámbito educativo de los estudios universitarios de economía al de las ciencias experimentales. En segundo lugar, se muestra por primera vez la posibilidad —y la fecundidad— de integrar los recorridos de estudio e investigación en la organización didáctica global de la asignatura, en lugar de introducirlos como un dispositivo complementario.

Por otro lado, el diseño, experimentación y análisis de los recorridos de estudio e investigación ha permitido avanzar en el estudio de la *ecología* de este dispositivo didáctico y, por extensión, de la enseñanza de la modelización matemática en un primer curso universitario.

En lo que se refiere a las principales condiciones que se requieren para integrar los recorridos de estudio e investigación en la enseñanza universitaria de las matemáticas como un dispositivo didáctico normalizado, destacamos lo siguiente:

- Los recorridos de estudio e investigación deben constituir el núcleo en torno al cual se organizan los contenidos y actividades de la asignatura de matemáticas, incluyendo el proceso de evaluación de las mismas. No basta con que aparezcan como «complementos» a la organización didáctica tradicional. Para ello es necesario un importante trabajo de *ingeniería matemática* que permita la elaboración de nuevas organizaciones curriculares centradas en el trabajo de modelización.
- Para diseñar los recorridos, se deben tomar como punto de partida *cuestiones empresariales* «reales» o «realistas» *suficientemente generativas*, de modo que su estudio requiera la utilización de una gran parte de los modelos matemáticos elaborados con las herramientas de lo que constituye un primer curso universitario de matemáticas para la economía.
- La implementación de los recorridos de estudio e investigación requiere incorporar *nuevos dispositivos didácticos* a la enseñanza universitaria tradicional, encaminados por un lado a facilitar que los estudiantes compartan responsabilidades que el contrato didáctico imperante asigna en exclusiva al profesor y, por otro lado, a hacer vivir en el aula algunas de las dialécticas que están en la base del funcionamiento de los recorridos (Barquero 2009). Se han experimentado algunos de estos dispositivos y analizado su funcionalidad y condiciones de existencia. Se ha mostrado que su funcionamiento también requiere la renuncia por

parte del profesor de un gran número de «gestos profesionales» y la creación de *nuevas técnicas* y *tecnologías didácticas*.

Sobre las *restricciones* que dificultan el funcionamiento normalizado de los recorridos de estudio e investigación —y que inciden, al mismo tiempo, en la posibilidad de la enseñanza de las matemáticas como herramienta de modelización—, nuestra investigación ha puesto en evidencia las siguientes, que atribuimos a los rasgos fuertemente *teoricistas* y *tecnicistas* de la organización didáctica universitaria tradicional y al *aplicacionismo* característico de la epistemología dominante:

- Dificultad para situar las *cuestiones problemáticas* generadoras de los recorridos en el núcleo del programa de estudios, permitiendo que las necesidades «prácticas» precedan a la introducción de recursos «teóricos», en lugar de partir de un listado de contenidos establecido de antemano en el que las cuestiones problemáticas ocupan una posición subsidiaria.
- Dificultad para que los problemas abordados en clase permanezcan abiertos durante un largo periodo de tiempo, dado que el avance del *tiempo didáctico* se mide en términos de la aparición formal de conocimientos teóricos y no de necesidades prácticas o aporte y validación de respuestas a problemas.
- Carácter *excesivamente dirigido* de la actividad escolar tradicional, que dificulta que los estudiantes asuman de forma autónoma la resolución de cuestiones problemáticas, así como que el profesor delegue en ellos responsabilidades esenciales del proceso de estudio.
- Ausencia de un cuestionamiento de la *pertinencia del saber enseñado* que se supone transparente y no problemático, concomitante con una alarmante *escasez de medios* para poner a prueba la validez de las respuestas «oficiales» a las cuestiones planteadas.

Resulta, en definitiva, que la implantación y el desarrollo generalizado de los REI en el sistema de enseñanza universitario plantean la necesidad de superar, no sólo la epistemología aplicacionista imperante, sino también las restricciones que impone la *ideología pedagógica dominante* en el sistema de enseñanza universitaria. Para ello será necesaria la introducción de nuevos dispositivos y gestos didácticos que hasta ahora permanecían recluidos en el ámbito privado de la investigación y que no tienen una entrada fácil en el contrato didáctico habitual.

6. Problemas abiertos

El análisis empírico de las matemáticas que se enseñan actualmente en los estudios universitarios de economía y empresa muestra que el proceso transpositivo no parece haber partido de las necesidades matemáticas que surgen en el trabajo en ciencias económicas, o en los ámbitos profesionales directamente vinculados a estos estudios. Los obstáculos con que se encuentra hoy día una enseñanza funcional de las matemáticas para las ciencias económicas es, en gran parte, una consecuencia de esta falta de trabajo transpositivo que se puede atribuir al predominio del aplicacionismo como epistemología dominante en la enseñanza universitaria. Se plantea así el problema de estudiar con mayor detalle y sistematicidad la naturaleza de esta epistemología dominante y cómo se relaciona con el papel que ha jugado desde el inicio el proceso de matematización no solo en el desarrollo sino también en la constitución de las ciencias económicas. Para abordar este problema, no se puede obviar la existencia de una relación controvertida entre las ciencias económicas y las matemáticas, ni omitir el gran desconocimiento que existe hoy día sobre las necesidades matemáticas en los ámbitos de estudio, investigación y desarrollo profesional en el mundo de la economía. Creemos que el futuro de la enseñanza universitaria no puede prescindir de abordar este problema social cuyo componente didáctico es primordial.

El objetivo principal de nuestra propuesta didáctica, fundamentada en un *análisis ecológico* de los REI, es el de hacer posible que los estudiantes lleven a cabo una actividad matemática funcional vinculado al ámbito científico y profesional de la economía. En consecuencia, si se pretendiese evaluar el «rendimiento» o, más en general, el efecto de esta modalidad de enseñanza sobre las praxeologías personales de los estudiantes, se deberían utilizar instrumentos de evaluación apropiados. Nuestra investigación no ha abordado de forma sistemática esta dimensión, por otra parte fundamental, del problema de enseñanza dado que, por cuestiones metodológicas, consideramos que la dimensión ecológica es previa. A partir de los resultados obtenidos y del material empírico recogido a lo largo de las experimentaciones, se pueden plantear múltiples cuestiones relacionadas con esta dimensión como las siguientes:

- Estudio estadístico sistemático de las respuestas a los cuestionarios y entrevistas para conocer mejor la percepción de los estudiantes sobre el trabajo realizado en los REI y su evolución a lo largo del curso académico, así como su visión de las matemáticas y de su relación con las ciencias económicas.
- Relación entre las respuestas al cuestionario y el rendimiento académico de los estudiantes, tanto en el propio taller como en la asignatura de matemáticas y también en otras asignaturas relacionadas como, por ejemplo, la microeconomía, la informática, etc.
- Relación entre el rendimiento de los estudiantes en el taller y en la asignatura de matemáticas.
- Incidencia de los talleres en la visión que tienen los estudiantes sobre las matemáticas y su función en el entorno económico.

La investigación que hemos realizado está circunscrita a un ámbito institucional muy concreto y los resultados obtenidos en cuanto a la ecología de los REI en la enseñanza universitaria no pueden extrapolarse más allá de este nivel local. El *problema de la difusión* de los REI como dispositivo didáctico para la enseñanza universitaria de la modelización matemática requiere nuevos estudios que aborden aquellas particularidades que no siempre se pueden reproducir en otros ámbitos institucionales. Por ejemplo, mientras que en nuestro caso el equipo de profesores siempre contaba con investigadores en didáctica, cabría estudiar qué papel tiene la *variable profesor* en la ecología de los REI. Del mismo modo, la *organización a nivel escolar* y *pedagógico* de IQS-School of Management cuenta con unas características específicas que no sabemos cómo han podido incidir en el funcionamiento de los REI: centro de una universidad privada, grupos con un número reducido de estudiantes, dedicación del profesorado e importancia otorgada a la docencia, nivel socio-económico de los estudiantes, atención personalizada, recursos pedagógicos disponibles, etc.

El recorrido de estudio e investigación que ha dado lugar a esta memoria se inició a partir de un problema docente muy práctico sobre qué matemáticas enseñar en los estudios universitarios de economía y cómo organizar dicha enseñanza. La problematización de esta cuestión en el marco de la teoría antropológica de lo didáctico provocó la necesidad de elaborar un análisis epistemológico de la matemática escolar y, especialmente, del papel que tiene la modelización matemática en el estudio de problemas vinculados a la economía. Este estudio nos condujo al análisis de las condiciones de posibilidad de nuevos dispositivos didácticos que faciliten la vida de una actividad matemática funcional centrada en la modelización de sistemas económicos. La experimentación de estos dispositivos ha puesto en evidencia rasgos importantes de su *ecología institucional* que delimitan un espacio de posibilidades y condiciones para la renovación de la enseñanza universitaria de las matemáticas. Las cuestiones que se abren al final de este recorrido exceden ampliamente tanto el margen de acción de la propia práctica docente, como el ámbito institucional en el que surgía la cuestión inicial. De hecho, nos conduce a un *problema de epistemología general* y de *gestión social de la transmisión del conocimiento* relativo a la función de las matemáticas como herramienta en las prácticas sociales relacionadas con las distintas ciencias y su papel en la evolución de las mismas. No debería sorprender que este problema tenga un fuerte componente didáctico y que pueda —y deba— abordarse con las herramientas que proporciona la ciencia didáctica.

Agradecimientos

Financiado por el proyecto EDU2012-39312-C03-01 *Competencias y modelización matemática en los estudios universitarios de ADE y en el paso de Secundaria a la Universidad*.

Referencias

Artaud, M. (1993). *La mathématisation en économie comme problème didactique : une étude exploratoire* (Tesis doctoral). Université Aix-Marseille 2.

Barquero, B. (2009). *Ecología de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las matemáticas* (Tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona, España.

Chevallard, Y. (2015). Teaching mathematics in tomorrow's society: A case for an oncoming counter paradigm. En S. J. Cho (Ed.), *The Proceedings* *of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 173-187). Springer.

Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y la enseñanza universitaria* (Tesis doctoral). Universidad de Vigo, España.

Serrano, L. (2007). *La modelització matemàtica en els estudis de Ciències Econòmiques i Socials: disseny d'organitzacions didàctiques per a l'articulació curricular entre l'ESO, el Batxillerat i la Universitat* (Memoria de investigación). Universitat Ramon Llull, Barcelone, España.

Serrano, L. (2013). *La modelización matemática en los estudios universitarios de economía y empresa: Análisis ecológico y propuesta didáctica* (Tesis doctoral). Universitat Ramon Llull, Barcelona, España.

Serrano, L., Bosch, M. & Gascón, J. (2009). Fitting models to data: the mathematising step in the modelling process. En D. Pitta-Panzati & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2186-2195).

Serrano, L., Bosch, M. & Gascón, J. (2010). «Cómo hacer una previsión de ventas»: Propuesta de recorrido de estudio e investigación en un primer curso universitario de administración y dirección de empresas. En A. Bronner et al. (Eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 835-857). Montpellier: IUFM.

Axe 4

Apports de la TAD à l'enseignement et à la diffusion des connaissances

Eje 4

Aportaciones de la TAD a la docencia y la difusión de conocimientos

Axis 4

Contributions of ATD to teaching and knowledge dissemination

Éléments sur les apports de la théorie anthropologique du didactique à la profession et leur réception

André Pressiat

Laboratoire de didactique André Revuz, Université Paris Diderot, France

Abstract. The first part of this conference is devoted to identifying a problem of the profession from clues that appeared to the author in the form of surprises in various components of his professional activity. The second part describes the investigation on this problem, conducted in order to determine the praxeological equipment that may be considered necessary or simply useful to build a mathematics teacher training engineering at a master's level. This is an attempt to implement the primordial problematic (Chevallard, 2011) to analyze the social and professional didactic. The last section reports an example of local diffusion of the anthropological theory of the didactic in the Academy of Orleans-Tours.

Resumen. La primera parte de la conferencia se dedica a la identificación de un problema de la profesión a partir de indicios que le han aparecido al autor en forma de sorpresas en diversos componentes de su actividad profesional. La segunda parte describe la investigación de este problema, realizada con el fin de determinar el equipamiento praxeológico que se considera necesario o simplemente útil para construir una ingeniería de la formación de profesores de matemáticas a nivel del máster. Se trata de un intento de poner en práctica la problemática primordial (Chevallard, 2011) para analizar lo didáctico social y profesional. La última sección recoge un ejemplo de difusión local de la teoría antropológica de lo didáctico en la Academia de Orleans-Tours.

Résumé. La première partie de la conférence est consacrée à l'identification d'un problème de la profession à partir d'indices qui sont apparus à l'auteur sous forme de surprises dans différentes composantes de son activité professionnelle. La deuxième partie décrit l'enquête sur ce problème, conduite dans le but de déterminer l'équipement praxéologique qui peut être jugé indispensable ou simplement utile pour construire une ingénierie de formation de professeurs de mathématiques au niveau d'un master. Il s'agit d'une tentative de mise en œuvre de la problématique primordiale (Chevallard, 2011) pour analyser le didactique social et professionnel. La dernière partie rend compte d'un exemple de diffusion locale de la théorie anthropologique du didactique dans l'académie d'Orléans-Tours.

IV^e congrès international sur la TAD (Toulouse, 21-26 avril 2013)

Axe 4. *Apports de la TAD à l'enseignement et à la diffusion des connaissances*

Pressiat, A. (2017). Éléments sur les apports de la théorie anthropologique du didactique à la profession et leur réception. Dans G. Cirade et al. (Éds), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* (pp. 679-725). https://citad4.sciencesconf.org

1. Indices d'un problème de la profession

L'activité d'un enseignant-chercheur œuvrant pour la formation des professeurs de collège et de lycée est émaillée de moments fugitifs durant lesquels sont mis en lumière des faits relatifs à la profession qui constituent pour lui une surprise. En voici trois, que j'ai vécus dans des situations très différentes, que je décris dans la suite sous le nom d'anecdote (au sens de « bref récit d'un fait curieux ou pittoresque, susceptible d'intéresser ou de divertir », mais également au sens étymologique de « inédit, non publié »).

1.1. Anecdote 1

Dans une visite au cours d'une leçon (en classe de 4e, élèves de 13-14 ans) sur l'agrandissement-réduction d'une figure, une professeure stagiaire utilise une photographie et plusieurs transformations qu'elle lui a fait subir, comme celle ci-dessous. (Elle a poussé sur la « poignée de droite » en allant vers la gauche.)

Figure 1. Une photographie [1] et, à droite, la photographie après la transformation.

Questionnée sur le nom de la transformation qu'elle lui a fait subir, elle répond qu'elle ne sait pas… ou plus. Je donne la réponse : affinité (orthogonale) ayant pour axe le bord gauche et de rapport 0,7. Sa conseillère, étonnée, me demande comment j'ai fait pour trouver cela.

1.2. Anecdote 2

Voici un item de PISA 2003, intitulé *Briques*.

> Dans une pile de briques, il y a des briques de trois tailles différentes. Deux briques de taille moyenne et une petite brique, mises bout à bout, égalent une

1. Il s'agit du moulin d'Angibault, rendu célèbre par le roman *Le meunier d'Angibault* de George Sand.

grande brique. Deux petites briques mises bout à bout égalent une brique de taille moyenne. Voici deux vues d'une construction faite avec ces briques.

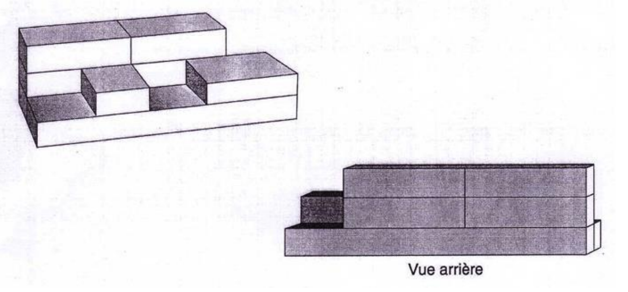


Figure 2. Item de PISA 2003, intitulé « Les briques ».

Supposons que vous vouliez faire la même construction seulement avec des petites briques.

De combien de petites briques aurez-vous besoin ?

Réponse : ……………

Dans une réunion au ministère, on me demande de commenter les résultats (assez mauvais). J'évoque l'originalité des vues en axonométrie parallèle utilisées dans la présentation de l'énoncé, par rapport aux habitudes d'enseignement en France, qui privilégient la seule perspective cavalière (avec des pointillés pour les arêtes cachées).

Je suis surpris par la réaction de mon auditoire : on m'interroge sur la signification du mot « axonométrie ». Je réponds qu'il s'agit simplement d'une projection parallèle, mais avec des choix différents de ceux faits pour une perspective cavalière. Précisons les choses en empruntant des éléments (voir figure 3) à l'*Atlas des Mathématiques*, de Fritz Reinhardt et Heinrich Soeder, traduit de l'allemand et publié en 1997 en France.

Le tableau 1 ci-dessous répertorie les caractéristiques des différentes axonométries obliques évoquées dans la partie D de la figure 3.

Perspective cavalière	Perspective militaire ou aérienne	Autres perspectives
$\beta = 0$ et $e_2 = e_3$	$\alpha+\beta = 90°$ et $e_1 = e_2$	$\alpha = \beta = 30°$ et $e_1 = e_2 = e_3$ (isométrique) $\alpha = 42°$ $\beta = 7°$ et $2e_1 = e_2 = e_3$ (dimétrique)

Tableau 1. Caractéristiques des axonométries.

Les auteurs précisent : « Dans les deux derniers cas, on a une impression de vision rapprochée. Cela peut apporter des facilités de compréhension lors des travaux de construction. ». Pour l'exercice sur les briques, le caractère original des vues choisies est objectivé par les valeurs de α et β. $\alpha = 68°$, $\beta = 6°$ pour la première vue ; $\alpha = -1°$, $\beta = 26°$ pour la deuxième.

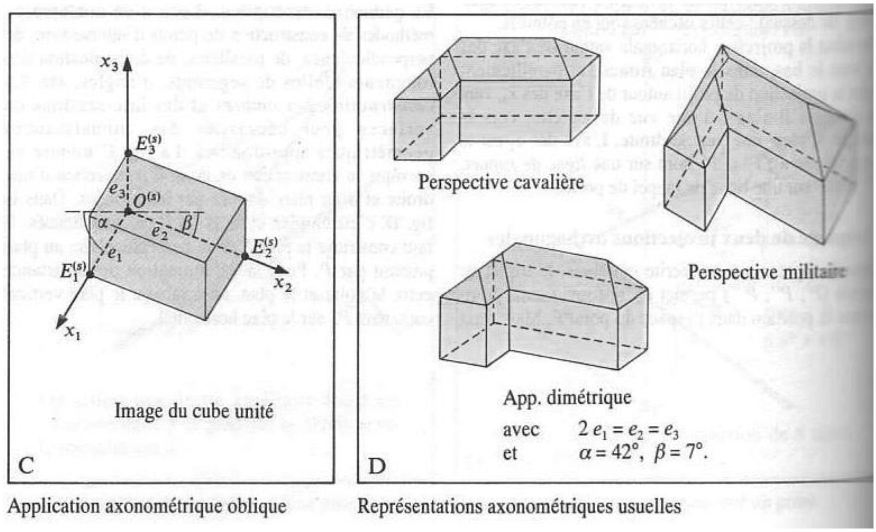


Figure 3. Extrait de l'*Atlas des mathématiques* (p. 176).
(s) comme Schräge Parallelprojektion (Projection parallèle oblique).

Ces anecdotes témoignent de « petits » problèmes de la profession, portant sur des connaissances géométriques bien différentes :

- la première, la notion d'affinité, fait partie du cursus de formation en géométrie affine, et affine euclidienne (et même de la préparation aux concours) ;
- la deuxième, la perspective cavalière, est considérée comme bien connue, tout en étant peu mathématisée officiellement ; mais en fait, elle fait encore l'objet de « légendes », comme celle qui assure que le coefficient de « réduction » des fuyantes est le cosinus de l'angle qu'elles font avec l'horizontale. Cette légende se voit confortée par un document officiel disponible sur le site du ministère, et dont on reproduit un extrait en figure 4.

– On applique à la longueur de l'arête ([BC] dans la figure ci-dessous), et de manière générale à tout segment perpendiculaire au plan frontal, un coefficient de réduction (ou coefficient de fuite), souvent égal au cosinus de l'angle fuyant.

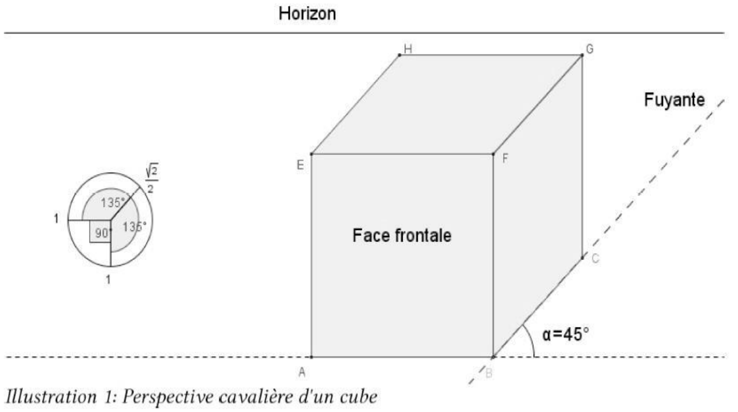


Illustration 1: Perspective cavalière d'un cube

Figure 4. Extrait du document intitulé « Mathématiques Série STD2A [sciences et technologies du design et des arts appliqués]. Perspectives cavalières, parallèles et créations graphiques ». (Ministère de l'Éducation nationale, 2012, p. 4).

Les conditions d'usage de ce document font l'objet de cette annonce : « Ces documents peuvent être utilisés et modifiés librement dans le cadre des activités d'enseignement scolaire, hors exploitation commerciale. »

Nous reparlerons plus loin de ce document, qui comporte d'autres faiblesses.

L'anecdote suivante est un peu différente, et concerne d'autres instances de la profession. Elle a surgi au moment de préparer la présente conférence.

1.3. Anecdote 3

Pour illustrer la transformation plane appelée « transvection », il est devenu classique de citer son utilisation dans des logiciels de graphisme ne disposant pas d'un traitement de texte évolué pour simuler la mise en forme d'un texte en italique. On sait que les lettres sont construites à l'aide de courbes de Bézier (ou de B-splines) et qu'il suffit pour les modifier de transformer leurs points de contrôle. En fait, l'emploi d'une transvection permet seulement de mettre le texte en style oblique, qui est une version simplifiée du style italique parfois dénommée « faux italique », qui est cependant utilisée dans certains traitements de texte dans le cas où la police italique d'un style n'est pas disponible. La figure 5[2] montre bien la différence entre les deux styles.

Figure 5. Différence entre le style italique et le style oblique.

C'est une illustration de la transvection qui a le mérite de donner à voir les mathématiques cachées sous des gestes aussi simples que celui consistant à cliquer sur une icône d'un menu de traitement de texte. Cherchant sur Internet des informations plus détaillées sur ce sujet, j'ai été confronté à d'abondantes pages où le mot *transvection* n'apparaissait pas mais était remplacé par le mot *cisaillement*, souvent mis entre guillemets ou en italique, comme dans l'exemple ci-dessous, trouvé sur un forum de développeurs en Java[3] :

> Avec les fonctions de dessin, il est possible d'incliner un dessin (vers la droite ou la gauche), et cela s'appelle un *cisaillement* en Français [*sic*] (pas en Anglais [*sic*] bien sûr). Avec une chaine de caractère [*sic*], cette inclinaison revient donc a [*sic*] paramétrer toi même [*sic*] l'angle d'inclinaison pour l'écrire en italique. Je ne me souvient [*sic*] plus de la méthode qui fait cela, car je ne l'emploi [*sic*] pas tous les jours. Cela dit, ça ne peut se faire qu'en dessin.
>
> […] Les méthodes en question se situent dans les AffineTransform de Graphics2D.

Le lecteur aura deviné l'origine du mot « cisaillement » : il vient de la traduction du mot anglais « shear » qui correspond à « transvection ». Ce dernier mot étant très spécialisé n'est guère disponible dans les traducteurs

2. Tirée de http://en.wikipedia.org/wiki/Oblique_type.

3. http://www.developpez.net/forums/d616092/java/interfaces-graphiques-java/graphisme/2d/modification-l-angle-courbure-font-italic/.

en ligne, et de nombreux auteurs, parmi les traductions qui y sont proposées, ont écarté le mot « tonte » (concernant la laine des brebis ou des pelouses), mais ont retenu le mot « cisaillement », que l'on rencontre dans des ouvrages universitaires concernant l'infographie et le graphisme, mais également les mathématiques, comme par exemple dans celui de David C. Lay (2004), dont la figure 6 présente un extrait :

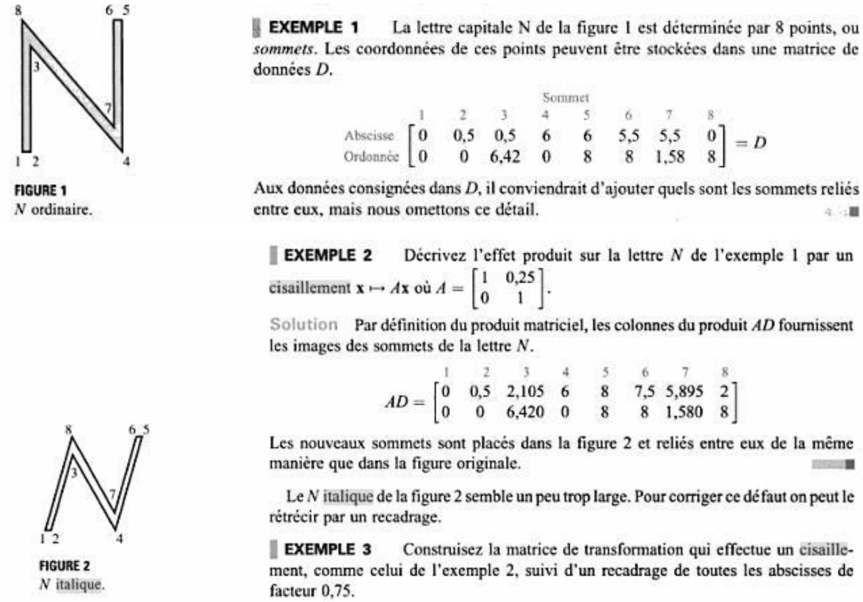


FIGURE 1
N ordinaire.

EXEMPLE 1 La lettre capitale N de la figure 1 est déterminée par 8 points, ou *sommets*. Les coordonnées de ces points peuvent être stockées dans une matrice de données D.

$$\begin{array}{r} \\ \\ \text{Abscisse} \\ \text{Ordonnée} \end{array} \begin{array}{c} \text{Sommet} \\ \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 6 & 6 & 5{,}5 & 5{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 6{,}42 & 0 & 8 & 8 & 1{,}58 & 8 \end{bmatrix} \end{array} = D$$

Aux données consignées dans D, il conviendrait d'ajouter quels sont les sommets reliés entre eux, mais nous omettons ce détail.

EXEMPLE 2 Décrivez l'effet produit sur la lettre N de l'exemple 1 par un cisaillement $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ où $A = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}25 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Solution Par définition du produit matriciel, les colonnes du produit AD fournissent les images des sommets de la lettre N.

$$AD = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0{,}5 & 2{,}105 & 6 & 8 & 7{,}5 & 5{,}895 & 2 \\ 0 & 0 & 6{,}420 & 0 & 8 & 8 & 1{,}580 & 8 \end{bmatrix} \end{array}$$

Les nouveaux sommets sont placés dans la figure 2 et reliés entre eux de la même manière que dans la figure originale.

Le N italique de la figure 2 semble un peu trop large. Pour corriger ce défaut on peut le rétrécir par un recadrage.

EXEMPLE 3 Construisez la matrice de transformation qui effectue un cisaillement, comme celui de l'exemple 2, suivi d'un recadrage de toutes les abscisses de facteur 0,75.

FIGURE 2
N italique.

Figure 6. Italique et cisaillement. (pp.158-159).

Qu'en est-il des ouvrages de préparation au concours de recrutement des professeurs ? Dans un document intitulé « Les application [*sic*] linéaires en géométrie », Marie-Françoise Roy (s.d.) traite précisément du passage en italique sur l'exemple d'une lettre L stylisée placée en l'origine, en l'illustrant par une figure et l'expression analytique de la transformation linéaire. Elle précise ensuite :

> Cette transformation est appelée en Mathématique une transvection horizontale. En Mécanique et Sciences de l'ingénieur, on parle aussi d'un cisaillement horizontal (d'après la terminologie anglo-saxonne : « horizontal shear »).

Ce document pointe des applications de la transvection dans d'autres disciplines. En fait, ce lien semble assez ténu, comme en témoigne cette page[4], traitant de la mécanique des fluides, où la transvection n'apparaît nulle part.

Dany-Jack Mercier (2012) propose un développement assez important consacré à la question du passage en italique dans le chapitre consacré aux courbes de Bézier. Le nom de la transformation à appliquer aux points de contrôle pour mettre un texte en italique fait l'objet d'une note en bas de page :

> En déplaçant en fait ces points d'autant plus qu'ils sont éloignés de la base de la lettre qui, elle, reste invariante. On dit que l'on applique un cisaillement, qui correspond à une affinité en mathématiques.

Il s'agit bien évidemment d'une coquille : il faut lire « transvection » au lieu d'« affinité ».

La comparaison des pages « Shear mapping »[5] sur Wikipedia et « Transvection »[6] sur Wikipédia est intéressante du point de vue de la didactique, car elle met en valeur les forces et faiblesses de la diffusion des mathématiques dans la tradition française dominante. Nous y reviendrons, mais citons quelques différences qui sautent aux yeux :

- L'article en anglais donne les autres noms de la transformation, parmi lesquels figure le mot « transvection ». L'article en français signale que l'article est à lire avec celui sur les dilatations (nom donné dans l'ouvrage de Bourbaki aux affinités), mais ne donne ni synonyme ni traduction.
- L'article en anglais donne une définition de la transformation en langage courant (trouvée sur le site Wolfram Web Resource), et l'illustre avec un exemple simple donné par une définition analytique élémentaire et accompagné par une figure montrant son effet sur un quadrillage et des formes variées (carré, forme de bord curviligne). L'article en français montre l'effet de la transformation sur une carte de France sur fond quadrillé, et passe directement aux transvections vectorielles en utilisant des noyaux et images d'endomorphismes : le niveau trophique s'élève très rapidement et fortement.

4. http://en.wikipedia.org/wiki/Simple_shear.
5. http://en.wikipedia.org/wiki/Shear_mapping.
6. http://fr.wikipedia.org/wiki/Transvection.

- L'article en anglais compare les propriétés d'une transvection plane et d'une rotation, et signale que la transvection est la principale différence entre le style droit et oblique (ou italique) des polices de caractères. Il traite en détail les transvections horizontale et verticale du plan $\mathbb{R}^2$ avant de passer très brièvement au cas général des transvections fixant un sous-espace W d'un espace vectoriel V. L'article en français est centré sur les définitions, propriétés caractéristiques et structurelles (groupe, sous-groupe) dans les secteurs « vectoriel », « matriciel », « affine », « projectif », « plan euclidien » et se termine par une « réalisation d'une transvection par perspective cavalière ».
- L'article en anglais propose des applications en mathématiques dont la démonstration du théorème de Pythagore avec des transvections (en renvoyant sur une animation faite sous Geogebra) et un algorithme permettant de faire subir une rotation d'une image digitale d'un angle arbitraire en utilisant successivement trois transvections, qui est très efficace car chaque pas n'agit que sur une ligne ou une colonne de pixels. L'article en français ne propose aucune application.
- L'angle d'une transvection et son lien avec le coefficient de la transvection sont précisés dans les deux articles. Quant à l'effet en matière d'angle sur les droites horizontales (ou verticales), il n'est traité que dans l'article en anglais.

Le mot *cisaillement* fait l'objet sur Wikipédia d'une page d'homonymie [7]. Concernant les mathématiques, la seule intervention du mot qui y figure renvoie au théorème de Pythagore. Quand on active le lien [8], on tombe sur un article que l'encyclopédie en ligne qualifie elle-même de « bon article », et deux occurrences du mot c*isaillement* y apparaissent, d'abord dans la démonstration du théorème par le puzzle de Gougu, où l'auteur précise :

> Cette preuve utilise le principe du puzzle : deux surfaces égales après découpage fini et recomposition ont même aire. Euclide, dans sa propriété de cisaillement, utilise le même principe.

puis dans les notes en bas de page, où l'auteur renvoie à la démonstration de la proposition XXXV du livre I des Éléments d'Euclide. Cette proposition

7. http://fr.wikipedia.org/wiki/Cisaillement.
8. http://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_de_Pythagore#D.C3.A9monstrations.

concerne des parallélogrammes construits sur la même base et entre les mêmes parallèles, et elle affirme qu'ils sont égaux, c'est-à-dire qu'ils ont même aire. On sait[9] que cette démonstration repose sur l'équicomplémentarité et non pas sur l'équidécomposabilité auquel l'auteur fait allusion dans la citation ci-dessus en évoquant une démonstration par découpage fini et recomposition. En revanche, dans la page d'homonymie relative au mot cisaillement[10], aucune allusion n'est faite à la transvection, et par ailleurs, la démonstration du théorème de Pythagore par les transvections ne figure pas dans le « bon article »[11].

Ces trois anecdotes portent sur des objets mathématiques (projections parallèles sur un plan, affinités du plan, transvections du plan, perspective cavalière, perspective parallèle – ou cylindrique –, perspective centrale – ou conique) qui concernent tous la géométrie et son enseignement, et à propos desquels la profession dans son ensemble rencontre des difficultés d'importance variable, mais incontestables. Quelles praxéologies mathématiques et didactiques sont indispensables ou simplement utiles dans la conception et l'accomplissement d'un projet d'enseignement dans un master de formation de professeurs de mathématiques du secondaire à l'université ? Pour répondre à cette question, enquêtons librement, en prenant la nécessaire distance avec les praxéologies actuellement dominantes en France qui, comme les anecdotes ci-dessus le prouvent, ne sont pas optimales. Cette enquête, en partant d'ouvrages français des années 40-50, va nous conduire dans des pays différents à des époques différentes, avec pour fil directeur le souci de répondre à la question posée.

2. Enquête en France et ailleurs sur l'articulation entre la géométrie affine plane et la géométrie dans l'espace

2.1. L'apport de Lebesgue

Commençons par le travail fait sur ce point par Henri Lebesgue avec ses élèves à l'École normale supérieure de Sèvres, tel qu'il est évoqué par

9. Voir par exemple A. Pressiat (2002).

10. Il en est de même dans tous les pages auxquelles renvoient les liens hypertextes de cette page.

11. Contrairement, comme on l'a vu précédemment, à la page de la version anglaise de l'encyclopédie consacrée à la transvection : http://en.wikipedia.org/wiki/Shear_mapping.

Lucienne Félix (1974), et qui a été publié dans le Manuscrit de Sèvres en 1941.

Dans l'introduction pour une leçon portant sur la géométrie projective, Lebesgue évoque Desargues :

> Desargues, proche des ouvriers, partait des travaux manuels. Le premier, il eut l'idée de trouver dans le travail des artisans une source d'étude profitable pour la Science.
>
> […] Desargues a pensé qu'il serait particulièrement intéressant au point de vue théorique de s'occuper de *la perspective d'une figure plane*. On voit l'originalité de cette idée car ce n'est précisément pas intéressant pour la représentation des figures […]
>
> Le théorème fondamental consiste à reconnaître si une correspondance ponctuelle entre deux plans est une perspective à un déplacement près.

Poursuivons par un ouvrage de référence publié un peu plus tard, en 1944, dont l'un des auteurs, Robert Deltheil [12], était professeur à l'université de Toulouse, et qui est paru dans la collection Albert Châtelet [13].

2.2. Les ouvrages de géométrie de Deltheil et Caire

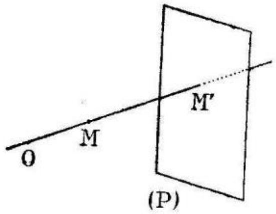
C'est dans le chapitre VI de leur ouvrage intitulé *Premiers éléments de géométrie projective plane* que Robert Deltheil et Daniel Caire (1944) évoquent les propriétés linéaires d'une figure plane et qu'ils introduisent le nom de la géométrie de ces propriétés linéaires : la *géométrie affine*. Le lecteur trouvera ci-dessous une vue d'ensemble des principaux titres de paragraphes, des extraits et commentaires dont certains passages sont mis en italique, sur lesquels son attention est attirée.

> Chapitre VI Premiers éléments de géométrie projective plane
>
> 26e leçon (p. 254-256)
>
> I. Projection centrale ou perspective
>
> I.1 Perspective d'un point

12. La page http://fr.wikipedia.org/wiki/Robert_Deltheil évoque sa vie, son œuvre et sa déportation, en 1944 précisément.

13. La page http://fr.wikipedia.org/wiki/Albert_Châtelet évoque sa vie et son œuvre, et particulièrement son engagement en faveur de « méthodes nouvelles » d'enseignement.

242. **Perspective d'un point.** — Étant donnés un plan (P) appelé *plan du tableau* et un point O, non situé dans ce plan et appelé ***point de vue**, on appelle **perspective** ou **projection centrale** d'un point M de l'espace le point M' où la droite OM perce le plan (P)* ; la droite OM est appelée ***projetante*** du point M (fig. 229).



La projection sur un plan (P) parallèlement à une direction donnée, ou ***projection cylindrique***, est un cas limite de la projection centrale, obtenu en supposant que le point de vue s'éloigne indéfiniment dans une direction donnée ; la projection est ***orthogonale*** lorsque la direction est perpendiculaire au plan (P).

Figure 7. Extrait du chapitre VI (Deltheil & Caire, 1944, p. 254).

Voici les titres des paragraphes suivants ainsi qu'un extrait :

I.2 Perspective d'une droite

I.3 Perspective d'une figure plane

1.4 Notion de droite à l'infini d'un plan

II. Propriétés projectives des figures planes.

II.1 Propriétés linéaires

Nous appellerons *propriété linéaire d'une figure plane (F) toute propriété de (F) appartenant aussi à une projection cylindrique quelconque de cette figure.*

Les auteurs citent comme exemples de propriétés linéaires : l'alignement de trois points ; le contact de deux courbes ; le parallélisme de deux droites ; l'égalité de deux segments alignés. Et ils pointent que des propriétés très simples, comme le fait pour un triangle d'être rectangle ou isocèle, ne sont pas linéaires, alors qu'elles sont conservées par déplacement ou similitude. C'est alors qu'ils donnent le nom de la *géométrie des propriétés linéaires :* ***Géométrie affine***, au sujet de laquelle ils déclarent : « Nous préciserons plus loin le sens de cette dernière dénomination. »

II. 2 Propriétés projectives au sens général

Nous appellerons *propriété projective d'une figure plane (F) toute propriété de (F) appartenant aussi à une projection centrale quelconque de cette figure.*

[…]

La géométrie des propriétés projectives est appelée Géométrie projective.

28e leçon : Figures homographiques du plan (pp. 270-272)

Théorème :

Les perspectives sur un même plan du tableau d’une même figure plane vue de deux points différents de l’espace sont deux figures homologiques.

[…]

Réciproquement, toute homologie peut, d’une infinité de manières, être décomposée en un produit de deux perspectives.

Définition d’une homologie d’axe (Δ) et de centre O.

Deux figures (F) et (F’) se correspondent dans cette homologie lorsqu’on peut associer à tout point M de (F) un point M’ de (F’) de telle sorte que :

1° La droite MM’ passe par O

2° Les deux droites joignant deux points M et P et leurs homologues M’ et P’ se coupent sur la droite (Δ).

[…]

Lorsque l’axe (Δ) est rejeté à l’infini, O restant à distance finie : l’homologie est une *homothétie de centre O*.

Lorsque l’axe (Δ) est rejeté à l’infini ainsi que le point O, l’homologie est *une translation*.

Lorsque l’axe (Δ) reste à distance finie, et O est rejeté à l’infini dans une direction non parallèle à (Δ) : l’homologie est une affinité d’axe (Δ), et de rapport *k*.

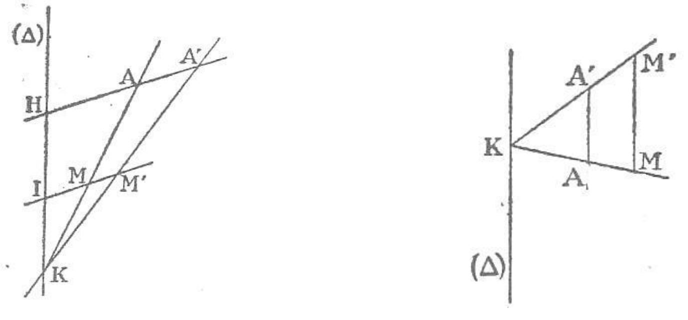


Figure 8. Figures extraites du chapitre VI (Deltheil & Caire, 1944, pp. 270-271).
À gauche : affinité d’axe (Δ) ; à droite : transformation non nommée.

[…]

En s’intéressant aux cas particuliers, on en déduit que toute affinité peut être envisagée comme le produit de deux projections cylindriques.

Il en résulte que toute propriété linéaire est conservée par affinité, et ainsi se trouve justifiée l’expression de ***Géométrie affine*** *pour désigner la géométrie des propriétés linéaires.*

On notera que lorsque l'axe (Δ) reste à distance finie et que O est le point à l'infini de (Δ), le nom de l'homologie n'est pas donné ; c'est une transvection d'axe (Δ). Ce cas est illustré dans la figure 8, à droite.

Dans leur ouvrage de 1951, Compléments de géométrie – Géométrie métrique, Géométrie projective, Géométrie anallagmatique, Classes de préparation aux Grandes Écoles, Concours de l'enseignement, on trouve le même théorème de décomposition des homologies, avec un complément :

> Si on choisit convenablement un des deux centres de perspective à l'infini :
> Toute homologie peut être décomposée, d'une infinité de manières, en le produit d'un déplacement de l'espace (rotation) et d'une perspective.
> Comme cas particulier, on en déduit que :
> *Toute affinité dans le plan peut, mais de deux manières seulement, être décomposée en le produit d'une rotation de l'espace et d'une projection cylindrique.*

Puis, ils établissent le résultat annoncé par Lebesgue, qu'ils reformulent ainsi :

> Étant donné deux figures homographiques (F) et (F') d'un même plan, on peut toujours déplacer (F) dans l'espace de manière à la mettre en perspective avec (F').

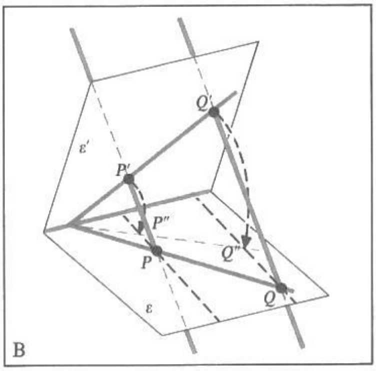
L'homographie, dont on ne parlera pas ici, est la transformation fondamentale de la géométrie projective.

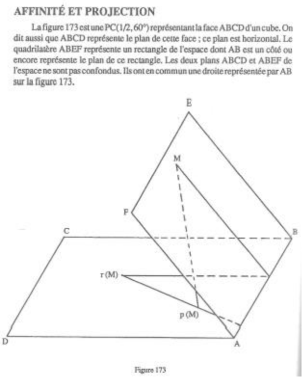
2.3. Construction d'une affinité plane dans l'espace euclidien

L'affinité considérée comme la composée d'une projection sur un plan parallèlement à une droite (projection parallèle ou encore cylindrique) et d'une rotation fait l'objet d'un développement dans deux ouvrages : l'*Atlas de mathématiques* déjà cité (Reinhardt & Soeder, 1997) et l'ouvrage de Gérard Audibert (1990) sur la perspective cavalière.

La lecture de la figure extraite de l'*Atlas* (figure 9, ci-dessous à gauche) est facile : on voit que l'affinité est la composée de la projection du plan ε sur le plan ε' (transformant P et Q en P' et Q') suivie d'une rotation (transformant P' et Q' en P'' et Q'').

Dans l'ouvrage d'Audibert, dont la figure 9 montre dans sa partie droite la figure construite par l'auteur, la composition est faite dans l'ordre inverse : *p* désignant la projection sur le plan horizontal parallèlement à une droite Δ, qui n’est parallèle à aucun des deux plans ABCD et ABEF, r désignant la rotation d’axe (AB) et d’angle 50°, la composée de r^{-1} suivie de p fait correspondre au point r(M) le point p(M). Si les deux points r(M) et p(M) sont distincts, et définissent une droite non parallèle à (AB), alors cette composée est une affinité du plan ABCD, d’axe (AB) [14].




AFFINITÉ ET PROJECTION

La figure 173 est une PC(1/2, 60°) représentant la face ABCD d'un cube. On dit aussi que ABCD représente le plan de cette face ; ce plan est horizontal. Le quadrilatère ABEF représente un rectangle de l'espace dont AB est un côté ou encore représente le plan de ce rectangle. Les deux plans ABCD et ABEF de l'espace ne sont pas confondus. Ils ont en commun une droite représentée par AB sur la figure 173.

Figure 9. À gauche, figure tirée de l’*Atlas* (p. 160) ; à droite, extrait de l’ouvrage d’Audibert, 1990).

Dans ces deux ouvrages, l’affinité dans le plan n’est pas coupée de sa raison d’être qui, comme on l’a vu, concerne la géométrie dans l’espace. Ce résultat permet de comprendre pourquoi la représentation d’un cercle dans une perspective cylindrique (et en particulier, cavalière) est une ellipse, sans avoir besoin d’un traitement analytique.

2.4. Une autre approche de la géométrie affine : la conservation des parallélogrammes

La période de l’après-guerre est riche en ouvrages de haute vulgarisation : dans un ouvrage de 1947 dont le titre *La mathématique et son unité* annonce la période des mathématiques modernes, Georges Bouligand et Jean Desbats font une présentation de la géométrie affine qui apporte du nouveau. Elle commence en mettant comme précédemment en avant les propriétés conservées par projection cylindrique :

> Le théorème de Thalès se démontre sans faire intervenir la notion de [droite]s perpendiculaires. Il a d’ailleurs cela en commun avec les autres théorèmes de

14. S’ils définissent une droite parallèle à (AB), la composée est une transvection d’axe (AB). Ce cas est également traité dans l’ouvrage.

> la géométrie plane dont l'énoncé se conserve par projection cylindrique (dont la projection orthogonale est un cas particulier). On peut faire de ces différentes propositions une synthèse où la notion d'angle droit aussi bien que celle de mesure d'angle, n'interviennent pas. Le système ainsi constitué détient d'ailleurs, comme on peut le montrer, l'autonomie logique. Il constitue la *géométrie linéaire*, à laquelle appartient la théorie des diamètres des coniques.
>
> […]
>
> [Dans cette géométrie, les transformations les plus intéressantes sont] les *transformations linéaires*, qui à chaque point M font correspondre un point M1 de telle manière que tout parallélogramme, dont les sommets sont quatre positions de M, se transforme en un nouveau parallélogramme, dont les sommets sont les quatre positions correspondantes de M1.

Le vocabulaire a vieilli (il convient de remplacer « linéaire » par « affine »), mais pas les idées ! On constate que la présentation des transformations affines est nouvelle par rapport à celles des paragraphes 2.2 et 2.3. Elle ne fait allusion ni à la géométrie dans l'espace ni aux projections, et on peut s'étonner du manque de diffusion d'une définition aussi simple (équivalente à la conservation, encore plus simple, des milieux). La raison tient dans le résultat suivant : on peut montrer qu'une telle transformation est $\mathbb{Q}$-affine, mais il faut ajouter une autre propriété (comme la continuité) pour obtenir une caractérisation des transformations $\mathbb{R}$-affines [15].

Pourtant, cette idée est exploitée de manière didactique dans certains manuels scolaires. Le lecteur aura deviné qu'il convient pour cela de quitter la France. Partons pour l'Allemagne !

2.5. Les transformations affines dans un manuel allemand des années 1970

Le manuel de Joachim Köhler, Rolf Höwelmann et Hardt Krämer (1975) est emblématique de l'enseignement en lycée (Gymnasium) en Allemagne durant la période des mathématiques modernes.

15. Pour fabriquer une application $\mathbb{Q}$-affine qui ne soit pas $\mathbb{R}$-affine, les procédés élémentaires sont insuffisants : on peut le faire avec l'axiome du choix…

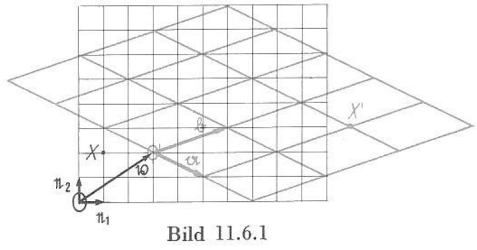


Figure 10. À gauche, couverture du manuel ; à droite, figure illustrant la définition d'une transformation affine.

La figure illustrant la définition d'une transformation affine (voir figure 10, à droite) surprend un lecteur assujetti aux institutions françaises d'enseignement des mathématiques. On y voit apparaître un réseau à maille carrée, alors qu'on traite de la géométrie affine, ce qui y est inconcevable, car on n'y mélange surtout pas l'« affine » avec l'« euclidien ». La définition elle-même emploie des ostensifs n'ayant pas cours en France, comme les vecteurs-positions[16]. Le plan est pointé en O, et à tout point X est associé son vecteur-position OX noté avec la lettre « r » écrite en gothique : $\mathfrak{r}$, x_1 et x_2 désignent les coordonnées du point X dans le repère orthonormé associé au réseau quadrillé en noir. Le vecteur-position $\mathfrak{r}'$ de l'image du point X par une transformation affine est donné par les formules suivantes :

$$\mathfrak{x}' = x_1\mathfrak{a} + x_2\mathfrak{b} + \mathfrak{v}\,, \qquad \begin{aligned} x_1' &= x_1 a_1 + x_2 b_1 + v_1 \\ x_2' &= x_1 a_2 + x_2 b_2 + v_2\,. \end{aligned}$$

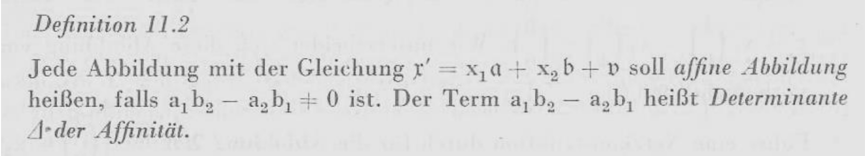
Figure 11. Formules exprimant l'image du point X de coordonnées (x_1, x_2).

On voit sur la figure 10 le vecteur-position $\mathfrak{v}$ du point V de coordonnées (v_1, v_2)[17], et un réseau ayant pour maille le parallélogramme construit sur les

16. À leur sujet, je renvoie à ma thèse (Pressiat, 1999).

17. Sur la figure (v_1, v_2) = (3, 2) ; (a_1, a_2) = (2, –1) ; (b_1, b_2) = (3, 1).

vecteurs $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ de coordonnées respectives (a_1, a_2) et (b_1, b_2). Voici la définition :



Definition 11.2
Jede Abbildung mit der Gleichung $\mathfrak{x}' = x_1\mathfrak{a} + x_2\mathfrak{b} + \mathfrak{v}$ soll *affine Abbildung* heißen, falls $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$ ist. Der Term $a_1 b_2 - a_2 b_1$ heißt *Determinante* Δ *der Affinität.*

Figure 12. Définition d'une transformation affine.

Sont ensuite traitées en détail les transformations affines laissant une droite invariante point par point (Abbildungen mit einer Fixpunktgeraden : Achsaffinitäten) : les affinités (Schrägaffinitäten), les transvections (Scherung) et les symétries obliques (Schrägspiegelung), les deux dernières conservant les aires.

Le schéma ci-dessous (figure 13) concerne une transvection d'axe Ox_1 et donne une interprétation géométrique du coefficient b_1 qui apparaît dans la matrice de sa « partie linéaire » : $\begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. b_1 est la tangente de l'angle φ.

On pourra comparer cette figure avec celle figurant dans la page française Wikipédia consacrée à la transvection euclidienne.

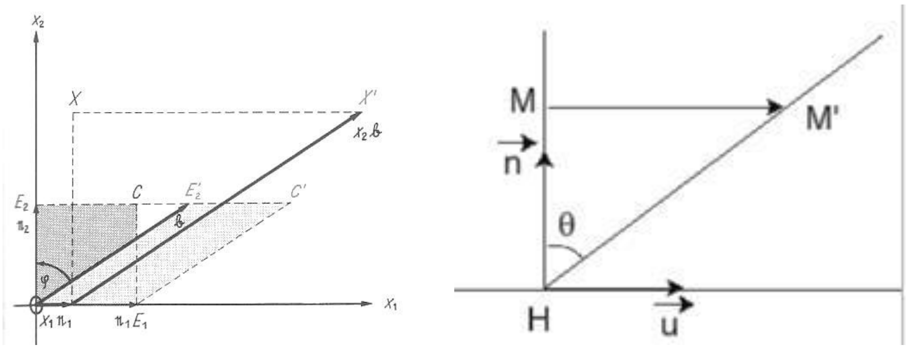


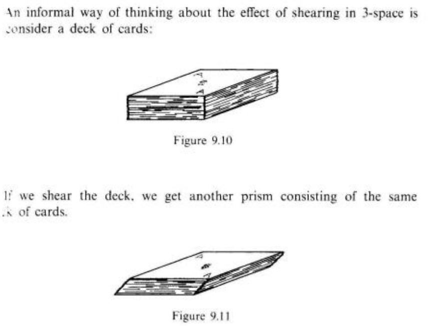
Figure 13. À gauche, illustration d'une transvection d'axe OX_1, de coefficient b_1 et d'angle φ dans l'ouvrage allemand. À droite, illustration dans la page Internet [18].

2.6. Retour sur les présentations de la transvection

Comment présenter la transvection quand on ne dispose plus, comme précédemment, d'une référence euclidienne ?

18. http://fr.wikipedia.org/wiki/Transvection.

On peut retourner dans le monde concret en parlant d'un jeu de cartes que l'on penche (technique didactique qui permet par exemple de « montrer » que les volumes d'un prisme oblique et d'un prisme droit de même hauteur sont les mêmes) comme le font Serge Lang et Gene Murrow (1997) à propos des transvections de l'espace, ou Marie-France Roy (s.d.), déjà citée, qui illustre une transvection plane avec un tel jeu de cartes vu sur la tranche (voir figure 14).



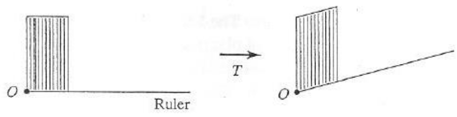


Figure 14. Illustrations de la transvection : Lang-Murrow à gauche, M.-F. Roy à droite.

On peut aussi, et c'est le cas qui semble le plus fréquent en France, maintenir coûte que coûte l'autonomie logique en se plaçant dans le cadre théorique le plus général, comme dans l'exemple de définition ci-dessous, dont on trouve des variantes dans de très nombreux ouvrages :

> Transvections affines
>
> Soit f une forme affine sur A telle que $H = f^{-1}(0)$. On appelle transvection de A d'hyperplan H, toute application t de A dans A de la forme suivante, où h appartenant à $\overrightarrow{H}\backslash 0$ est fixé.
>
> $$t(M) = M + f(M)h,\ M \in A.$$

Pour ses besoins de professeur de collège, on comprend alors qu'un professeur stagiaire ne cherche guère de ressources de ce côté-là, et ses collègues plus expérimentés sans doute pas davantage. Cette définition a une sécheresse et une élégance glacée qui séduit et effraie en même temps, provoquant un effet comparable à celui de l'illustration suivante d'un homme qui court…

Figure 15. Pop-Art Poster « Running Stan », trouvé sur le site [19], page 176 du catalogue.

Cette définition de la transvection est un exemple typique pour illustrer les propos d'Yves Chevallard (1998) concernant la formation première des professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire français.

> Le repliement des formations mathématiques universitaires sur des thématiques fermées et autosuffisantes fait que la notion de *besoins mathématiques* n'y a guère sa place.
>
> […]
>
> Avec toute la tradition mathématique, les formations universitaires privilégient la dimension *théorique* de l'activité mathématique, dimension coextensive à l'effort, hyperlégitime et fondateur, pour réduire toute organisation mathématique à une ossature hypothético-déductive que l'activité démonstrative semble seule capable de créer. En conséquence, la dimension *expérimentale* de l'étude des organisations mathématiques y est fondamentalement oubliée, quand elle n'apparaît pas entièrement illégitime.
>
> […]
>
> Ajoutons que la formation reçue n'est, paradoxalement, guère plus adéquate en ce qui concerne la dimension *théorique* de l'activité mathématique. La présentation, par nature plus ou moins dogmatique, d'organisations mathématiques « clés en main », impeccables au plan théorique mais à l'élaboration desquelles les étudiants n'ont été en aucune façon associés, habitue le futur professeur à de hautes exigences en matière de « finition »

19. http://www.3bscientific.fr/medialibrary/downloads/Medecine_FR.pdf.

théorique, sans lui donner pour autant la capacité de mener à bien une telle élaboration théorique des organisations mathématiques dont il aura à diriger l'étude au collège ou au lycée.

2.7. Autres transformations dans le manuel allemand

Retournons au manuel allemand, qui donne un exemple de transformation affine laissant globalement invariantes deux droites sécantes, appelée « affinités d'Euler » (Euler Affinitäten), peu souvent traitée en France :

$$\mathfrak{x}' = x_1 \begin{pmatrix} k_1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ k_2 \end{pmatrix} .$$

Diese Affinitäten, zu denen für $k_1 = 1$ bzw. $k_2 = 1$ auch die sogenannten *Normalaffinitäten* zur x_2- bzw. x_1-Achse gehören (Dehnungen parallel zur x_2- bzw. x_1-Achse), nennt man *Eulersche Affinitäten*.

Figure 16. Extrait du manuel allemand déjà cité (Köhler, Höwelmann & Krämer, 1975).

Ces transformations sont introduites dans le fameux *Introductio in analysin infinitorum* d'Euler (1748), dans le chapitre XVIII du livre II (pp. 236-247). Cette œuvre a été traduite en français en 1835 (Euler, 1835) et on trouve cette traduction en libre accès sur Internet. Voici l'extrait où Euler introduit l'affinité :

442. Dans les courbes ſemblables les abſciſſes & les appliquées homologues croiſſent ou diminuent dans le même rapport ; mais, ſi les abſciſſes ſuivent un rapport quelconque, & les appliquées un autre, les courbes ne ſeront plus ſemblables. Cependant, à cauſe de l'eſpèce d'analogie qu'on remarque dans les courbes, qu'on obtient de cette manière, on dira qu'elles ont entre elles de l'*affinité*. Ainſi l'affinité comprend ſous elle la ſimilitude, comme eſpèce ; car les courbes qui ont de l'affinité deviennent ſemblables, lorſque les rapports différens, que les abſciſſes & les appliquées ont entre elles en particulier, deviennent égaux.
Pl. IX. Fig. 88. & 89. Ainſi une courbe quelconque *AMB* étant donnée, on en trouvera autant qu'on voudra *amb*, qui auront de l'affinité avec la première en procédant de la manière ſuivante. On prendra l'abſciſſe *ap*, de ſorte qu'on ait *AP* : *ap* :: 1 : *m* ; enſuite on élevera l'appliquée *pm*, de façon que

Figure 17. Extrait où figure la première occurrence du mot « affinité » (Euler, 1835).

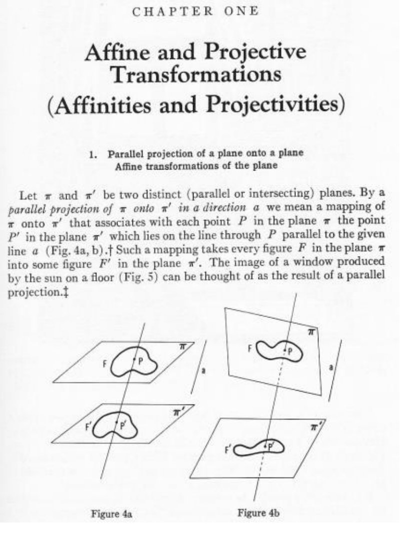
Puis les auteurs passent aux transformations projectives, transformations qui n'étaient pas enseignées en France à la même époque, partie que nous n'aborderons pas ici. Suivent des considérations sur le programme d'Erlangen de Félix Klein, l'importance des groupes de transformations, et leur lien avec les propriétés conservées dans chacune des géométries.

Mais nulle part il n'a été question de la projection cylindrique (ou parallèle), si ce n'est pour dire qu'elle transforme bijectivement les points d'un plan sur un autre, avant de débuter l'étude des transformations affines.

Tel n'est pas le cas chez l'auteur russe Isaac Moisevitch Yaglom [20] (1921-1988), qui a travaillé à l'Institut pédagogique de Moscou de 1957 à 1968 et exercé une influence considérable en URSS et aux États-Unis où ses ouvrages ont été traduits.

2.8. Les ouvrages de Yaglom sur les transformations

Yaglom a écrit trois livres sur les transformations géométriques dont le contenu est très original en regard des ouvrages classiques sur le même sujet en France. Celui qui nous intéresse ici est le troisième, consacré aux transformations affines et projectives. Voici les premières pages du chapitre I, qui évoquent la projection parallèle d'un plan sur un autre, cette dernière étant illustrée par l'ombre d'une fenêtre au soleil (figure 18) :



CHAPTER ONE

Affine and Projective Transformations (Affinities and Projectivities)

1. Parallel projection of a plane onto a plane
Affine transformations of the plane

Let π and π' be two distinct (parallel or intersecting) planes. By a *parallel projection of* π *onto* π' *in a direction* a we mean a mapping of π onto π' that associates with each point P in the plane π the point P' in the plane π' which lies on the line through P parallel to the given line a (Fig. 4a, b).† Such a mapping takes every figure F in the plane π into some figure F' in the plane π'. The image of a window produced by the sun on a floor (Fig. 5) can be thought of as the result of a parallel projection.‡

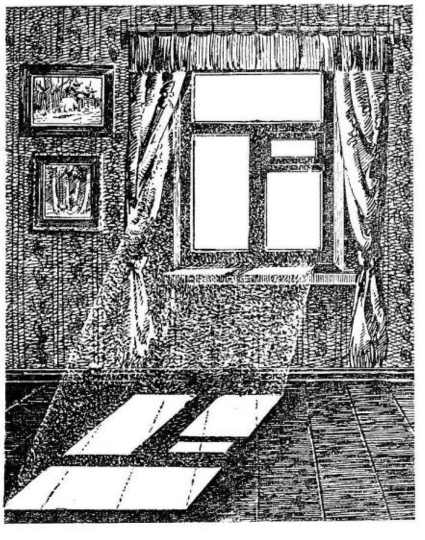


Figure 18. Début du chapitre I du Livre III de Yaglom sur les transformations (1973, pp. 9-10).

Le premier théorème met en relation d'une manière très simple (la démonstration comporte moins de quatre lignes) deux triangles de l'espace au moyen d'une projection parallèle et d'une similitude (voir figure 19).

20. Voir la page http://en.wikipedia.org/wiki/Isaak_Yaglom.

THEOREM 1. *Let A, B, C be three non-collinear points in a plane π, and let M, N, P be three non-collinear points in a plane π'. Then the planes π and π' can be so placed in space that there exists a parallel projection of π onto π' which maps $\triangle ABC$ onto a triangle $A'B'C'$ similar to $\triangle MNP$.*

We place the given planes π and π' so that they intersect along the line AB. Now we choose in the plane π' a point C' such that $\triangle ABC' \sim \triangle MNP$. Then the required parallel projection is determined by the line CC' (Fig. 10).

Figure 10

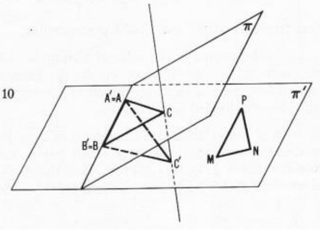


Figure 19. Extrait du Livre III de Yaglom sur les transformations (1973, p 13).

Ce mélange aurait eu en France un goût bizarre, puisque les similitudes appartenaient au secteur de la géométrie euclidienne plane, et les projections parallèles au secteur de la géométrie affine de l'espace, ce dernier étant coupé du précédent (et considéré comme « fermé et auto-suffisant »). Mais un lecteur français de l'époque n'aurait pas été au bout de ses surprises, comme le montre la reproduction des paragraphes qui suivent ce théorème (voir figure 20).

We shall now consider a transformation of a plane π onto itself which results when π is moved about in space and subsequently mapped onto its original position by a parallel projection. We shall call such a transformation a *parallel projection of the plane onto itself*. Every isometry is a special case of such a transformation of the plane; a parallel projection of the plane onto itself is an isometry provided the plane's new position in space is parallel to its original position.

Property A of a parallel projection implies that *under a parallel projection of a plane onto itself lines go over into lines*. A one-to-one transformation of a plane onto itself that takes lines into lines will be called an *affinity*. Isometries and similarities of a plane are the simplest examples of affinities. A parallel projection of a plane onto itself is a more general affinity than isometries and similarities, since it need not preserve ratios of lengths of segments and thus, in general, alters the shape of a figure.

It turns out that *every* affinity of a plane is essentially a parallel projection of the plane onto itself. In fact, the following theorem holds:

THEOREM 2. *Every affinity of a plane can be realized by means of a parallel projection of the plane onto itself followed by a similarity.*

This theorem shows that the study of properties of affine transformations is synonymous with the study of properties common to parallel projections of a plane onto itself and similarities;† in particular it implies that affinities of a plane have properties B, C, and D (cf. pp. 17–18), as these are shared by parallel projections of a plane onto itself and similarities. Theorem 2 also clarifies the nature of the product of two or more parallel projections of a plane onto itself; namely, it shows that such a product is again a parallel projection of the plane onto itself, followed, possibly, by a similarity (for such a product is, clearly, an affinity of the plane).

Figure 20. Projection parallèle d'un plan sur lui-même et définition d'une *affinity* dans le Livre III de Yaglom sur les transformations (1973, p. 18).

Le premier paragraphe explique le moyen d'obtenir une projection d'un plan π sur lui-même : ce plan est déplacé dans l'espace, et ensuite appliqué sur sa position initiale par une projection parallèle. On devine qu'une telle définition aurait eu du mal à se faire accepter en France dans la période des mathématiques modernes. En référence aux quatre dimensions[21] évoquées par Y. Chevallard (1998, p. 3), on ne se situe pas ici dans la dimension de la théorie, mais plutôt dans la dimension pratique ou expérimentale.

En outre, on ne rompt pas avec les transformations étudiées antérieurement dans les livres I et II de Yaglom. Ainsi, les isométries, étudiées dans le livre I, apparaissent comme un cas particulier de projection parallèle d'un plan sur lui-même : il suffit pour cela de déplacer le plan π parallèlement à lui-même.

Vient ensuite la définition d'une *affinity*, qui correspond à ce que nous appellerions une transformation affine (elle est bijective et affine, transformant les droites en droites). Les similitudes, comme les isométries, apparaissent comme des cas particuliers de transformations plus générales, qui ne conservent pas nécessairement les rapports de longueurs des segments, et qui altèrent donc les formes.

Pourtant, toute transformation affine du plan π n'est pas autre chose, à une similitude près, qu'une projection parallèle d'un plan sur lui-même. C'est ce qu'énonce le théorème 2[22]. Un tel exposé aurait été inaudible en France, toujours par souci de maintenir l'autonomie logique de l'affine par rapport à l'euclidien et par volonté de donner des preuves rigoureuses. Les responsables des programmes ont choisi de privilégier la dimension formelle ou mathématique au sens strict, ce qui a poussé les auteurs de manuels à rester dans cette dimension confortable pour eux, sans prendre en compte la dimension pratique ou expérimentale que les professeurs et leurs élèves auraient sans doute aimé investir. Interrogés sur l'origine de la perspective cavalière, peu nombreux sont aujourd'hui encore les professeurs en

21. Dimension pratique, dimension expérimentale, dimension théorique, dimension formelle ou mathématique au sens strict.

22. Ce théorème 2 est une conséquence du théorème 1 et du théorème montrant qu'une transformation affine est déterminée par les images de trois points non alignés, théorème dont la démonstration repose sur la conservation des parallélogrammes, l'auteur assumant le caractère non rigoureux de sa preuve et renvoyant à Coxeter (1961) pour une véritable preuve.

formation qui évoquent les ombres d'un objet au soleil, et ce constat ne valorise pas la manière dont on la leur a enseignée.

Yaglom poursuit par l'étude des transformations projectives, qu'il conduit de la même manière, et commence par les illustrer par l'ombre dans la rue d'une fenêtre d'une pièce fortement éclairée, phénomène dont tout le monde a fait l'expérience (voir figure 21). On ne traitera pas ici les transformations projectives.

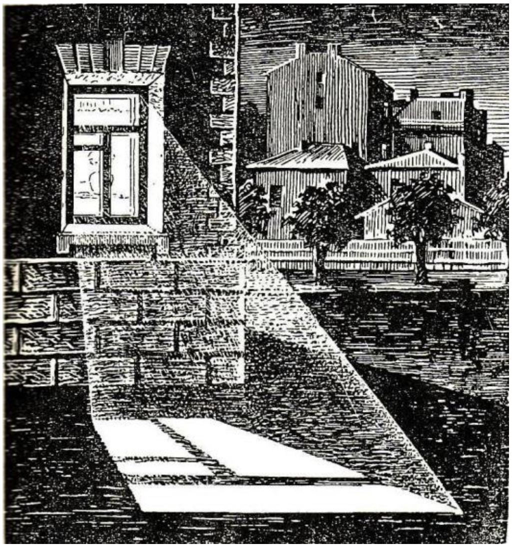


Figure 21. Illustration d'une transformation projective dans Yaglom (1973, p. 21).

Le point de vue original de Yaglom a inspiré de nombreux auteurs, par exemple ceux d'un ouvrage publié en 1999 au Royaume-Uni.

2.9. Un détour par un ouvrage publié par Cambridge University Press

L'ouvrage en question, dû à David A. Brannan, Matthew F. Esplen et Jeremy J. Gray (1999), a pour titre *Geometry*. Les auteurs, comme Yaglom, veulent montrer le lien entre transformations affines et projections parallèles, mais adoptent un point de vue analytique pour les démonstrations, ce qui les simplifie considérablement. Les copies de quelques pages de l'ouvrage (voir figures 22-25) permettent de suivre leur cheminement vers le théorème énonçant qu'une transformation affine est la composée de deux projections parallèles.

2.2 Affine Transformations and Parallel Projections

2.2.1 Affine Transformations

In Section 2.1 you met a new approach to Euclidean geometry in $\mathbb{R}^2$ – namely, the idea that Euclidean geometry of $\mathbb{R}^2$ can be interpreted as a set, $\mathbb{R}^2$, together with the group of Euclidean transformations which act on that set. Recall that a Euclidean transformation is a function $t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ of the form

$$t(\mathbf{x}) = \mathbf{U}\mathbf{x} + \mathbf{a} \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2).$$

where $\mathbf{U}$ is an orthogonal 2×2 matrix. Euclidean properties of figures are those, like distance and angle, that are preserved by these transformations.

In this section we meet the first of our new geometries in $\mathbb{R}^2$ – *affine geometry*. This geometry consists of the set $\mathbb{R}^2$ together with a group of transformations, the *affine transformations*, acting on $\mathbb{R}^2$.

Affine geometry can be defined in $\mathbb{R}^n$, for any $n \geq 2$; we restrict our attention here to the case when $n = 2$.

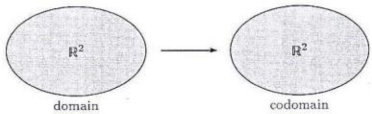
Definition An **affine transformation** of $\mathbb{R}^2$ is a function $t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ of the form

$$t(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b},$$

where $\mathbf{A}$ is an invertible 2×2 matrix and $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$. The set of all affine transformations of $\mathbb{R}^2$ is denoted by $A(2)$.

2.2.2 Parallel Projections

A *parallel projection* is a one–one mapping from $\mathbb{R}^2$ onto itself, defined in the following way. First, we think of its domain and codomain as two separate copies of $\mathbb{R}^2$.



Geometrically, we can represent these copies of $\mathbb{R}^2$ by two separate planes, each equipped with a pair of rectangular axes.

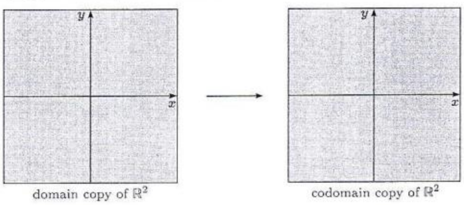


Figure 22. Copies partielles des pages 53 et 55 de l'ouvrage de D. A. Brannan, M. F. Esplen et J. J. Gray (1999).

Next we place these planes into three-dimensional space; we denote the domain plane by π_1 and the codomain plane by π_2.

Now imagine parallel rays of light shining through π_1 and π_2. Each point P in the plane π_1 has a (unique) ray passing through it, that also passes through a point P', say, in the plane π_2. This provides us with a one–one correspondence between points in the two planes π_1 and π_2. We call the function p which maps each point P in π_1 to the corresponding point P' in π_2 a **parallel projection from π_1 onto π_2**.

Of course, since π_1 and π_2 represent copies of $\mathbb{R}^2$, a parallel projection is really a function from $\mathbb{R}^2$ onto itself. In Subsection 2.2.3 we show that parallel projections are affine transformations.

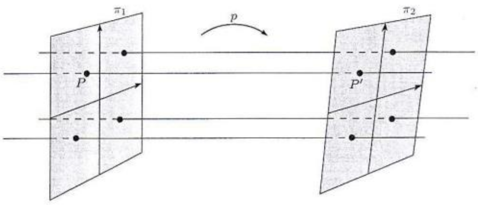
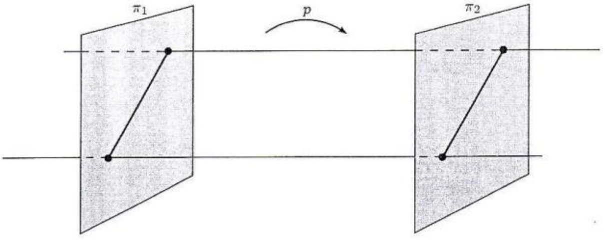


Figure 23. Copie partielle de la page 56.

Les auteurs sont en train de mathématiser la notion de projection parallèle d'un plan sur un autre, plus facile à accepter que la présentation plus expérimentale de projection parallèle d'un plan sur lui-même de Yaglom. Une telle élaboration était interdite par les programmes en France, qui ne considéraient que les transformations affines du plan dans lui-même ou de l'espace dans lui-même.

If the planes π_1 and π_2 are parallel to each other, then any parallel projection p from π_1 onto π_2 is an isometry, since the distance between any two points is unaltered.



You can envisage the mapping p from π_1 onto π_2 as 'sliding π_1 parallel to itself along the family of rays'.

Figure 24. Copie partielle de la page 56.

Comme dans Yaglom, ce « nouveau » ne rompt pas avec l'« ancien », qui retrouve une place… alors qu'en France on a imposé une rupture entre l'affine et l'euclidien dès la dimension 1 au collège, sans discussion sur la pertinence d'un tel acte.

Les auteurs montrent ensuite que toute projection parallèle est une transformation affine, remarquent que la réciproque est fausse, et démontrent enfin le théorème visé[23] :

Theorem 6 An affine transformation can be expressed as the composite of two parallel projections.

An important consequence of this theorem is that all properties of figures that are unchanged by parallel projections must also be unchanged by affine transformations. In particular, the three properties of parallel projections that we met in Subsection 2.2.2 must, in fact, be affine properties.

Figure 25. Copie partielle de la page 65.

Ainsi les auteurs se servent-ils des projections parallèles pour démontrer les propriétés conservées par une transformation affine, comme l'avaient fait R. Deltheil et D. Caire (1944).

23. Par une méthode à la fois géométrique et analytique, que l'on ne détaillera pas ici.

2.10. Et en France ?

On trouve en ligne de nombreux cours sur la géométrie affine qui sont coupés presque complètement de la géométrie du collège ou du lycée, et où les relations entre les abstractions mathématiques qui y figurent et la réalité qui leur a donné naissance ne sont pas discutées, ni même abordées. Ces cours sont dans la ligne évoquée plus haut.

Il y a au moins une exception : l'ouvrage de Frédéric Pham et Hervé Dillinger, *Algèbre linéaire*, publié en 1996.

> La *perspective cavalière* (ou *perspective parallèle*) est une idéalisation de la vision au téléobjectif (photographie prise d'infiniment loin, avec un téléobjectif infiniment puissant) : elle associe à toute figure de l'espace à trois dimensions sa projection sur le plan de l'image, parallèlement à une direction transverse à ce plan. Contrairement à la perspective usuelle (dite perspective centrale), où deux droites parallèles ont en général pour images des droites concourantes, la perspective cavalière conserve la propriété du parallélisme. (Pham & Dillinger, 1996, p. 32).

F. Pham et H. Dillinger citent des extraits de l'ouvrage de Philippe Colmar, *La perspective en jeu. Les dessous de l'image*, publié dans la collection Découvertes Gallimard Sciences en 1992.

> Abandonner la proie pour l'ombre
>
> Pour s'en tenir au seul domaine de la géométrie, on sait qu'une ombre ne transpose pas un objet sans en altérer la forme. L'ombre que fait une grille sur le sol varie selon la position du soleil. Le quadrillage se raccourcit ou s'étire, les angles se modifient, mais toutes les lignes parallèles dans la grille restent toujours parallèles dans l'ombre. Le mathématicien nomme cette relation une « affinité ».
>
> À l'inverse d'un simple agrandissement ou d'une réduction, cette transformation ne conserve pas les proportions internes des objets, car les formes tantôt se dilatent, selon un axe privilégié, comme notre ombre qui, au coucher du soleil, s'allonge démesurément sans pour autant s'élargir. (Colmar, 1992, pp. 18-19).
>
> […]
>
> À l'inverse de la perspective centrale, la « perspective parallèle » est sans point de fuite, donc sans horizon.

> Les choses sont représentées comme si l'observateur était infiniment éloigné de l'objet qu'il regarde. Rejeté à cette distance infinie, l'œil de ce spectateur céleste ne verrait jamais les droites parallèles converger entre elles. Ce point de vue offre pour le géomètre, l'architecte ou l'ingénieur, l'immense avantage de conserver dans l'image la mesure des choses selon des échelles déterminées pour chacune des directions de l'espace. (Colmar, 1992, p. 56).

Le paragraphe en dessous de la ligne en pointillés nous permet de pointer la faiblesse annoncée dans le document du ministère reproduit en figure 4. Dans une perspective cavalière, il n'y a pas de point de fuite et donc pas d'horizon ! Les auteurs du document se sont laissés emporter par la force de leur logiciel, spécialement adapté à la perspective centrale, et ne l'ont pas maîtrisé pour illustrer la perspective cavalière, dont ils ont une connaissance « folklorique », comme en témoigne leur choix de coefficient de réduction des fuyantes dont on reparlera plus loin.

Après plusieurs (longues) citations de l'ouvrage de P. Colmar, F. Pham et H. Dillinger font cette remarque :

> On peut résumer ce qui précède en disant que la géométrie affine est la géométrie adaptée à l'étude de la perspective cavalière (perspective parallèle).

L'une des raisons d'être de la géométrie affine est ainsi clairement exprimée, et mise à disposition de la profession.

2.11. Raisons d'être des perspectives centrale et parallèle

Du très bel ouvrage de Philippe Colmar, on peut extraire les informations suivantes sur les raisons d'être des perspectives centrale et parallèle, présentées sous forme résumée dans le tableau ci-dessous.

	Perspective centrale	Perspective parallèle
Titre du chapitre de Colmar	Un œil en trop	Les yeux envolés
Créateurs, dates et raisons d'être. *Changements de nom*	Brunelleschi (Vers 1415) : mise en scène d'un tableau (Tavoletta). Desargues (1636)	Jacques Androuet du Cerceau (1582) : architecture (Géométrie des villes, des jardins et des palais) ; *perspectives parallèles.* Contre son gré, Du Breuil

	Abraham Bosse (1648) : taille de pierres, stéréotomie.	(1663) : architecture militaire (Fortifications) ; *perspective cavalière*. Monge (fin du XVIII^e^) : dessinateurs et ingénieurs en manufacture ; *géométrie descriptive*. Auguste Choisy (fin du XIX^e^), Bauhaus, Groupe de Stilj (XX^e^) : architecture ; *axonométrie*.

Tableau 2. Créateurs, raisons d'être, changements de nom des deux perspectives.

On voit que la colonne consacrée à la perspective parallèle est la plus abondante. La citation suivante et la figure 26 permettront d'éclairer le lecteur sur l'usage de l'axonométrie en architecture au XX^e^ siècle, qui peut sembler surprenante :

> Le développement de l'axonométrie ramène l'architecte à une démarche plus théorique sans référence à l'expérience visuelle que privilégie la perspective centrale. […] Par ce point de vue rejeté à l'infini, la vision intérieure de l'architecte trouve sa métaphore. (Colmar, 1992, p. 63)

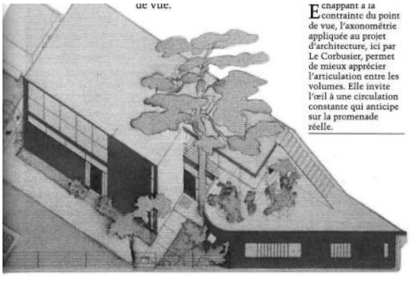
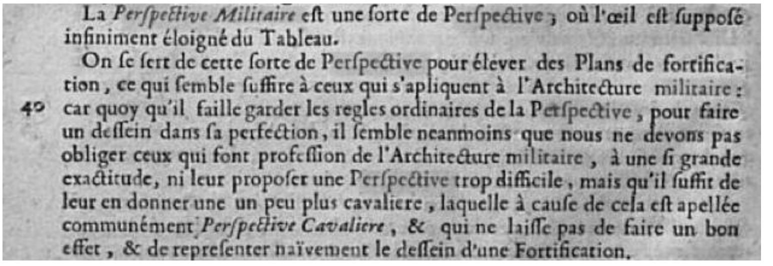


Figure 26. Axonométrie faite par Le Corbusier (Colmar, 1992, p. 63).

Quelle est l'origine de l'expression « perspective cavalière » ? Certains la situent dans le mot *cavalier*. Dans une forteresse, le *cavalier* est le bâtiment dominant, duquel l'observation et l'artillerie peuvent œuvrer. D'après le Larousse en 20 volumes, à la rubrique *Fortification*, on en trouve la définition suivante : « Massif de terre rapporté sur certaines parties d'un ouvrage pour exhausser ses vues et accroître sa puissance de feu. » Une autre origine est évoquée dans Colmar, qui donne une citation d'Ozanam que l'on peut retrouver en ligne :



La *Perſpective Militaire* eſt une ſorte de Perſpective ; où l'œil eſt ſuppoſé infiniment éloigné du Tableau.

On ſe ſert de cette ſorte de Perſpective pour élever des Plans de fortification, ce qui ſemble ſuffire à ceux qui s'appliquent à l'Architecture militaire : car quoy qu'il faille garder les regles ordinaires de la Perſpective, pour faire un deſſein dans ſa perfection, il ſemble neanmoins que nous ne devons pas obliger ceux qui font profeſſion de l'Architecture militaire, à une ſi grande exactitude, ni leur propoſer une Perſpective trop difficile, mais qu'il ſuffit de leur en donner une un peu plus cavaliere, laquelle à cauſe de cela eſt apellée communément *Perſpective Cavaliere*, & qui ne laiſſe pas de faire un bon effet, & de repreſenter naïvement le deſſein d'une Fortification.

Figure 27. Évocation de la perspective cavalière par Ozanam (1691).

On la trouve, non pas dans l'ouvrage qu'Ozanam a publié en 1693, comme l'indique Colmar, mais dans celui qu'il a publié en 1691. Cette citation d'Ozanam montre que le mot « cavalière » est à entendre aussi au sens de « désinvolte, impertinente, hardie, impolie » à l'égard de la pratique de la perspective centrale.

Le tableau 2 arrête son inventaire aux années 50. Complétons-le en montrant sur un exemple ce que permettent de faire les logiciels actuels, qui sont à l'origine d'une révolution analogue à celle que les calculatrices électroniques ont provoquée. Ils facilitent grandement la réalisation de perspectives centrales à un, deux ou trois points de fuite, comme l'illustrent les figures qui suivent (voir figure 28), faites avec le logiciel Illustrator d'Adobe.

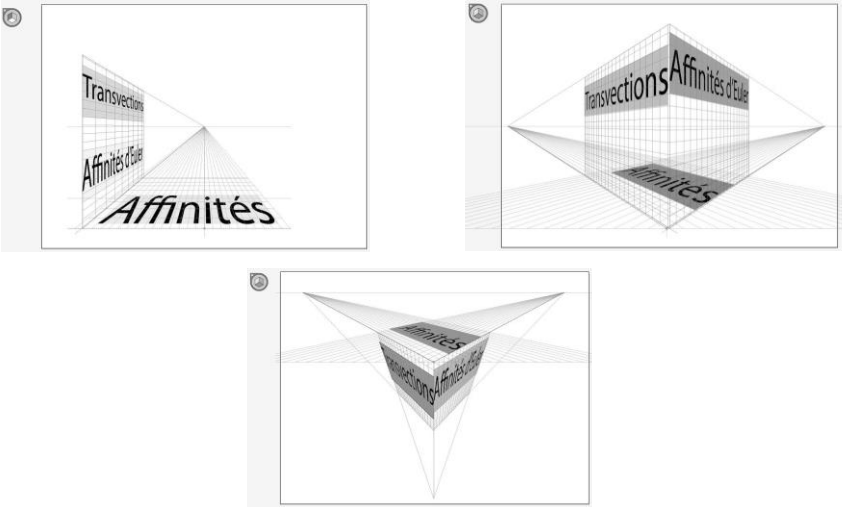


Figure 28. Perspectives à 1, 2 ou 3 points de fuite réalisées avec Illustrator.

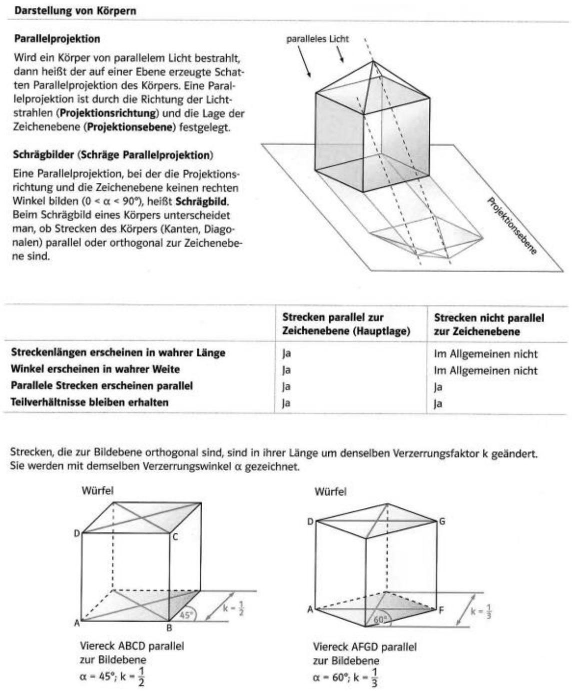
Dans le coin en haut à gauche de chacune des figures ci-dessus, apparaît un outil du logiciel, un widget, que l’aide en ligne [24] décrit ainsi :

> Un widget de changement de plan apparaît également lorsque vous activez l’outil Grille de perspective. Vous pouvez utiliser ce widget pour sélectionner le plan actif de la grille. Dans la grille de perspective, le plan actif est celui sur lequel vous dessinez un objet de manière à projeter cette portion de la scène selon le point de vue (la perception) de l’observateur.

Revenons vers le monde scolaire, en examinant des manuels pour les élèves.

2.12. Retour vers les manuels scolaires actuels : en Allemagne

La figure 29 reproduisant une page d’un formulaire destiné aux élèves du Gymnasium en 2005 montre que la projection parallèle y est un objet d’enseignement.



Darstellung von Körpern

Parallelprojektion

Wird ein Körper von parallelem Licht bestrahlt, dann heißt der auf einer Ebene erzeugte Schatten Parallelprojektion des Körpers. Eine Parallelprojektion ist durch die Richtung der Lichtstrahlen (**Projektionsrichtung**) und die Lage der Zeichenebene (**Projektionsebene**) festgelegt.

Schrägbilder (Schräge Parallelprojektion)

Eine Parallelprojektion, bei der die Projektionsrichtung und die Zeichenebene keinen rechten Winkel bilden ($0 < \alpha < 90°$), heißt **Schrägbild**. Beim Schrägbild eines Körpers unterscheidet man, ob Strecken des Körpers (Kanten, Diagonalen) parallel oder orthogonal zur Zeichenebene sind.

	Strecken parallel zur Zeichenebene (Hauptlage)	Strecken nicht parallel zur Zeichenebene
Streckenlängen erscheinen in wahrer Länge	Ja	Im Allgemeinen nicht
Winkel erscheinen in wahrer Weite	Ja	Im Allgemeinen nicht
Parallele Strecken erscheinen parallel	Ja	Ja
Teilverhältnisse bleiben erhalten	Ja	Ja

Strecken, die zur Bildebene orthogonal sind, sind in ihrer Länge um denselben Verzerrungsfaktor k geändert. Sie werden mit demselben Verzerrungswinkel α gezeichnet.

Figure 29. Reproduction de la page 54 de l’ouvrage de Hans-Jerg Dorn et al. (2005).

L’allusion aux ombres au soleil est présente dans la première figure, et les propriétés géométriques conservées ou non font l’objet d’une synthèse

24. http://helpx.adobe.com/fr/illustrator/using/perspective-grid.html.

présentée dans un tableau. Enfin, des exemples de choix d'angle des fuyantes avec l'horizontale et de coefficient de « réduction » sont donnés, plus raisonnables que ceux du document du ministère…

2.13. Deux éditions d'un même manuel en France

Dans l'édition de 1997 du manuel de la collection Hatier (Chapiron et al., 1997) concernant la classe de 6^{e} (élèves de 11-12 ans), le chapitre 11 est consacré au pavé droit ou parallélépipède rectangle. Les extraits suivants donnent une idée de la manière dont la perspective cavalière est traitée.

Les solides représentés à gauche dans la figure 30 le sont avec des projections parallèles qui ne sont pas évoquées, mais qui ne sont pas des perspectives cavalières. Les propriétés de la perspective cavalière mélangent des propriétés géométriques véritables et des conventions de représentation propres à ce type de représentation (convention annoncée comme telle pour la réduction des fuyantes – de moitié, dans ce manuel –sans que le choix de réduire ces fuyantes soit lui-même évoqué [25], ou sous forme de choix, pour les angles des fuyantes avec l'horizontale).

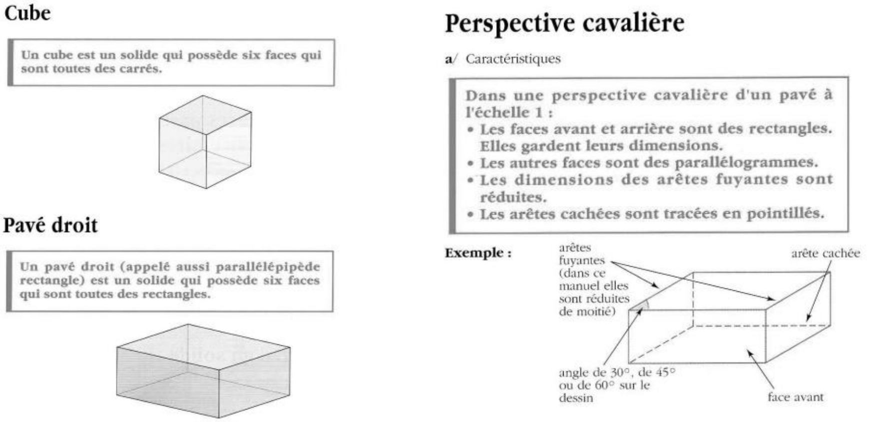
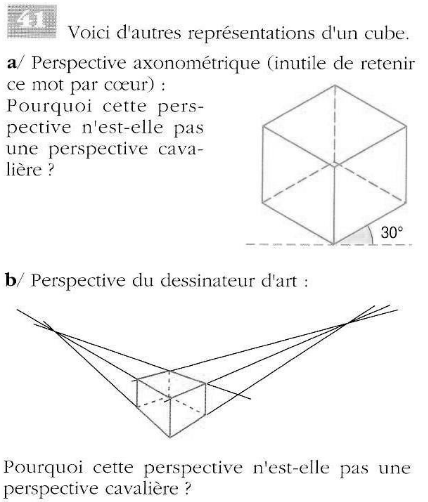


Figure 30. Copies partielles de l'ouvrage, pp. 170-171.

Le silence sur la projection parallèle contraint les auteurs à évoquer une « échelle 1 » pour justifier que certaines faces sont représentées en vraie grandeur. L'attention des élèves est attirée sur d'autres représentations en

25. On sait que dans certaines projections parallèles les longueurs des fuyantes peuvent au contraire être augmentées. On en verra un exemple plus loin.

perspective dans un exercice figurant dans la rubrique « Pour devenir un champion » qui clôt le chapitre, et qui est reproduit sur la figure 31.


41 Voici d'autres représentations d'un cube.

a/ Perspective axonométrique (inutile de retenir ce mot par cœur) :
Pourquoi cette perspective n'est-elle pas une perspective cavalière ?

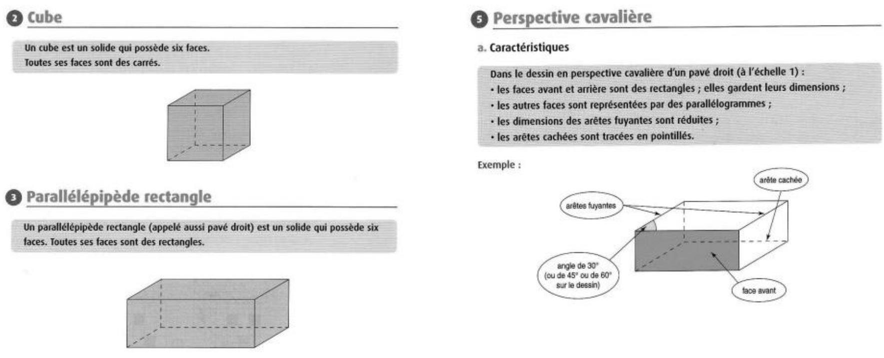
b/ Perspective du dessinateur d'art :

Pourquoi cette perspective n'est-elle pas une perspective cavalière ?

Figure 31. Extrait de la page 180.

L'axonométrie est évoquée, sans que la projection parallèle le soit, ce qui est conforme au programme qui ne le demande pas. C'est ce même type de représentation qui a été utilisé par les auteurs pour représenter les solides au début du chapitre. Ce manuel est le seul sur le marché de l'édition scolaire à aborder de telles considérations.

Passons maintenant à l'édition 2005 de la même collection (Chapiron et al., 2005). Les auteurs sont les mêmes, le programme n'a pas véritablement changé.


2 Cube

Un cube est un solide qui possède six faces.
Toutes ses faces sont des carrés.

3 Parallélépipède rectangle

Un parallélépipède rectangle (appelé aussi pavé droit) est un solide qui possède six faces. Toutes ses faces sont des rectangles.

5 Perspective cavalière

a. Caractéristiques

Dans le dessin en perspective cavalière d'un pavé droit (à l'échelle 1) :
- les faces avant et arrière sont des rectangles ; elles gardent leurs dimensions ;
- les autres faces sont représentées par des parallélogrammes ;
- les dimensions des arêtes fuyantes sont réduites ;
- les arêtes cachées sont tracées en pointillés.

Exemple :

Figure 32. Copies partielles des pages 220-221.

On constate que les solides représentés à gauche dans la figure 32 (voir ci-dessus) le sont déjà en perspective cavalière ! Quant aux propriétés de la perspective cavalière, les indices donnés dans l'édition précédente pour distinguer propriété mathématique et choix conventionnel n'apparaissent plus. Certains de ces choix ne sont même pas explicités. On peut penser que la logique du marché de l'édition scolaire a parlé : les auteurs se calent sur la concurrence, qui était moins exigeante qu'eux dans l'édition précédente. L'exercice 41 de la rubrique « Pour devenir un champion » de l'édition précédente disparaît.

Par honnêteté, précisons qu'une des activités proposées dans les deux éditions amène les élèves à se questionner sur différentes représentations d'un cube[26]. Les auteurs souhaitent que les élèves débattent « de façon à ce qu'en cherchant à se convaincre, ils repèrent les différences entre ces représentations ». On peut se demander comment le professeur va réguler ce débat sans faire allusion à la projection parallèle, et sans faire usage du principe d'autorité…

Il est temps maintenant d'évoquer les choix de coefficient de « réduction » et d'angle des fuyantes dans une perspective cavalière.

2.14. Choix du coefficient et de l'angle d'une perspective cavalière

G. Audibert (1990) note PC(k, α) la perspective cavalière dont le coefficient est k et l'angle des fuyantes α. Il examine dans son ouvrage les perspectives cavalières suivantes, qui lui semblent posséder un intérêt indéniable pour les élèves de premier cycle : PC(1/2, 60°), PC(1/2, 30°), PC(1/2, 45°), PC(1/2, 90°), PC($\sqrt{2}$/2, 45°), PC(1, 45°), PC(1/2, –45°), PC(1/2, –30°), PC(1/2, –60°).

Dans les manuels allemands, on trouve l'association 1/2, 45° mais aussi 1/3, 30° ou encore 2/3, 60°, et bien d'autres dans les exercices. Ces associations se trouvent en conformité avec la règle citée par John Montague (2012), dans un ouvrage de dessin d'art :

> Le taux de réduction de la ligne fuyante est égal à 90° divisé par l'angle de ladite ligne.

26. Page 168 de l'édition 1997, et pages 218-219 pour l'édition 2005.

Yves Leblanc, dans son ouvrage *L'art du dessin en perspective*, publié en 2012, se contente de dire qu'on choisit souvent 45° et 1/2.

Tous ces résultats contribuent à mettre en faiblesse les propos tenus à ce sujet dans le document du ministère présenté en figure 4.

2.15. Une application étonnante des transformations affines planes

Nous avons vu de nombreuses transformations du plan affine, notamment les affinités, les transvections, ainsi que les affinités d'Euler. En voici une exploitation originale tirée d'un ouvrage de I. M. Yaglom paru en 1979.

En s'intéressant aux seuls mouvements d'un point sur une droite en fonction du temps, les seuls changements de repères admissibles (x, t) et (x', t') sont reliés par des relations de la forme :

$$\begin{cases} x' = x + vt + a \\ t' = \qquad t + b \end{cases} \quad (1)$$

Si l'on représente la position d'un point A(x) sur une droite d à l'instant t par un point auxiliaire A(x, t) d'un plan xOt avec les coordonnées x et t (voir figure 33), alors on obtient une sorte de « géométrie » dans laquelle les seuls faits ayant une signification géométrique (ou plutôt cinématique) sont ceux qui peuvent être exprimés au moyen de formules qui restent invariantes sous les transformations décrites par les relations (1).

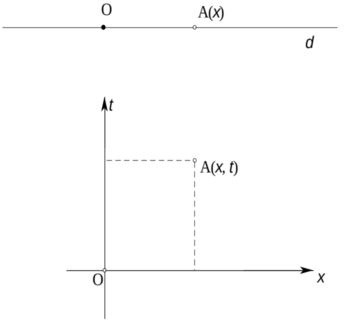


Figure 33. Passage de la cinématique à la géométrie.

Ces transformations jouent un rôle analogue à celui des déplacements dans le plan de la géométrie euclidienne, déplacements qui laissent invariantes les propriétés des figures qui nous intéressent. Il est donc pertinent d'étudier cette « géométrie galiléenne ».

Pour garder nos habitudes, on utilise les lettres x et y pour désigner les coordonnées d'un point, x jouant le rôle de t, et y celui de x, ce qui nous conduit à étudier les transformations définies par les relations :

$$\begin{cases} x' = x \qquad + a \\ y' = vx + y + b \end{cases} \quad (2)$$

Ce qui nous conduit à étudier celles définies par :

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} \quad (3) \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} x' = x \\ y' = vx + y \end{cases} \quad (4)$$

On reconnaît en (3) les translations, et en (4) les transvections d'axe Oy :

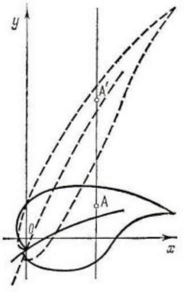


Figure 34. Tirée de Yaglom (1979, p. 26).

On peut étudier cette géométrie galiléenne, en gardant en tête une correspondance entre les concepts géométriques qui sont introduits et les concepts cinématiques correspondants.

Concepts géométriques	Concepts cinématiques
Point	Événement
Droite ordinaire (non parallèle à Oy)	Mouvement uniforme
Droite spéciale (parallèle à Oy)	Instant
Distance entre deux points	Intervalle de temps entre deux événements
Distance spéciale δ entre deux points	Intervalle d'espace entre deux événements simultanés
Angle entre deux droites	Vitesse relative entre points en mouvements uniformes
Distance entre deux droites spéciales	Distance entre deux points de la droite d au repos l'un par rapport à l'autre.
…	…

Tableau 3. Traduction partielle de Yaglom (1979, p. 40).

Il en résulte une géométrie assez surprenante, qui n'est pas euclidienne, dans laquelle les cercles (ensemble de points à une distance donnée d'un point donné) sont des paires de droites parallèles, mais où les cycles (ensemble des points sous lesquels on voit un segment sous un angle donné) sont des paraboles d'axe parallèle à O*y*. Les homothéties de centre O et les affinités orthogonales d'axe O*y* jouent le rôle que jouent les similitudes en géométrie euclidienne.

À la suite de l'expérience de Michelson-Morley, Einstein a accepté le principe de relativité galiléenne évoqué plus haut (équivalence de tous les repères d'inertie), mais y a ajouté la condition : la vitesse de la lumière est la même dans tous les repères d'inertie.

En posant $c = 1$ (ce qui signifie que si l'unité de temps est la seconde, alors l'unité de longueur est voisine de 300 000 km), alors la droite l d'équation $x = t$, est la trajectoire d'un rayon de lumière se propageant avec la vitesse $c = 1$ dans la direction des x croissants en partant du point O à l'instant 0.

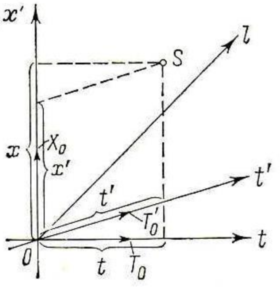


Figure 35. Tirée de Yaglom (1979, p. 162).

Ce schéma correspond à un changement de repère défini par :

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ t' = \quad\; t \end{cases}$$

En effet, la droite d'équation $x' = 0$ (donc l'axe Ot') dans le nouveau repère a pour équation dans l'ancien : $x = vt$. Le fait que la vitesse de la lumière soit égale à 1 se traduit par le fait que la droite l est la bissectrice du repère. C'est vrai dans xOt, mais faux dans x'Ot'. Pour que cela demeure vrai, on est conduit à faire un changement de repère tel que celui de la figure 36 :

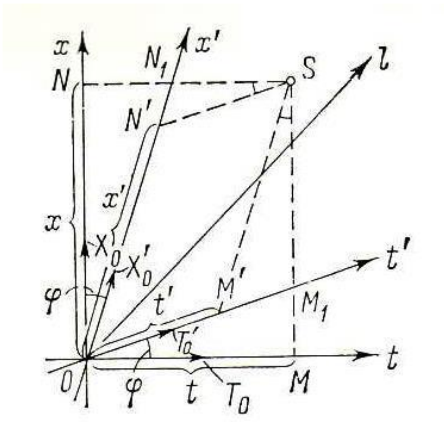


Figure 36. Tirée de Yaglom (1979, p. 163).

Des calculs un peu longs montrent que les formules de changement de repère sont celles-ci :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - ct}{\sqrt{1-v^2}} \\ t' = \dfrac{-vx + t}{\sqrt{1-v^2}} \end{cases}$$

On reconnaît les formules de la transformation de Lorentz. Retournons à la géométrie correspondante, celle dont les transformations sont définies par :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2}}x - \dfrac{v}{\sqrt{1-v^2}}y + a \\ y' = -\dfrac{v}{\sqrt{1-v^2}}x + \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2}}y + b \end{cases}.$$

On l'appelle la géométrie de Minkowski. C'est l'étude des propriétés des figures du plan qui sont invariantes par ces transformations. En changeant de repère (repère associé aux deux bissectrices du premier repère), une telle transformation est définie par un système de la forme :

$$\begin{cases} X' = \lambda X \qquad + A \\ Y' = \qquad \dfrac{1}{\lambda}Y + B \end{cases}.$$

On voit que les transformations de cette géométrie sont les translations et les affinités d'Euler, de déterminant 1. Ces dernières sont les composées d'affinités orthogonales d'axes respectifs OX et OY et de rapports inverses l'un de l'autre.

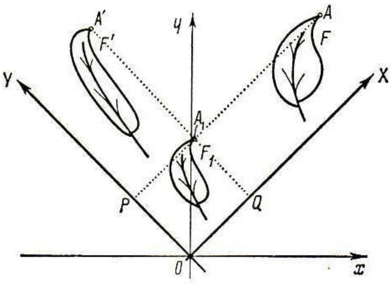


Figure 37. Tirée de Yaglom (1979, p. 177).

En interprétant cinématiquement les propriétés de ces transformations, on trouve des propriétés intéressantes : les affinités d'Euler transforment les parallèles à OX en parallèles à OY, et vice-versa ; ces droites sont des droites spéciales ; le fait qu'elles conservent les aires permet de définir une distance : d(A, B) est en relation avec l'aire du rectangle AKBL dont les côtés sont parallèles aux axes. Pour des questions d'homogénéité et de choix d'unités, on pose : $d(A, B) = \sqrt{2\text{aire}(AKBL)}$.

Les développements qui précèdent sont une illustration de *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences*, selon la formule d'Eugene Paul Wigner (1902-1994), employée comme titre pour une de ses communications [27].

2.16. Et aux USA ?

John Stillwell, dans son ouvrage de 2005, *The Four Pillars of Geometry*, décrit ainsi les trois géométries qu'il aborde :

> Euclidean geometry is the geometry of down-to-earth measurement.
> The most visual branch of geometry is projective geometry […] Many of its practitioners today work in the field of video games and computer graphics.
> Affine geometry occupies the position in the middle […] Affine maps are also popular in engineering drawing, in witch the so-called "axonometric projection" is often used to depict an object in three dimensions while retaining correct proportion in a given direction.

Et il termine par une axonométrie d'un cube, avec comme légende « Affine view of the cube » !

27. Voir https://www.dartmouth.edu/~matc/MathDrama/reading/Wigner.html.

2.17. Une ingénierie menée à l'INRP vers 2000, non publiée…

Évoquons très rapidement une expérience menée en classe avec le matériel Zometool [28], pour faire rencontrer la projection parallèle, puis la perspective cavalière d'un parallélépipède, en classe de 6e, en France. Le matériel Zometool a permis de construire un parallélépipède rectangle (en gris ci-dessous) et des projetantes parallèles (en gris clair) relatives aux trois arêtes d'un trièdre, ainsi que les projections de ces arêtes sur le mur (en noir). La question posée aux élèves était la suivante : quelle figure dessinera-t-on sur le mur si on fait pareil pour toutes les arêtes ?

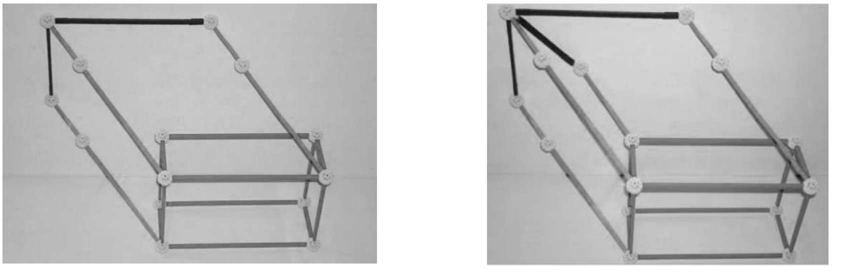


Figure 38. Expérimentation sur la projection parallèle d'un parallélépipède.

Le coefficient de « réduction » est ici plus grand que 1 ! La légende est définitivement morte pour les rares collègues expérimentateurs des séances qui y accordaient quelque crédit. L'évolution des programmes et la quasi-disparition dans l'enseignement scolaire ou universitaire des projections (parallèles ou centrales) font que ce qui est évident pour certains (le rapport de la hauteur d'un homme et de son ombre et son évolution dans la journée sont parlants) peut être problématique pour d'autres, en raison de l'application du principe d'autorité à des propos tenus par des collègues ou documents lus qui alimentent la légende.

L'expérimentation se poursuivait avec une autre expérimentation permettant de produire de manière plus économique des projections parallèles sur un mur d'un cube de type « fil de fer », à l'aide d'un rétroprojecteur. Le but était d'obtenir une gamme beaucoup plus grande de telles projections, de manière à pouvoir caractériser parmi elles celles qui

28. http://www.zometool.com/.

sont des perspectives cavalières, sans aller jusqu'à leur faire conjecturer le théorème de Pohlke [29], qui dit que :

> Si quatre points d'un plan ne sont pas alignés, on peut les considérer comme les images de l'origine et des points unités d'un repère orthonormal dans une projection parallèle. (Reinhardt & Soeder, p.177)

Enfin, la mise à disposition des élèves d'un ensemble de Macro-constructions sous Cabri II permettait l'usage intensif de la perspective cavalière pour représenter un assemblage de cubes.

2.18. En guise de conclusion de l'enquête

Le lecteur aura compris que le but de l'enquête n'était pas de définir le programme d'un enseignement en master. Plus modestement, elle a permis de retrouver ou de mieux connaître les raisons d'être et les avantages de la géométrie affine, et de constater qu'elle existait dans l'enseignement post-bac avant la période des mathématiques modernes. On a vu aussi que, même à cette époque, il était possible d'en faire un enseignement dans le secondaire très différent de celui qui a été mis en place en France, moins coupé des autres secteurs de la géométrie tels que la géométrie euclidienne du plan et de l'espace. Une autre découverte (ou redécouverte) est son lien avec la projection parallèle d'un plan sur un autre, et donc avec la perspective cavalière.

Ce voyage dans le temps et dans l'espace mathématique et culturel récent permettra, on peut l'espérer, de redonner l'idée de valoriser ces objets dans les programmes, mais également de fournir à la profession tout entière des outils et des idées pour alimenter les dimensions pratique, expérimentale et même théorique de l'activité mathématique des professeurs et des élèves sur ces objets, la profession en France souffrant d'une culture dominée pendant plusieurs générations par la survalorisation de la dimension formelle ou mathématique au sens strict au détriment des trois autres dimensions précédemment citées.

---

29. Cette question, entre autres, a été étudiée par Yves Chevallard dans son séminaire PCL2 de 2006-2007, consultable en ligne, les pages 505-511 fournissant une synthèse de l'étude complète sur la perspective ; les deux dernières pages sont consacrées à ce théorème : http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Seminaire_2006-2007.pdf. Si ce théorème est au delà des préoccupations d'un élève de 6e, il mérite en effet d'être connu par les professeurs.

Dans le paragraphe suivant, on passe brutalement à une toute autre question.

3. Une implantation locale de la théorie anthropologique de la didactique

Deux professeurs du lycée Ronsard de Vendôme (Stéphane Verronneau et Stéphane Geray, le premier ayant travaillé à l'INRP quelques années) ont étudié la TAD à travers les documents mis en ligne par Yves Chevallard, notamment ses séminaires PCL2. Ils ont mis en place dans leur classe les AER qu'ils y ont trouvées, puis parfois les ont un peu modifiées. Ils essaient de trouver des « situations du monde », et des « questions associées », et font à ce sujet des remarques qu'ils formulent ainsi :

> – Le plus difficile c'est de trouver des questions sortant du questionnement du monde et qui ne sont pas faussées, pas travesties.
>
> – Quand on maîtrise mal la théorie mathématique, on est en difficulté dans la mise en place de l'activité d'étude et de recherche (AER). Cela nécessite une grosse maîtrise des mathématiques.
>
> – Si on n'a pas le temps de créer de telles situations, on emprunte à diverses sources (manuels, articles, publicités…) des exercices ou problèmes qu'on transforme en AER. Pour cela, il nous faut trouver une question qu'on posera.

Questionnés sur ce que ce travail leur apporte, voici leurs réponses, avec leurs propres mots :

> Avoir la même écoute, la même attention de la part de l'élève qui a 5 que de l'élève qui a 15.
>
> Les élèves ne posent plus de questions du type « Est-ce qu'on a le droit de… ».
>
> Ce sont les élèves eux-mêmes qui proposent d'employer l'algèbre ou les probabilités pour trancher sur une question.
>
> C'est la discipline « mathématique » qui fait la discipline dans la classe : les idées sont écoutées, respectées.
>
> La nature des échanges est riche. Nous sommes bousculés par les questions (pas de récréation).

> La TAD permet d'introduire naturellement le vocabulaire de la logique comme répondant aux besoins de justification.
>
> Dans l'accompagnement personnalisé, dans la rédaction des bulletins, l'emploi de certains termes de la TAD nous permet d'être plus clairs.
>
> Plus on avance, plus on colle au modèle, c'est marrant !

Questionnés sur leurs difficultés, et leur évolution, voici leurs réponses, reformulées en respectant leur contenu.

- La charge de travail, car ils sont seuls.
- Dans leurs synthèses (ou bilans), les types de tâches sont bien identifiés par les élèves, mais les propriétés pas toujours, même s'ils essaient de faire en sorte que ces propriétés soient mises au service des techniques relatives aux types de tâches mis en jeu dans l'AER.
- Au début, le fait de retarder le moment de construction de l'environnement technologico-théorique leur a posé problème.
- Maintenant, ils font souvent une démonstration contextualisée dans l'AER, puis une démonstration générale au moment de construction du niveau θ.
- Assumer les reproches de certains collègues : « Vous expliquez tout, ce n'est pas des maths ! ».

Ils ont obtenu l'avis de leurs supérieurs hiérarchiques sur leur mise en œuvre dans les classes, et les inspecteurs pédagogiques régionaux leur ont répondu ce qui suit, confirmant la confiance qu'ils leur ont témoignée en leur demandant d'animer un stage de formation de formateurs sur la TAD :

> Notre position d'inspecteurs consiste à :
>
> - Reconnaître que votre enseignement est remarquable dans sa conception, par son efficacité en classe (implication, autonomie et pertinence mathématique des élèves) et décrite plus globalement dans ses effets dans l'établissement et sur les familles par le proviseur.
> - Constater que cette approche de l'enseignement est marginale et que sa diffusion nécessiterait une formation initiale et continue sur laquelle nous n'avons pas de prise ou de moyens en rapport avec les besoins que représenterait une diffusion de ces pratiques.
> - Constater qu'il n'existe pas de manuels ou même de publication s'adressant directement aux enseignants pour leur proposer un tel enseignement.

- Valoriser cette action auprès de formateurs afin qu'ils disposent de la connaissance de ce courant de la didactique.

Nous ne sommes pas les seuls à savoir ce qui nous reste à faire. Un ouvrage de diffusion de la théorie anthropologique du didactique à destination de la profession est attendu, en français et sans doute dans d'autres langues…

Références

Audibert, G. (1990). *La perspective cavalière*. Paris : APMEP.

Bouligand, G. & Desbats, J. (1947). *La mathématique et son unité. Introduction aux éléments de l'analyse et à la philosophie des sciences déductives*. Paris : Payot.

Brannan, D. A., Esplen, M. F. & Gray, J. (1999). *Geometry*. Cambridge, Royaume-Uni : Cambridge University Press.

Chapiron, G., Mante, M., Mulet-Marquis, R. & Pérotin, C. (1997). *Mathématiques 6^e (collection Triangle)*. Paris : Hatier.

Chapiron, G., Mante, M., Mulet-Marquis, R. & Pérotin, C. (2005). *Mathématiques 6^e (collection Triangle)*. Paris : Hatier.

Chevallard, Y. (1998). *Sur l'inadéquation de la formation première des professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire français*. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=31

Chevallard, Y. (2011). *La problématique de la recherche en didactique à la lumière de la TAD*. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=208

Colmar, P. (1992). *La perspective en jeu. Les dessous de l'image*. Paris : Gallimard.

Coxeter, H. S. M. (1961). *Introduction to Geometry*. New York, NY : John Wiley and Sons.

Deltheil, R. & Caire, D. (1944). *Géométrie (Transformations et coniques)*. Paris : J.-B. Baillière et Fils.

Deltheil, R. & Caire, D. (1951). *Compléments de géométrie. Géométrie métrique – Géométrie projective – Géométrie anallagmatique, Classes de préparation aux Grandes Écoles, concours de l'enseignement*, Paris : J.-B. Baillière et Fils.

Dorn, H.-J., Freudigmann, H., Herbst, M., Reinelt, G., Schwier, M., Siebert, P. & Stötzer, S. (2005). *Formelsammlung Mathematik*. Stuttgart, Leipzig, Allemagne : Ernst Klett Schulbuchverlage.

Euler, L. (1748). *Introductio in Analysin Infinitorum*, Tomus Secundus, continens Theoriam Linearum Curvarum, una cum appendice de Superficiebus, Lausannæ : Apud Marcum-Michaelem Bousquet & Socios.

Euler, L. (1835). *Introduction à l'analyse infinitésimale* (J. B. Labey, trad.). Paris : Bachelier.

Félix, L. (1974). *Message d'un mathématicien : Henri Lebesgue*. Paris : Albert Blanchard.

Köhler, J., Höwelmann, R. & Krämer, H. (1975). *Analytische Geometrie und Abbildungsgeometrie in vektorieller Darstellung*. Frankfurt am Mein, Allemagne : Verlag Moritz Diesterweg.

Lang, S. & Murrow, G. (1997). *Geometry* (2e éd. corrigée). New York, NY : Springer.

Lay, D.-C. (2004). *Algèbre linéaire : Théorie, exercices & applications* (3e éd. ; M. Citta-Vanthemsche, trad.). Bruxelles, Belgique : De Boeck.

Leblanc, Y. (2012). *L'art du dessin en perspective*. Paris : Fleurus.

Mercier, D.-J. (2012). *Oral 1 du CAPES Mathématiques, Plans et approfondissements de cinq leçons de la liste 2013*. Paris : Publibook.

Ministère de l'Éducation nationale. (2012). *Mathématiques Série STD2A. Perspectives cavalières, parallèles et créations graphiques*. Collection *Ressources pour la classe de première générale et technologique*. http://cache.media.eduscol.education.fr/file/maths_std2a/31/0/LyceeGT_Ressource_STD2A_9-perspective_cavaliere_maths_std2a_207310.pdf

Montague, J. (2012). *Le dessin en perspective par l'exemple*. Paris : Eyrolles.

Ozanam, J. (1691). *Dictionnaire mathématique ou idée générale des mathématiques dans lequel on trouve, outre les Termes de cette Science, plusieurs Termes des Arts & des autres Sciences ; Avec des raisonnemens qui conduisent peu à peu l'esprit à une connoissance universelle des Mathématiques*. Paris : Etienne Michallet.

Ozanam, J. (1693). *Cours de Mathématique, qui comprend toutes les parties de cette science les plus utiles & les plus nécessaires à un homme de* *guerre & à tous ceux qui se veulent perfectionner dans les mathématiques*. Paris : Jean Jombert.

Pham, F. & Dillinger, H. (1996). *Algèbre linéaire*. Paris : Diderot.

Pressiat, A. (1999). *Aspects épistémologiques et didactiques de la liaison « points-vecteurs »* (Thèse de doctorat). Université Paris 7.

Pressiat, A. (2002). Grandeurs et mesures : Évolution des organisations mathématiques de référence et problèmes de transposition. Dans J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Éds), *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 283-297). Grenoble : La pensée sauvage.

Reinhardt, F. & Soeder, H. (1997). *Atlas des mathématiques* (J. Cuénat & J. Dablanc, trad.). Paris : Le livre de Poche. (Édition originale 1974)

Roy, M.-F. (s.d.). *Les application linéaires en géométrie*. http://perso.univ-rennes1.fr/marie-francoise.roy/siteAL1-2008-2009/AL1.Resume4.pdf

Stillwell, J. (2005). *The four pillars of geometry*. New York, NY : Springer.

Yaglom, I. M. (1973). *Geometric transformations III* (A. Shenitzer, trad.). New York, NY : Random House.

Yaglom, I. M. (1979). *A simple non-euclidean geometry and its physical basis*. New York, NY : Springer.

Éléments d'écologie des problèmes de la profession

Gisèle Cirade

UMR EFTS, Université Toulouse 2 (IUFM), France

Abstract. In his lecture, André Pressiat (2017) identifies a problem of the profession and then inquires into it with the aim of determining the praxeological equipment necessary for the design of a teacher-training course. We intend to bring to light certain conditions and constraints under which such work can be carried out, first by situating in a more generic framework the identification of the difficulties affecting the exercise of the profession and the way the noosphere considers them, and by linking these issues to the level of professionalisation of the noosphere itself (Chevallard, 2013). The notion of *archiécole* ("archschool"), introduced by Michèle Artaud in 1993, then allows us to pose in a more theoretical way the question of the production and dissemination of praxeologies for the profession.

Resumen. En su conferencia, André Pressiat (2017) identifica un problema de la profesión y posteriormente realiza una investigación centrada en este problema dirigida a determinar el equipamiento praxeológico necesario para la construcción de una ingeniería de formación de profesores. Nos proponemos poner al descubierto ciertas condiciones y limitaciones para un trabajo de este tipo, resituando en primer lugar en un marco más genérico la identificación de las dificultades que afectan al ejercicio del oficio y a su recepción por la noosfera, y vinculando esas cuestiones al grado de profesionalización de la noosfera del oficio (Chevallard, 2013). La noción de *archiécole* (archiescuela), introducida por Michèle Artaud en 1993, nos permite plantear de modo más teórico la cuestión de la producción y de la difusión de las praxeologías de la profesión.

Résumé. Dans sa conférence, André Pressiat (2017) identifie un problème de la profession et conduit ensuite à son sujet une enquête finalisée par la détermination de l'équipement praxéologique indispensable à la construction d'une ingénierie de formation de professeurs. Nous nous proposons de mettre au jour certaines conditions et contraintes sous lesquelles peut s'effectuer un tel travail, en resituant tout d'abord dans un cadre plus générique le repérage des difficultés qui affectent l'exercice du métier et leur prise en charge par la noosphère, et en liant ces questions au degré de professionnalisation de la noosphère du métier (Chevallard, 2013). La notion d'archiécole, introduite par Michèle Artaud en 1993, nous permet ensuite de poser de façon plus théorique la question de la production et de la diffusion des praxéologies pour la profession.

IV[e] congrès international sur la TAD (Toulouse, 21-26 avril 2013)
Axe 4. *Apports de la TAD à l'enseignement et à la diffusion des connaissances*

Cirade, G. (2017). Éléments d'écologie des problèmes de la profession. Dans G. Cirade et al. (Éds), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* (pp. 727-752). https://citad4.sciencesconf.org

La conférence présentée par André Pressiat (2017) au 4e congrès international sur la TAD rend compte d'une enquête très riche qu'il a conduite, après avoir identifié un problème de la profession, « dans le but de déterminer l'équipement praxéologique qui peut être jugé indispensable ou simplement utile pour construire une ingénierie de formation de professeurs de mathématiques au niveau d'un master » (p. 679). Dans cette *réaction*, je me propose de revenir sur les conditions et les contraintes sous lesquelles de telles questions peuvent être étudiées, en examinant plus particulièrement celles qui sont liées à la noosphère du métier de professeur.

1. Le métier et sa noosphère

1.1. Le métier et ses difficultés

Je commencerai en parlant du *métier* (de professeur de mathématiques) et de ses *difficultés*. Pour situer le contexte dans lequel je me place, je m'appuierai sur un texte d'Yves Chevallard (2013) dans lequel, après avoir précisé que le mot *métier* serait employé « en un sens propre à la TAD », l'auteur indique tout d'abord :

> Le *métier* de professeur de mathématiques, c'est ce à quoi doit se livrer quiconque *exerce* ce métier. Exercer le métier de médecin généraliste, c'est notamment recevoir des patients à son cabinet, les interroger, les ausculter, leur demander leur carte Vitale, rédiger des ordonnances ; et c'est aussi visiter des patients à domicile, etc. De même, exercer le métier de professeur de mathématiques conduit à accomplir ce que je nommerai les *gestes du métier* – par exemple « faire cours », « préparer son cours », « donner des devoirs », « corriger des devoirs », « rédiger un corrigé », « remplir des bulletins scolaires », etc. (p. 86)

Il précise ensuite que « ce qui importe maintenant », c'est que « l'exercice d'un métier se heurte à des *difficultés* ». C'est sur ces *difficultés* [1], et la façon de les repérer, que nous allons à présent nous arrêter. Dans ce travail, la dialectique de l'individu et du collectif joue un rôle essentiel car c'est par le

---

1. Concernant le choix de ce mot, Y. Chevallard (2013, p. 86) précise : « J'use de ce mot – *difficulté* – parce qu'il me semble minimaliste : comme le dit naïvement un dictionnaire en ligne de la langue anglaise (le *Macmillan Dictionary*), "if you have difficulty with something, you are not able to do it easily". »

biais des difficultés vécues par *des* gens de métier que nous allons pouvoir dégager celles auxquelles sont confrontés *les* gens de métier, les premières étant révélatrices des secondes qui sont en fait celles sur lesquelles va porter le travail de recherche. Avant de continuer, notons que, en consultant le dictionnaire historique de la langue française (Rey, 1998), on trouve à l'entrée MÉTIER les développements suivants :

> Au cours du XII^{e} siècle, *mestier* s'est appliqué à l'exercice d'une profession, d'un art, d'abord en parlant du métier des armes (v. 1165), puis aussi d'un service procurant une rémunération (v. 1200). La locution *gens de mestiers* désigne alors ceux dont le métier exige des connaissances, c'est-à-dire les lettrés (1180), avant de prendre le sens d'« artisans » puis d'« ouvriers » entre le XV^{e} et le XVI^{e} siècle. (pp. 2220-2221)

Par ailleurs, dans un ouvrage sur les artisans dans la Révolution, Jean-Michel Gourden (1988), dans un encart intitulé « Travail, art et métier » fait référence aux *gens de métier* en les différenciant des *gens de travail* :

> Le travail conserve au XVIII^{e} siècle ses connotations religieuses. Il est marqué du sceau de l'infâmie [*sic*]. Le dictionnaire Furetière le définit comme « application à quelque exercice pénible, fatigant ou qui demande de la dextérité. Les gens de travail sont nés pour porter ou remuer des fardeaux, labourer la terre ».
>
> […]
>
> La dignité n'a rien à faire avec le travail. Il cesse peu à peu d'être humiliant lorsqu'il est possible de distinguer, dans sa réalisation, la part de l'esprit qui le définit comme un art. Art, ici, n'ayant aucune résonance romantique mais étant entendu comme « tout ce qui est un effet de l'adresse et de l'industrie de l'homme » (Grand Vocabulaire de Français, 1762).
>
> C'est cette part de l'esprit qui différencie les gens de travail des gens de métier. A ces derniers seulement s'attachent règles, ordre et discipline susceptibles de faire de l'exécution d'un ouvrage, un art. (p. 49)

Ce que l'on voit poindre ici, sous les vocables de *métier* et *gens de métier*, c'est l'idée qu'on a besoin, pour réaliser certaines tâches dans le cadre d'un métier, d'avoir « des connaissances », de pouvoir s'appuyer sur des « règles », d'avoir une certaine « discipline ». Avant de poursuivre, revenons tout d'abord, brièvement, sur la dialectique de l'individu et du collectif, en citant un rapport d'information édité par le Sénat. Ce rapport, de Brigitte Gonthier-Maurin (2012), s'intitule « Le métier d'enseignant au cœur d'une ambition émancipatrice ». Après avoir noté que « la souffrance individuelle au travail doit être interprétée plus profondément comme une manifestation d'une déstabilisation structurelle et collective du métier », son auteure précise :

> Cette approche permet d'échapper à la tendance actuelle à traiter les difficultés d'un enseignant uniquement comme un problème personnel, dont les causes sont individuelles et s'enracinent dans la psychologie de l'enseignant. En considérant les problèmes de santé au travail uniquement comme relevant de l'individu, on s'empêche de mettre en place un système effectif de prévention collective des troubles et on se condamne à ne trouver de remède que dans la médecine pour les cas graves et sinon dans la reconversion professionnelle. L'organisation du travail lui-même est encore trop rarement questionnée, notamment par les services académiques qui sont en première ligne. Votre rapporteure fait sienne la préconisation de « *soigner le métier pour ne pas avoir à soigner les individus* [2] ». (p. 7)

Nous avons là un exemple d'une intervention de la noosphère du métier de professeur, qui présente la particularité d'évoquer les *difficultés* rencontrées par les enseignants ainsi que l'importance de ne pas s'en tenir à l'*individu* et de travailler sur le *collectif*. Il s'agit là d'un point crucial.

Passons maintenant à la délicate question du repérage des difficultés rencontrées dans le métier. Nous verrons plus loin quelques exemples issus d'observations faites dans la noosphère (Pressiat, 2017), mais dans l'immédiat je voudrais rappeler un dispositif maintenant classique permettant de faire émerger les difficultés rencontrées par les professeurs, les *gens de métier*. Implanté dans certaines formations initiales de professeurs sous le nom de *questions de la semaine*, ce dispositif peut être présenté succinctement ainsi :

> Chaque semaine ouvrable, à l'occasion d'une séance de travail où toute la promotion est en principe réunie, les élèves professeurs, qu'ils préparent le

2. Cette citation fait référence à l'audition de Françoise Lantheaume, menée dans le cadre de l'élaboration de ce rapport.

> CAPES[3] en première année ou qu'ils soient professeurs stagiaires en deuxième année, sont invités à consigner par écrit, individuellement, une difficulté qu'ils ont rencontrée et les interrogations que celle-ci soulève pour eux. (Cirade, 2006, p. 63)

À titre d'exemple, je propose ci-après quelques-unes des questions de la semaine[4] formulées par une élève professeure, Margot[5], tout au long de son année de formation (Cirade, 2006, pp. 119-133) – pour le lecteur intéressé, l'ensemble des questions qu'elle a posées dans l'année figure en annexe 1. Comme on peut le constater, les difficultés rencontrées sont de nature diverse :

> 3. La majorité des élèves de ma classe effectuent leurs exercices mais une partie non. Que faire ? Punir ?
>
> 7. Je commence un chapitre sur les configurations du plan essentiellement basé sur des révisions du collège et dont le but est d'apprendre à effectuer des démonstrations. Comment « schématiser » une démonstration géométrique ? Comment peut-on expliquer un raisonnement ? Peut-on parler de logique ?
>
> 8. Sur le chapitre de généralités sur les fonctions, quelles techniques les élèves doivent-ils connaître au sujet de la variation des fonctions ? Mon livre ne fait utiliser que la lecture graphique. La méthode « algébrique » (montrer que, si $a \leq b$ alors $f(a) \leq f(b)$, etc.) est-elle encore au programme de 2$^{\text{de}}$?
>
> 11. Un élève passe au tableau pour résoudre un exercice de géométrie. Il rédige sa solution, elle est juste, mais il y a plus rapide comme raisonnement. Un élève le fait remarquer oralement. Faut-il que cet autre raisonnement soit apparent au tableau ? Que les élèves en prennent note ?
>
> 14. Dans le chapitre *Repérage dans le plan*, il est conseillé d'effectuer des repérages dans un tableur. Comment créer une AER pour le repérage dans un tableur ? Quel peut être son intérêt mathématique ?

---

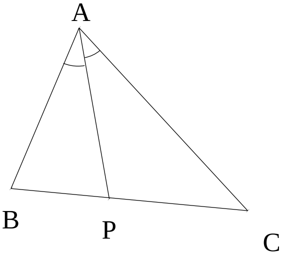
3. Le CAPES, *certificat d'aptitude au professorat de l'enseignement du second degré,* est le concours de recrutement des professeurs certifiés pour les disciplines générales. Les lauréats de ce concours suivent alors une formation en deuxième année à l'institut universitaire de formation des maîtres (IUFM), en tant que professeurs stagiaires – à la rentrée 2013, les écoles supérieures du professorat et de l'éducation (ESPE) ont succédé aux IUFM.

4. Les numéros correspondent aux semaines de formation.

5. Margot désigne une élève professeure en formation à l'IUFM d'Aix-Marseille (2$^{\text{e}}$ année) en 2004-2005.

16. Au sujet des coordonnées d'un vecteur, la donnée en ligne $\vec{u}\ (a\,;\,b)$ et la donnée en colonne $\vec{u}\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ apparaissent dans divers documents. Quelle est la « bonne » écriture ?

22. Soit ABC un triangle quelconque. Notons P le point d'intersection de la bissectrice intérieure de $\hat{A}$ avec [BC].



Comment prouver que $\frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC}$?

24. Comment élaborer un devoir « commun » en fin d'année ?

Je ne commenterai pas ces questions, car le point sur lequel je voudrais ici insister est le suivant : ces difficultés auxquelles *un individu* particulier (en l'occurrence, Margot) déclare être confronté constituent en fait un révélateur des difficultés auxquelles est confronté *le collectif* des élèves professeurs et, par-delà, la *profession*. En d'autres termes, « il ne s'agit nullement de répondre *à Margot* […], mais de répondre *à la question* qu'elle apporte du terrain et que les participants au séminaire doivent apprendre à regarder comme une question *de la profession* » (Cirade, 2006, p. 122). Je précise que, si l'on regarde l'ensemble des questions de la semaine posées au fil de plusieurs années en se centrant sur une difficulté particulière, dans certains cas les questions de la semaine foisonnent – on peut par exemple citer celles qui portent sur les « devoirs à la maison » (Cirade, 2011) – alors que dans d'autres cas elles émergent de façon sporadique – je pense notamment à celles qui concernent les angles alternes-internes (Cirade, 2008).

Les questions de Margot sont de celles qui se posent aux élèves professeurs de deuxième année ; en première année, là où se prépare le CAPES, le dispositif des questions de la semaine permet de mettre en évidence les difficultés d'ordre mathématico-didactique rencontrées par les futurs professeurs dans cette première année de formation qui constitue une part substantielle de la préparation au métier. Ces difficultés sont essentiellement, mais pas uniquement, celles qui sont relatives aux mathématiques qu’ils étudient pour préparer le CAPES (Cirade, 2006, chapitre 2), mais il est un point important que l’analyse des questions rédigées au fil des années par les étudiants révèle : ces derniers sont amenés

> … à soumettre – de façon mi-imaginaire, mi-réelle – [leur] propre rapport aux mathématiques au rapport supposé d’une instance tutélaire – l’institution du CAPES – et donc à avoir, tendanciellement, non un rapport « direct » aux mathématiques, mais un rapport au rapport aux mathématiques de cette instance tutélaire, c’est-à-dire, en fin de compte, un rapport soumis à des contraintes elles-mêmes extra-mathématiques, ce qu’on pourrait appeler un rapport « aliéné », jamais complètement assumé à titre proprement personnel. (Cirade, 2006, p. 118)

Ce type de rapport aux mathématiques ne manquera pas de peser sur la suite de la formation – et, ultérieurement, sur l’exercice du métier –, quand l’élève professeur stagiaire « [découvrira] plus ou moins vite que, dans des contextes et des modalités renouvelés, les mathématiques seront indéfiniment un problème, sinon le problème du métier qu’il embrasse » (Cirade, 2006, p. 61).

1.2. Métier, noosphère et profession

Si le dispositif des *questions de la semaine* permet de faire émerger des *difficultés* rencontrées dans le métier, ce n’est bien entendu pas la seule façon de le faire. Le travail réalisé par A. Pressiat (2017) en témoigne : à travers trois anecdotes [6], il commence par dégager certaines difficultés rencontrées dans la noosphère du métier. La première d’entre elles est repérée à l’occasion d’une visite réalisée dans la classe d’une professeure stagiaire : ni l’élève professeure, ni sa conseillère pédagogique n’arrivent à donner le nom et les caractéristiques de la transformation réalisée sur une image quand on « a poussé sur la “poignée de droite” en allant vers la gauche » (p. 680). La deuxième anecdote a lieu lors d’une réunion au ministère, où l’auteur « évoque l’originalité des vues en axonométrie parallèle utilisées dans la présentation [d’un] énoncé, par rapport aux

6. A. Pressiat précise que ce qu’il décrit sous le nom d’anecdote l’est au sens de « “bref récit d’un fait curieux ou pittoresque, susceptible d’intéresser ou de divertir”, mais également au sens étymologique de “inédit, non publié” ». (2017, p. 682)

habitudes d'enseignement en France, qui privilégient la seule perspective cavalière (avec des pointillés pour les arêtes cachées) » (p. 681) : l'auditoire bute sur la signification du mot « axonométrie ». La troisième anecdote, quant à elle, pointe des difficultés rencontrées dans la littérature au sujet des transvections. A. Pressiat conclut la présentation de ces trois anecdotes de la façon suivante :

> Ces trois anecdotes portent sur des objets mathématiques (projections parallèles sur un plan, affinités du plan, transvections du plan, perspective cavalière, perspective parallèle – ou cylindrique –, perspective centrale – ou conique) qui concernent tous la géométrie et son enseignement, et à propos desquels la profession dans son ensemble rencontre des difficultés d'importance variable, mais incontestables. Quelles praxéologies mathématiques et didactiques sont indispensables ou simplement utiles dans la conception et l'accomplissement d'un projet d'enseignement dans un master de formation de professeurs de mathématiques du secondaire à l'université ? (p. 688)

Ces trois anecdotes témoignent de difficultés qui ont été repérées dans des contextes différents (visite d'une professeure stagiaire, réunion au ministère, publications). Ce que nous allons maintenant examiner, c'est ce qui se passe – ou, plus exactement, peut se passer – après le repérage des difficultés rencontrées par les professeurs, débutants ou non, dans l'exercice de leur métier [7]. Pour cela, reprenons la façon dont Y. Chevallard (2013) modélise l'enquête qui peut advenir à partir du moment où une difficulté est reconnue :

> Une difficulté ayant été reconnue par une personne ou une institution ξ, elle peut se transmuer, pour une personne ou une institution ξ^*, en une *question* à laquelle il convient d'apporter une *réponse*. […] La reconnaissance qu'une difficulté affecte l'exercice du métier, sa transmutation en une question Q, la construction d'une réponse R et le contrôle de la validité et de la valeur de cette réponse relèvent par définition de la *noosphère du métier*. (p. 88)

7. Il en est de même avec le dispositif des questions de la semaine dans le cadre de la formation initiale des professeurs. Mais on ne développera pas ce cas-là ici.

A. Pressiat (2017) se place *de facto* dans la *noosphère du métier* lorsqu'il propose une *question* à étudier. Plus largement, parce qu'il poursuit[8] son travail d'enquête et le diffuse, la question considérée prend alors le statut de *problème pour la noosphère du métier*, soit de ce qu'on appelle, pour faire court, un *problème de la profession*.

À cet égard, rappelons que la noosphère d'une institution est « l'ensemble des institutions qui entourent [cette institution] sans en faire partie *stricto sensu* et qui se vouent à “réfléchir” sur [elle], à critiquer, suggérer, impulser, entraver les changements qui l'affectent ou pourraient l'affecter » (Cirade, 2006, p. 22) et signalons brièvement comment Y. Chevallard (2013) précise ce qu'il appelle le degré de professionnalisation de la noosphère d'un métier ou, pour faire court, le *degré de professionnalisation d'un métier*. Après avoir indiqué que « la noosphère d'un métier est une profession si elle satisfait un certain nombre de critères dont des listes diverses ont pu être dressées de manière convergente » (p. 89), il passe aux métiers pour lesquels la noosphère ne satisfait pas ces critères en rappelant que des travaux ont été réalisés, notamment par Amitai Etzioni (1969), qui permettent de définir ce que l'on appelle les *semi-professions* mais aussi d'autres cas, qui correspondent à des degrés différents de professionnalisation du métier :

> Ajoutons que, bien entendu, il est des métiers, des « petits métiers », dont le degré de professionnalisation est inférieur, voire très inférieur à celui des semi-professions : Etzioni a créé ainsi le terme de *McJob* (en référence aux restaurants McDonald's) pour désigner, précise l'article éponyme de *Wikipedia*, des emplois « where little training is required, staff turnover is high, and workers' activities are tightly regulated by managers ». (Chevallard, 2013, p. 90)

Pour simplifier, on parlera de *problème de la profession* pour désigner un problème pris en charge dans la noosphère du métier, même si le *degré de professionnalisation* de cette noosphère n'est pas tel qu'on puisse qualifier cette dernière de profession. On notera aussi que « c'est en assumant les difficultés du métier de professeur comme étant des *problèmes*, dont la résolution appelle des recherches fondamentales et appliquées appropriées,

8. On peut considérer que le travail d'enquête a déjà commencé, lors de la reconnaissance des difficultés et de la transmutation de ces difficultés en une question.

que la noosphère du métier de professeur pourra donner naissance à une profession véritable » (Chevallard, 2013, p. 90).

2. La noosphère du métier : conditions et contraintes

Pour cerner le degré de professionnalisation du métier de professeur (de mathématiques), nous prendrons ici deux exemples.

2.1. Exemple 1

Le premier exemple provient de la proposition d'une « architecture de maquette », document de travail [9] élaboré pour la mise en place des futurs masters des « métiers de l'enseignement, de l'éducation et de la formation » à la rentrée 2013. Après avoir présenté la maquette elle-même dans un tableau, les auteurs proposent des commentaires parmi lesquels se trouve le suivant (les passages composés en gras le sont dans le document d'origine) :

> Les trois UE [unités d'enseignement] « Enseigner les mathématiques du secondaire et pratique professionnelle » sont l'occasion d'introduire des **notions de didactique des mathématiques,** mais doivent faire une place importante à **l'intervention des personnels de l'inspection pédagogique régionale de mathématiques ou travaillant à temps partagé dans les EPLE** [établissements publics locaux d'enseignement]**.**

Je voudrais revenir sur le *degré de professionnalisation (de la noosphère) du métier* en considérant tout d'abord l'un des « critères d'une semi-profession », en l'occurrence le neuvième d'une des listes proposées : « Une gestion par des personnes qui ont été elles-mêmes formées à cette semi-profession et l'ont pratiquée. » (Chevallard, 2013, p. 120). Même si ce document de travail ne fait pas référence à la *gestion* de la formation initiale en master, l'insistance sur l'intervention des professionnels est révélatrice du poids que les auteurs attribuent à ces derniers. Un second extrait, qui vient par ailleurs corroborer le précédent concernant l'insistance sur l'intervention des professionnels de l'enseignement, permet d'aborder la façon dont est

9. Intitulé « Proposition de maquette pour le master MEEF parcours Mathématiques », c'est la cinquième version d'un document de travail interne élaboré par une équipe composée de personnels de l'IUFM Midi-Pyrénées et du département de mathématiques de l'université Paul Sabatier (Toulouse).

pensé l'enseignement de la didactique dans le document de travail susmentionné :

> Les UE « analyse », « algèbre et géométrie », « aléatoire » et « histoire des mathématiques » du premier semestre comportent des rappels théoriques de base, une formation à la résolution de problèmes par écrit (pour les trois premières) et à l'exposé oral de sujets du programme, ainsi que des enseignements portant sur des notions générales de didactique des mathématiques et la traduction des notions mathématiques enseignées dans la pratique professionnelle de l'enseignant. Divers sous-thèmes au sein de chacun de ces enseignements pourront être traités plus particulièrement sous cet angle de la pratique professionnelle, et cela peut être le lieu de l'intervention de personnels de l'IPR [inspection pédagogique régionale] ou à temps partagé dans les EPLE.

Le découpage d'une formation universitaire en unités d'enseignement (UE) n'est jamais neutre ; ne serait-ce que par les intitulés, il donne une visibilité aux enseignements qui sont dispensés dans la formation. On voit dans cet extrait une partie de ce découpage [10], qui rend visibles trois domaines classiques des mathématiques (analyse, algèbre et géométrie, aléatoire) ainsi que l'histoire des mathématiques. La didactique, par contre, n'apparaît que par l'intermédiaire de « notions générales de didactique des mathématiques » enseignées dans ces UE. On retrouve cette situation dans le découpage proposé lors des semestres suivants où, comme on l'a vu, ce sont les UE « Enseigner les mathématiques du secondaire et pratique professionnelle » qui sont « l'occasion d'introduire des notions de didactique des mathématiques ». Le système est fragile : dans la maquette précédente, il y avait quatre unités d'enseignement intitulées « Didactique des mathématiques et stages », une par semestre sur les deux années, qui permettaient explicitement de diffuser la didactique.

Ces remarques font écho à deux des critères proposés pour une *semi-profession*, que l'on mentionne ci-après dans la colonne de droite en faisant

10. Les quatre UE mentionnées (la quatrième est en réalité intitulée « Épistémologie et Histoire des Mathématiques » dans la proposition de maquette) sont des UE du premier semestre du M1. Elles représentent 70 % des ECTS et 79 % des heures d'enseignement de ce semestre.

figurer en regard deux des critères d'une *profession* (Chevallard, 2013, p. 120) :

Critères d'une profession	*Critères d'une semi-profession*
3. Une profession possède un corpus propre de connaissances et de savoir-faire. 5. La profession repose sur des disciplines fondamentales dont elle tire son corpus de connaissances et de savoir-faire.	4. Un corpus de connaissances et de savoir-faire moins spécialisé et moins hautement développé. 5. Une insistance nettement moindre sur les bases théoriques et conceptuelles de la pratique.

Dans les extraits du document de travail mentionné plus haut, il est question de proposer des « *notions* de didactique des mathématiques » (c'est moi qui souligne), ce qui laisse entendre une demande faible concernant le « corpus propre de connaissances et de savoir-faire » afférent, ainsi qu'une insistance minimale sur « les bases théoriques et conceptuelles de la pratique » : on retrouve là deux des critères d'une *semi-profession*. *A contrario*, on pourrait prévoir un *enseignement de didactique à visée professionnelle*, c'est-à-dire *finalisé*[11] par les besoins de la profession, ce qui nécessiterait un corpus de connaissances et de savoir-faire *spécialisé et hautement développé* ainsi qu'une insistance *importante* sur les bases théoriques et conceptuelles de la pratique, ce qui correspondrait aux critères proposés pour une *profession*.

2.2. Exemple 2

Considérons maintenant un autre point de vue avec un échange de messages disponible dans une discussion[12] de l'un des forums proposés sur le site les-mathematiques.net (2011). La formule « Partageons nos méthodes d'enseignement de notre belle matière ! » est placée en exergue de ce forum intitulé *Pédagogie*. C'est un dénommé *Slim* qui ouvre une discussion intitulée « Fractions en 6ème » en postant le message suivant[13] :

> [1] Bonsoir, à tous, je suis étudiant en IUFM, j'ai lu beaucoup de docs offciels entre autres sur ce thème et on me demande de mettre en place l'OM et une AER pour ce thème.

11. Finaliser est ici entendu au sens de « assigner un but à quelque chose » (TLFi).

12. Merci à Jean-Pierre Bourgade de m'avoir signalé cette discussion sur le forum.

13. Les échanges, dont on a noté entre crochets le numéro d'apparition dans la discussion, sont reproduits sans correction orthotypographique.

> je voudrais de l’aide svp en vous remerciant d’avance.
>
> Que mettre en évaluation vu que j’ai déja mis 3 ou 4 exos ciblés sur les compétences ou types de tâches à maitriser, et comme activité i.e les deux premiers moments de 1ère rencontre et exploration, je pense à parler de règle graduée et un autre exemple où je montre la nécessité de recourir aux fractions car 4 euros , par exemple, partagés entre 4 personnes c’est évident par contre entre 5 personnes ça ne l’est pas.
>
> Merci beaucoup

Cette discussion compte 37 messages, dont la plupart ne s’attachent pas à répondre à la question posée par Slim. Certains d’entre eux sont railleurs, comme le deuxième : « Et pourquoi pas la mise en place du PSG ? ». Les derniers, avant que l’administrateur ne ferme la discussion[14] en notant : « Bon on va fermer avant que cela ne dégénère. », sont totalement hors de propos. En fait, seuls *deux messages* semblent ambitionner d’aider Slim. Le 30e, par exemple, dont on ne peut pas dire qu’il apporte des éléments de réponse scientifiquement fondés, est reproduit ci-après :

> [30] Déjà, je pense que la majorité des élèves ont déjà entendu parler de fractions avant la sixième et qu’il peut être inutile d’introduire cette notion. On peut voir la fraction comme un gâteau, comme des proportions, comme des pourcentages et comme tu l’as dit : tout ça sert à proposer aux élèves différentes représentations intuitives (sensibles diraient d’autres) des fractions, chacune d’elles est plus pratique selon les situations voire la tournure d’esprit des élèves. Par exemple, des fractions égales et un tableau de proportionnalité, c’est pareil (sauf à l’origine).

Les autres constituent une attaque en règle contre la didactique des mathématiques et la formation en IUFM. En réponse au 5e message qui note que « tout le monde ne dispose pas chez soi d’un dictionnaire français-pédagol », Slim apporte des précisions sur son message initial avec une fraîcheur qui peut faire sourire : « [6] ok mais c’est censé être connu vu que c’est la rubrique de pédagogie ... OM c’est Organisation mathématique AER activité d’étude et de recherche ». La suite, en fait la quasi-totalité des 28 réponses (Slim a écrit 9 messages sur les 37 que compte la discussion) met

14. C’est Slim lui-même qui, dans le 29e message, demande à l’administrateur de « fermer ce topic ».

en évidence quelques éléments du *logos* qui prévaut dans (certaines parties de) la noosphère [15]. J'en reproduis ici trois extraits, qui portent sur la didactique des mathématiques, présentée comme quelque chose d'abscons et de nocif, tant parce que cela aurait pour effet de « [crasher] un système » que pour le sort que la didactique réserverait aux mathématiques (la suppression) :

> [7] Seigneur Dieu ! // Merci slim. Grâce à toi, je viens de découvrir les nouvelles méthodes officielles d'enseignement des mathématiques : transposition didactique, théorie anthropologique du didactique, praxéologie, tâches, types de tâches, genres de tâches, praxis, topos, problématique écologique, chronogénèse et topogénèse... // Vous faites vraiment ça à l'IUFM ?
>
> [12] … c'est bien la liberté d'expression et tout et tout, mais quand une ou deux mouvances ont totalement crashé un système et continue comme si de rien n'était de sévir avec des airs doctes et des sigles "savants", la question: comment on fait pour l'arrêter?
>
> [14] Comme les autres intervenants de ce fil je pense que dès que tu auras assimilé ce jargon, tu seras fin prêt pour l'étape ultime : supprimer la partie "maths" dans "didactique des mathématiques".

Bien entendu, cela n'empêche aucunement l'auteur du 12e message d'utiliser en mathématiques des références « savantes », ainsi qu'en témoigne l'une de ses interventions dans une autre discussion – la tonalité est sans commune mesure avec celle que je viens de citer – dont je ne reproduis ici qu'un court extrait : « Je voulais dire: existe-t-il un corps dénombrable algébriquement clos qui aurait la propriété que tous ses systèmes dénombrables d'équation polynomiales non trivialement impossibles ont une solution? » (Les-mathématiques.net, 2008). Mais, bien évidemment, on ne reprochera pas à l'auteur d'adopter des « airs doctes » quand il évoque un « corps dénombrable algébriquement clos »… Certains messages se démarquent des précédents, comme le suivant, rédigé par un auteur qui ne tire pas à boulets rouges sur la didactique :

15. Les intervenants du forum, qu'ils soient élèves professeurs ou professeurs en exercice, se font ici noosphériens puisqu'ils contribuent à penser (sur) le métier.

> [20] Pour jouer l’avocat du diable, la didactique on peut très bien enseigner sans , mais en faire ca n’est pas non plus un handicap.
> On utilisait des tables de logarithmes avant d’utiliser la calculatrice, ce qui ne veut pas dire qu’utiliser des calculatrices soit un marque de faiblesse ou que c’était archaïque avant.
> Après didactique des mathématiques c’est pas vraiment un branche des maths pour moi, je vois pas comment ca pourrait l’être.
> J’ai l’impression quand j’entends des profs expérimenté (et sur ce forum il y en a des jeunes et moins jeunes), que parler de didactique c’est remettre leurs compétences en cause.
> Ça m’étonne toujours ces réactions là. Après je suis peut-être naïf.
> Le peu de didactique que j’ai fait m’a pas déplu et m’a même aidé. Mais c’est sur que mon tuteur m’a apporté bien plus.
> Enfin tout ça pour dire à ce cher slim qu’il y aura encore des réactions comme ça pour ce type de topics, faut pas le prendre mal.
> Regarde aussi du coté des documents d’accompagnements sur eduscol.

On voit qu’il se sent obligé de se défendre de ne pas attaquer la didactique, en signalant d’emblée qu’il joue « l’avocat du diable » et que « le peu de didactique » qu’il a fait ne lui a pas déplu et l’a même aidé, tout en précisant que « [son] tuteur [lui] a apporté bien plus » et en rajoutant que la didactique des mathématiques et les mathématiques sont pour lui deux choses bien distinctes.

3. Une archiécole pour la profession

Nous venons de voir ici, rapidement et sur deux exemples, des conditions et des contraintes qui vont jouer sur le degré de professionnalisation du métier et qui sont directement en relation avec la formation des professeurs, ce qui fait écho aux développements proposés par A. Pressiat (2017). Parti, rappelons-le une fois encore, de la grande question suivante : « Quelles praxéologies mathématiques et didactiques sont indispensables ou simplement utiles dans la conception et l’accomplissement d’un projet d’enseignement dans un master de formation de professeurs de mathématiques du secondaire à l’université ? » (p. 688), l’auteur indique en conclusion :

> Ce voyage dans le temps et dans l'espace mathématique et culturel récent permettra, on peut l'espérer, […] de fournir à la profession tout entière des outils et des idées pour alimenter les dimensions pratique, expérimentale et même théorique de l'activité mathématique des professeurs et des élèves sur ces objets, la profession en France souffrant d'une culture dominée pendant plusieurs générations par la survalorisation de la dimension formelle ou mathématique au sens strict au détriment des trois autres dimensions précédemment citées. (p. 720)

On est là au cœur de questions décisives.

3.1. La notion d'archiécole

J'aborderai maintenant la question de la production et de la diffusion [16] des *praxéologies pour la profession* en développant la notion d'archiécole. Pour cela, je reprendrai tout d'abord un article (Chevallard & Cirade, 2009) issu d'une communication présentée lors du colloque « Qu'est-ce qu'une formation professionnelle universitaire des enseignants? », à la veille de l'intégration des IUFM à l'université. Nous écrivions alors [17] :

> Il est ainsi indispensable que le réseau des formations ait un dynamisme propre, par-delà les formations elles-mêmes, dans leur singularité individuelle ; et que ce réseau se donne sa *skholê*, soit ce qu'on peut appeler son *archi-école* (Artaud, 1993, p. 49), lieu régulateur où ce qui émerge des formations en un mouvement ascendant, *bottom-up*, qui va du métier vers la profession, trouvera à être étudié posément, à bonne distance d'une certaine culture agonistique dont le système éducatif ne cesse de pâtir, avant de revenir, en un mouvement descendant, *top-down*, de la profession vers le métier. (p. 60)

La notion d'*archiécole* a été introduite par Michèle Artaud [18] (1993), à l'occasion d'un travail portant sur la diffusion des mathématiques en économie, et notamment sur la question de la satisfaction des *besoins mathématiques* de l'institution de production des savoirs économiques. Dans

---

16. Sans oublier que, quand on parle de diffusion, il y a aussi la question de la réception.

17. J'adopte ici la graphie *archiécole*, sans trait d'union, alors que c'est la graphie *archi-école* qui a été retenue dans le texte cité.

18. Je tiens ici à remercier Michèle Artaud, à la fois pour les échanges que nous avons eus à ce sujet et pour sa relecture attentive.

son introduction, intitulée « Les sciences économiques en proie aux mathématiques », M. Artaud indique que « lorsque la production d'un savoir utilise des mathématiques (ou tout autre savoir jouant à son endroit un rôle fondamental), on peut se demander [...] par quels canaux le savoir fondamental arrive dans la sphère de la production du savoir concerné » (p. 48). Nous nous arrêterons maintenant sur la notion de *savoir fondamental*, en citant assez longuement M. Artaud :

> Le problème des interrelations entre savoirs se pose alors dans les termes suivants. Par rapport à un savoir S déterminé, il existe ordinairement des savoirs S', S", etc., utilisés – *de fait*, là encore – pour produire ce savoir et/ou pour le mettre en œuvre (comme système de production de connaissances). Ainsi, « la biologie » pourra-t-elle entrer dans un tel rapport avec, par exemple, « la biochimie », « la biophysique », voire... « la biomathématique ». Ces interrelations asymétriques entre savoirs sont un élément reconnu de la vie des savoirs : elles sous-tendent en partie, par exemple, les diverses classifications des sciences proposées au fil des siècles. Nous dirons alors que, lorsqu'un savoir S entretient avec des savoirs S', S", etc., des relations du style évoqué plus haut, les savoirs S', S", etc. sont des *savoirs fondamentaux pour* S. (pp. 41-42)

M. Artaud s'est placée dans le cas où S désigne le *savoir économique* et S' le *savoir mathématique*, en considérant donc S' comme étant l'un des savoirs fondamentaux pour S. Prenons ici pour S, non pas le *savoir économique* mais le savoir [19] que je désignerai comme étant le *savoir professionnel* – étant entendu qu'il s'agit ici de la profession de professeur [20] – soit le complexe de ce qu'on nomme les *praxéologies pour la profession* (Chevallard & Cirade, 2010) :

> … nous placerons d'abord dans une catégorie unique, ouverte, celle des praxéologies pour la profession, l'ensemble des praxéologies dont la profession peut avoir avantage à s'équiper […] On peut donc écrire ceci :

19. En 1993, M. Artaud indiquait que ce qu'elle nommait alors savoir était un « ensemble structuré de connaissances permettant de produire des connaissances » (p. 40).

20. Je ne préciserai pas s'il s'agit ou non de la profession de professeur de *mathématiques* (ou autre), afin de m'en tenir à un niveau générique qui, s'il en est besoin, pourra être spécifié.

> praxéologies pour la profession ⊃ praxéologies pour l'enseignement ⊃ praxéologies à enseigner. (p. 45)

En m'appuyant sur les travaux de M. Artaud (1993, pp. 39-50), je considérerai donc la communauté productrice du *savoir professionnel*, P_π, et celle qui est productrice du *savoir didactique*, P_∂, le savoir didactique étant considéré ici comme un savoir fondamental[21] dans la production et la mise en œuvre du savoir professionnel. En reprenant les conclusions de M. Artaud quant à l'économie et aux mathématiques, je dirai que l'institution P_π fonctionne à l'endroit du savoir didactique comme une école et sa noosphère. Autrement dit, l'institution de production des « praxéologies pour la profession » peut être regardée comme une école (de didactique), sans qu'elle soit principalement école puisque sa problématique institutionnelle reste la *production* du savoir professionnel : on dira qu'il s'agit d'une *archiécole*[22]. On notera aussi que l'institution P_π de production des « praxéologies pour la profession » est encore à l'état de « collège invisible » (Artaud, 1989, p. 5) et que c'est plutôt la *profession* aujourd'hui qui fonctionne comme une archiécole.

3.2. Praxéologies pour la profession

Ainsi qu'en témoignent notamment les développements que j'ai présentés dans la section 2.1 autour de la « proposition d'une "architecture de maquette" », si les mathématiques et, de façon différente, l'épistémologie et l'histoire des mathématiques sont des savoirs reconnus par la noosphère du métier comme étant *fondamentaux* pour le savoir professionnel, les contraintes qui pèsent sur l'école et la société – je pense notamment au *refoulement du didactique*, des plus importants dans la société – font de la didactique un savoir non pleinement reconnu comme étant *fondamental* pour le savoir professionnel, ce qui en gêne très fortement la transposition (archididactique).

De façon générale, se pose la question des conditions de la production et de la diffusion d'un savoir S' qui est fondamental pour un savoir S donné – soit, ici, du *savoir didactique*, considéré comme fondamental pour le *savoir*

---

21. Il n'est bien sûr pas le seul savoir fondamental pour le savoir professionnel.

22. L'élément formant ARCHI- est pris au sens de « qui est premier, qui est à l'origine de » (voir le TLFi).

professionnel. Cela fait écho au travail d'André Pressiat (2017) dont nous reprenons ici (partiellement) la conclusion de l'enquête qu'il a menée :

> Le lecteur aura compris que le but de l'enquête n'était pas de définir le programme d'un enseignement en master. Plus modestement, elle a permis de retrouver ou de mieux connaître les raisons d'être et les avantages de la géométrie affine, et de constater qu'elle existait dans l'enseignement post-bac avant la période des mathématiques modernes. On a vu aussi que, même à cette époque, il était possible d'en faire un enseignement dans le secondaire très différent de celui qui a été mis en place en France, moins coupé des autres secteurs de la géométrie tels que la géométrie euclidienne du plan et de l'espace. Une autre découverte (ou redécouverte) est son lien avec la projection parallèle d'un plan sur un autre, et donc avec la perspective cavalière. (p. 720)

Le travail mené par A. Pressiat porte sur l'enseignement de la géométrie affine et contribue ainsi à développer des réponses à des questions *spécifiques* du point de vue des mathématiques à enseigner, participant en cela à la production des praxéologies pour la profession.

Je voudrais conclure en proposant un autre abord, *complémentaire* et plus *générique*, portant sur l'organisation didactique des formations, et mettre en évidence les besoins en *savoir didactique* qui résultent de ce choix. L'idée est la suivante : considérant que le type de tâches emblématique du professeur (de mathématiques) est de mettre en place, dans une classe de collège ou de lycée, une certaine organisation praxéologique (de nature mathématique), on est amené à considérer la question technique qui lui est naturellement associée : « Comment mettre en place, dans une classe de collège ou de lycée, telle organisation praxéologique (de nature mathématique) ? » Pour aborder en formation cette question professionnelle Q et élaborer une réponse $R^{\heartsuit}$, on peut *enquêter*, ce que l'on modélise à l'aide du schéma herbartien : $[S(X\,;\,Y\,;\,Q) \curvearrowright M] \hookrightarrow R^{\heartsuit}$, où le milieu pour l'étude, M, est constitué de réponses $R_i^{\Diamond}$ observées dans la culture ou les pratiques professionnelles, d'œuvres O_k qui permettent d'étudier ces réponses $R_i^{\Diamond}$ afin de produire une réponse $R^{\heartsuit}$, mais aussi de questions Q_j surgies au fil de l'étude (Chevallard, 2017, p. 47), ce que l'on note :

$$M = \{R_1^{\Diamond}, R_2^{\Diamond}, \ldots, R_n^{\Diamond}, Q_{n+1}, \ldots, Q_m, O_{m+1}, \ldots, O_p\}.$$

Pour modéliser l'enquête, on peut aussi s'appuyer sur le modèle cyclique des *gestes de base de l'étude* que l'on rappelle ci-après et qui a pour intérêt de faire voir le travail à réaliser sur les œuvres, notamment sur les réponses $R^{\lozenge}$:

1. *Observer* des œuvres, notamment des réponses $R^{\lozenge}$, existant dans la culture ou les pratiques professionnelles.
2. *Analyser*, au double plan clinique/expérimental et théorique, ces œuvres, notamment les réponses $R^{\lozenge}$.
3. *Évaluer* ces mêmes réponses $R^{\lozenge}$.
4. *Développer* une réponse propre $R^{\heartsuit}$.
5. *Diffuser et défendre* la réponse $R^{\heartsuit}$ ainsi produite.

Dans le cas considéré ici, à la question Q : « Comment mettre en place, dans une classe de collège ou de lycée, telle organisation praxéologique ? », le milieu pour l'étude M peut se constituer à partir d'éléments comme les suivants : a) des *séances en classe*, qui constituent des réponses $R_i^{\lozenge}$ et que l'on peut observer par le biais d'un compte rendu, d'une vidéo, de traces écrites d'élèves, etc. ; b) des *questions* portant d'une part sur les savoirs enjeu de l'étude durant la séance et d'autre part sur la façon dont l'étude est réalisée, qui constituent des questions Q_j ; c) des *praxéologies d'étude de corpus*, qui constituent des œuvres O_k.

Comme on le voit, on va avoir à *constituer* un corpus, puis à l'*étudier*, ce qui pose le problème de la *production* et de la *diffusion* de praxéologies idoines, permettant l'observation et l'étude des praxéologies de savoir et des praxéologies de direction d'étude (Artaud & Cirade, 2012). Autant de questions à étudier dans P_{∂}.

Références

Artaud, M. (1989). *Conditions, contraintes et discours apologétique dans l'émergence de l'enseignement des mathématiques à l'âge classique. Étude de didactique historique* (Mémoire de DEA). Université Lyon 1.

Artaud, M. (1993). *La mathématisation de l'économie comme problème didactique : une étude exploratoire* (Thèse de doctorat). Université Aix-Marseille 2.

Artaud, M. (2017). Enquêter pour questionner le monde : conditions et infrastructures didactiques. Dans G. Cirade et al. (Éds), *Évolutions* *contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* (pp. 557-574). https://citad4.sciencesconf.org

Artaud, M. & Cirade, G. (2012, octobre). *Constituer et étudier un corpus : praxéologies issues de la théorie anthropologique du didactique (TAD)*. Conférence présentée lors des journées scientifiques « Curricula, didactiques, formation des enseignants : analyse de pratiques de classes. », Toulouse.

Chevallard, Y. (2013). L'évolution du paradigme scolaire et le devenir des mathématiques. Questions vives et problèmes cruciaux. Dans A. Bronner et al. (Éds), *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage* (pp. 85-120). Grenoble : La pensée sauvage.

Chevallard, Y. (2017). La TAD et son devenir : rappels, reprises, avancées. Dans G. Cirade et al. (Éds), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* (pp. 27-65). https://citad4.sciencesconf.org

Chevallard, Y. & Cirade, G. (2009). Pour une formation professionnelle d'université. Éléments d'une problématique de rupture. *Recherche et formation, 60*, 51-62.

Chevallard, Y. & Cirade, G. (2010). Les ressources manquantes comme problème professionnel. Dans G. Gueudet & L. Trouche (Éds), *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques* (pp. 41-55). Rennes : PUR.

Cirade, G. (2006). *Devenir professeur de mathématiques : entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel* (Thèse de doctorat). http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00120709/fr/

Cirade, G. (2008). Les angles alternes-internes : un problème de la profession. *Petit x, 76*, 5-26.

Cirade, G. (2011). Un passé qui ne passe pas. Le cas des « devoirs à la maison ». Dans M. Bosch et al. (Éds), *Un panorama de la TAD* (pp. 299-320). Barcelone, Espagne : CRM.

Etzioni, A. (Éd.) (1969). *The Semi-Professions and Their Organization: Teachers, Nurses, Social Workers*. New York, NY : The Free Press.

Gonthier-Maurin, B. (2012). *Le métier d'enseignant au cœur d'une ambition émancipatrice*. Rapport d'information n° 601 (2011-2012). http://www.senat.fr/notice-rapport/2011/r11-601-notice.html

Gourden, J. M. (1988). *Gens de métier & sans-culottes : Les artisans dans la Révolution*. Paris : Créaphis.

Les-mathématiques.net. (2008). *zéros de polynômes* [forum de discussion en ligne]. http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?3,351773,353000#msg-353000

Les-mathématiques.net (2011). *Fractions en 6ème* [forum de discussion en ligne]. http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?18,636695,637047

Pressiat, A. (2017). Éléments sur les apports de la théorie anthropologique du didactique à la profession et leur réception. Dans G. Cirade et al. (Éds), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* (pp. 679-725). https://citad4.sciencesconf.org

Rey, A. (Éd.). (1998). *Dictionnaire historique de la langue française*. Paris : Le Robert.

Annexe 1. Les « questions de la semaine » formulées par Margot, élève professeure en 2004-2005

1. Mon premier chapitre est une activité numérique avec les ensembles de nombres, l'arithmétique, les nombres premiers, l'écriture scientifique et la notion d'ordre de grandeur. Est-ce que je dois faire une AER pour chaque sous-partie ou est-ce qu'une activité sur les ensembles de nombres et une sur l'arithmétique suffisent ?

2. Comment faire pour justifier les propriétés et théorèmes du chapitre d'arithmétique du programme de 2[de] (nombres premiers, etc.), autrement que par des exemples ? N'est-ce pas gênant de ne rien démontrer alors que, dans le chapitre « Géométrie du plan », on demande aux élèves de faire des démonstrations ?

3. a) Quelle calculatrice suggère-t-on à un élève qui se destine à une ES ? Il faut qu'elle soit scientifique, qu'elle possède du calcul statistique et matriciel. Une TI 82 suffit-elle ?

b) La majorité des élèves de ma classe effectuent leurs exercices mais une partie non. Que faire ? Punir ?

4. En DM j'ai proposé aux élèves l'exercice suivant :

> 1. Simplifier $A = \dfrac{a}{a-b} + \dfrac{b}{a+b} + \dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$
>
> 2. Trouver a et b tels que $A = \dfrac{1}{2}$.

Un élève écrit :

> 1. $A = \dfrac{2a}{a-b}$
>
> 2. $A = \dfrac{1}{2} = \dfrac{2a}{a-b}$ donc $2a = 1$ et $a - b = 2$
>
> donc $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = -\dfrac{3}{2}$
>
> et je vérifie $\dfrac{2a}{a-b} = \dfrac{2 \times \dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}} = \dfrac{1}{2}$.

Je lui dis que les valeurs de a et b sont justes, qu'il ne s'agit que d'un exemple de couple solution et je rajoute que son raisonnement est faux : on n'a pas le droit de dire que, si $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ *alors* $a = c$ et $b = d$. Il me répond : *Si ! On a le droit…* « Lorsqu'une des deux fractions ne contient pas d'inconnue et que l'on veut déterminer les inconnues présentes dans l'autre fraction, on peut faire comme ça ! » Que répondre ? Cette « méthode » permet en effet de déterminer un couple solution. Aurais-je dû mieux formuler ma question ? Comment contrer ce type de raisonnement dans le fond comme dans la forme ?

5. Peut-on demander aux élèves d'effectuer des démonstrations pour justifier, par exemple, les règles d'ordre ?

6. Lorsque je propose un exercice, certains de mes élèves trouvent plus rapidement que d'autres et se mettent à bavarder. Comment capter cette énergie ? Lorsque je donne plusieurs exercices, l'attention des élèves sur la correction est moindre – ils cherchent les autres exercices.

7. Je commence un chapitre sur les configurations du plan essentiellement basé sur des révisions du collège et dont le but est d'apprendre à effectuer des démonstrations. Comment « schématiser » une démonstration géométrique ? Comment peut-on expliquer un raisonnement ? Peut-on parler de logique ?

8. Sur le chapitre de généralités sur les fonctions, quelles techniques les élèves doivent-ils connaître au sujet de la variation des fonctions ? Mon livre ne fait utiliser que la lecture graphique. La méthode « algébrique » (montrer que, si $a \leq b$ alors $f(a) \leq f(b)$, etc.) est-elle encore au programme de 2de ?

9. Pour le rapport de SPA [stage de pratique accompagnée], doit-on simplement donner le rapport brut de la séance observée ? Ou doit-on rajouter des éléments annexes (progression de la classe, enchaînement des séances suivantes, etc.) ?

10. Pas de question cette semaine.

11. Un élève passe au tableau pour résoudre un exercice de géométrie. Il rédige sa solution, elle est juste, mais il y a plus rapide comme raisonnement. Un élève le fait remarquer oralement. Faut-il que cet autre raisonnement soit apparent au tableau ? Que les élèves en prennent note ?

12. Comment aider les élèves à mieux voir dans l'espace, surtout pour la notion de plan et la recherche de sections planes ?

13. a) Quels sont les différents critères que l'on doit considérer dans la gestion de la classe ?

b) Que doit-on mettre dans l'analyse de la théorie ?

14. Dans le chapitre *Repérage dans le plan*, il est conseillé d'effectuer des repérages dans un tableur. Comment créer une AER pour le repérage dans un tableur ? Quel peut être son intérêt mathématique ?

15. a) Fréquemment des élèves de ma classe égarent leur livre. Le temps qu'ils le retrouvent, je leur donne quelques photocopies du livre pour qu'ils puissent faire les exercices. Mais une telle technique ne pousse pas les élèves à plus de précaution envers leur livre et n'accélère pas la recherche du livre ou la démarche au CDI pour en acquérir un autre (souvent en le payant). Que faire pour motiver le bon entretien du livre et son importance ? Les photocopies peuvent pallier un moment l'absence du livre mais ne peuvent pas le remplacer.

b) Je me suis aperçue qu'un élève ne note pas la correction des exercices ou des activités lorsqu'il ne comprend pas ses erreurs. Il pose parfois des questions pour plus d'explications, mais ce n'est pas toujours le cas. Je lui ai expliqué qu'il faut noter les corrections des exercices pour pouvoir les refaire et me montrer en AI ou à la fin des cours les endroits incompris. Je comprends son raisonnement et sa démarche intellectuelle. Je lui demande souvent s'il a compris. Mais comment le motiver à corriger ses erreurs par lui-même en écoutant la correction collective et en posant plus de questions ?

16. Au sujet des coordonnées d'un vecteur, la donnée en ligne $\vec{u}\ (a\,;b)$ et la donnée en colonne $\vec{u}\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ apparaissent dans divers documents. Quelle est la « bonne » écriture ?

17. Quelles sont les démonstrations de théorèmes exigibles au programme de 2^{de} ?

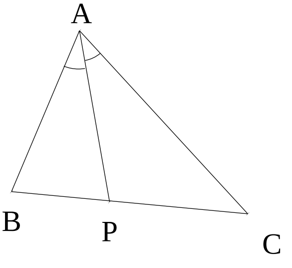
18. La notion d'équation de droite n'est plus au programme de 3^e. Mon PCP m'a dit que, en 2^{de}, il faut parler d'équation réduite et d'équation cartésienne d'une droite. L'équation cartésienne d'une droite, utile pour la résolution de systèmes, n'est plus au programme. Peut-on quand même introduire la définition d'équation cartésienne d'une droite même si elle n'est plus au programme du secondaire ?

19. Le scénario que l'on doit produire dans le mémoire de TER [travail d'étude et de recherche] peut-il ou doit-il tenir compte de la réaction des élèves ?

20. Des grèves s'annoncent et la fin de l'année approche. Comment gérer la progression et le contenu des séances lorsque la quantité des élèves présents varie ?

21. Au sujet des fonctions de référence en 2de, les fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont étudiées. Pourquoi les fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto |x|$ et $x \mapsto x^3$ ne sont plus considérées comme fonctions de référence alors qu'elles interviennent à de nombreux moments ?

22. Soit ABC un triangle quelconque. Notons P le point d'intersection de la bissectrice intérieure de $\hat{A}$ avec [BC].



Comment prouver que $\frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC}$?

23. Pas de question.

24. Comment élaborer un devoir « commun » en fin d'année ?

Étude comparative de la reprise de l'enseignement de l'aire en classe de 6^{e} en France et au Brésil

Paula Moreira Baltar Bellemain
EDUMATEC, Université Fédérale de Pernambuco, Brésil

Alain Bronner et Mirène Larguier
LIRDEF, Université Montpellier 2 (IUFM), France

Abstract. This research deals with a comparison of teaching area as a magnitude in sixth grade (11 years old students) in Brazil and in France. The study analyses the mathematical knowledge to be taught and the mathematical knowledge taught, apprehended through textbooks. To compare the choices of didactic transposition, we implemented a tool we call the filter of the magnitude area. This study allows us to bring to light the conditions and constraints on knowledge to be taught and taught in both educational institutions. Our objective is to analyse, in both Brazilian and French systems, the differences and similarities of virtual practices revealed by the study of textbooks.

Resumen. El objetivo de este trabajo es la comparación de la enseñanza de la magnitud área en Brasil y en Francia (alumnos de 11-12 años), en el nivel del *saber por enseñar* y del *saber enseñado*, este último abordado a través de libros de texto. Para comparar las elecciones de transposición didáctica, utilizamos un instrumento que llamamos el filtro de la magnitud área. Este estudio nos permite evidenciar condiciones y restricciones que pesan sobre los saberes por enseñar y enseñado en las dos instituciones escolares. Nuestro objetivo es analizar en los dos sistemas, el francés y el brasileño, las diferencias y las semejanzas entre las prácticas virtuales que revelan los libros de texto.

Résumé. Ce travail porte sur la comparaison de l'enseignement de la grandeur aire en sixième au Brésil et en France (élèves de 11-12 ans) au niveau du *savoir à enseigner* et au niveau du *savoir enseigné* appréhendé à travers des manuels scolaires. Pour comparer les choix de transposition didactique, nous mettons en œuvre un outil que nous appelons le filtre de la grandeur aire. Cette étude nous permet de mettre au jour des conditions et des contraintes pesant sur les savoirs à enseigner et enseigné dans les deux institutions scolaires. Notre objectif est d'analyser dans ces deux systèmes, brésilien et français, les différences et les similitudes des *pratiques virtuelles* révélées par l'étude de ces manuels.

IV^{e} congrès international sur la TAD (Toulouse, 21-26 avril 2013)
Axe 4. *Apports de la TAD à l'enseignement et à la diffusion des connaissances*

Bellemain, P. M. B., Bronner, A. & Larguier, M. (2017). Étude comparative de la reprise de l'enseignement de l'aire en classe de 6^{e} en France et au Brésil. Dans G. Cirade et al. (Éds), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* (pp. 753-783). https://citad4.sciencesconf.org

1. Introduction

1.1. Présentation d'une étude comparative entre le Brésil et la France

Ce travail s'inscrit dans une recherche [1] en cours dont l'objet est l'étude de l'enseignement des grandeurs géométriques dans la période actuelle en France et au Brésil. Un premier objectif est de comparer les choix de transposition didactique à l'école élémentaire et au collège dans les deux pays, à travers l'analyse des documents d'orientation curriculaire et des manuels scolaires. Dans une première phase de la recherche nous cherchons à identifier les conditions et les contraintes selon divers niveaux de codétermination didactique (Chevallard, 2002) pesant sur l'enseignement des grandeurs. Nous nous interrogeons en particulier sur la place et le rôle des manuels scolaires en France et au Brésil, dans l'enseignement primaire et secondaire, ce qui fait l'objet de la deuxième section de ce texte.

Notre cadre théorique est la théorie anthropologique du didactique, et dans ce cadre l'analyse comparative entre différentes institutions est un outil méthodologique pertinent pour « dénaturaliser » les choix de transposition didactique et identifier des similitudes et des spécificités.

Dans le cadre de cette présentation, nous avons fait le choix de restreindre nos analyses à la *reprise* (Larguier, 2009) de l'enseignement du concept d'aire de surfaces planes en classe de 6e. Prenant appui sur le filtre des grandeurs élaboré par Nathalie Anwandter-Cuellar (2012), nous construisons dans la troisième section « le filtre de la grandeur aire », qui sera l'outil théorique et méthodologique pour notre étude. Ce filtre est mis en œuvre dans la quatrième section pour analyser les rapports institutionnels aux objets « grandeurs » et « aire » au Brésil et en France.

Même si le savoir enseigné tel qu'il vit dans une classe réelle ne peut pas être appréhendé par la seule analyse des manuels scolaires, nous faisons l'hypothèse que ces manuels permettent, en tant que représentant des *pratiques enseignantes virtuelles*, d'identifier des éléments du savoir enseigné dans les classes où ces manuels peuvent être utilisés. Nous

---

1. Il s'agit d'un projet de recherche, développé à l'IUFM de Montpellier dans le cadre d'un stage post-doctoral de Paula Moreira Baltar Bellemain, financé par le Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), sous la direction d'Alain Bronner et en collaboration avec Mirène Larguier.

présentons dans la cinquième section de ce texte les résultats de l'analyse de l'enseignement de l'aire de surfaces planes proposé par un manuel scolaire de sixième en France et un manuel scolaire brésilien de niveau équivalent, grâce à la mise en œuvre du filtre de la grandeur aire.

1.2. Présentation de deux systèmes scolaires

Pour mieux cerner notre objet de recherche, nous apportons quelques éléments concernant deux niveaux supérieurs de l'échelle de codétermination didactique, la société et l'école, pour comparer les institutions auxquelles nous nous intéressons.

Le Brésil est une configuration de 26 états représentant une très grande diversité culturelle, ce qui amène l'état fédéral à choisir de ne pas imposer un programme national d'enseignement. La constitution et la Loi des directives et bases de l'Éducation nationale (LDB) préconisent la définition d'une partie commune au niveau national (dans laquelle les mathématiques sont incluses), mais aussi l'existence d'une partie du curriculum diversifiée, par respect pour la spécificité culturelle, économique et sociale des régions et des collectivités locales. Ainsi au Brésil, pour la période actuelle, il n'y a pas de programme officiel comme en France mais seulement des recommandations, *Parâmetros Curriculares Nacionais* (PCN), dont le caractère n'est pas obligatoire.

Par ailleurs, la loi brésilienne recommande à l'État fédéral d'élaborer des préconisations concernant le matériel didactique scolaire (dont les manuels) et de garantir un standard de qualité pour l'éducation scolaire. Cela justifie l'existence du *Programme national des manuels scolaires* (*Programa Nacional do Livro Didático*, PNLD), un programme relatif à l'évaluation, au choix et à la mise à disposition de manuels scolaires dans les écoles.

L'instruction est obligatoire en France de 6 à 16 ans et, au Brésil, la loi préconise que l'État est obligé de garantir l'accès à l'instruction de 4 à 17 ans. En ce qui concerne l'organisation des niveaux de scolarité, au Brésil, il y a trois niveaux : « educação infantil » (de 0 à 5 ans), « ensino fundamental » (de 6 à 14 ans) et « ensino médio » (de 15 à 17 ans). Le niveau intitulé « ensino fundamental » comprend deux étapes correspondant à l'école élémentaire (de 6 à 10 ans) et au collège (de 11 à 14 ans) en France.

C’est le niveau qui nous intéresse, où se situe la classe de sixième année au Brésil qui correspond à la classe de 6^e en France (voir annexe 1).

2. L’édition scolaire et le choix des manuels

Dans cette section nous étudions les conditions et les contraintes au niveau de la société qui conditionnent l’édition scolaire et le choix des manuels par les enseignants des deux pays.

2.1. L’édition et le choix des manuels scolaires au Brésil

En 1985, avec la création du Programme national des manuels scolaires (PNLD), une politique publique de plus en plus large autour du manuel scolaire s’installe et le gouvernement fédéral est chargé de l’acquisition des manuels scolaires qui seront fournis aux établissements pour être utilisés pendant trois ans. La mise en œuvre du PNLD suit actuellement plusieurs étapes. La première est l’adhésion volontaire des systèmes éducatifs de chaque état à ce processus, ce qui implique l’engagement à choisir uniquement des manuels scolaires validés par la commission d’évaluation du PNLD. Puis un appel d’offre destiné aux éditeurs est publié dans le bulletin officiel, qui définit le calendrier, les conditions de soumission et les critères d’évaluation des ouvrages. Les maisons d’édition, qui détiennent les droits d’auteur, inscrivent les collections, selon leur convenance, au programme du PNLD. Les ouvrages sont d’abord vérifiés par l’Institut de recherche technologique (Instituto de Pesquisas Tecnológica, IPT), en ce qui concerne les critères techniques explicités dans l’appel d’offre et, ensuite, ils sont soumis à l’évaluation pédagogique et didactique par une commission dont les résultats sont publiés dans le guide des manuels scolaires. L’équipe enseignante d’un établissement pour une discipline donnée doit se concerter pour choisir, parmi les œuvres labélisées dans le guide, le manuel scolaire qui sera adopté pour trois ans.

L’appel d’offre pour le PNLD de 2011 précise des recommandations [2] (concernant entre autres la formation pour l’exercice de la citoyenneté, l’approche des savoirs scolaires ou la contribution du manuel pédagogique destiné à l’enseignant pour son travail en classe et pour sa formation

2. L’année 2011 correspond à la dernière version du PNLD en vigueur au moment de la recherche.

continue) ainsi que des critères éliminatoires concernant soit l’ensemble des disciplines, soit spécifiquement chaque discipline. Il est notamment précisé qu’un objectif du manuel est de permettre à l’élève d’établir des relations entre les objets d’enseignement et leurs fonctions sociales et culturelles.

En ce qui concerne la partie de l’appel d’offre spécifique pour les mathématiques, des critères éliminatoires concernent la présence d’erreurs, l’absence de l’un des quatre domaines des mathématiques du collège, la répétition mécanique de procédures routinières ou la non-exploitation des concepts en tant qu’outils dans la résolution de problèmes.

2.2. L’édition des manuels scolaires en France

En France l’édition de manuels scolaires est actuellement soumise à deux contraintes au niveau de la société : d’une part la liberté pédagogique des enseignants acquise en 1875, qui comprend le libre choix des manuels ; et d’autre part la liberté d’expression des éditeurs. Le décret n°2204-922 de 2004 donne une définition du livre scolaire et précise seulement deux contraintes : suivre le programme officiel et comporter l’indication du niveau de la classe sur la couverture. Cependant il n’existe pas de contrôle *a posteriori* par des services de l’État, et il n’existe pas non plus de norme comme la marque RIP (Reconnu d’intérêt pédagogique par le ministère chargé de l’Éducation nationale) en vigueur pour les produits liés au numérique. La seule intervention qui peut s’exercer de la part du ministère de l’Éducation nationale serait la condamnation de manuels « contraires à la morale, à la Constitution et aux lois » d’après un article de loi datant de 1850. Comme le souligne le rapport Borne de 1998, le choix de la France est paradoxal dans la mesure où « les programmes sont nationaux et obligatoires parce que le principe de l’égalité d’éducation est fondateur des institutions ; le choix des manuels est confié aux enseignants comme un symbole de leur liberté pédagogique » (p. 8).

D’un côté le ministère de l’Éducation nationale donne un cadrage précis des connaissances que les élèves doivent acquérir et inscrit même dans une loi les connaissances et les compétences que l’état garantit pour tout élève sortant de l’éducation obligatoire – c’est le socle commun de connaissances et de compétences (Ministère de l’Éducation nationale [MEN], 2006), cadre de référence de la scolarité obligatoire fixé par la loi du 23 avril 2005. D’un autre côté il n'existe pas de contrôle de la multitude de manuels scolaires édités sans aucune évaluation officielle et qui sont offerts au libre choix des enseignants.

2.3. Éléments de comparaison entre le Brésil et la France

Le Brésil compte parmi les pays où s'exerce un contrôle de l'État sur l'édition scolaire, alors que la France a choisi l'indépendance entre l'édition scolaire et les services de l'État. *A priori* la liberté d'édition scolaire existe en droit au Brésil comme en France, avec une pluralité de manuels scolaires disponibles et sans système d'autorisation préalable de mise sur le marché. Cependant, comme on l'a vu, les deux pays fonctionnent différemment en ce qui concerne le rôle joué par l'État par rapport au contrôle des manuels.

Au Brésil il apparaît que le guide pour le professeur qui accompagne le manuel doit expliciter le mode d'enseignement et que le manuel doit être cohérent avec ces déclarations. En France les auteurs de manuels n'ont pas ces contraintes et la théorie de l'apprentissage, les principes pédagogique et didactique restent le plus souvent implicites, en toile de fond du manuel.

3. Un outil d'analyse : le filtre de l'espèce de grandeurs aire

Nous avons repris *le filtre des grandeurs* (voir figure 1) développé dans la thèse de Nathalie Andwanter-Cuellar (2012) à partir du *filtre du numérique* élaboré par Alain Bronner (2007). Ce filtre a été modifié en lien avec les travaux de Paula Moreira Baltar Bellemain (1996, 2002) et ceux de Paulo Figueiredo Lima et Paula Moreira Baltar Bellemain (2010). Nous l'avons prolongé en une grille de description et d'analyse des rapports institutionnels à l'objet « aire » et des *pratiques enseignantes virtuelles* relatives à cet objet en classe de sixième.

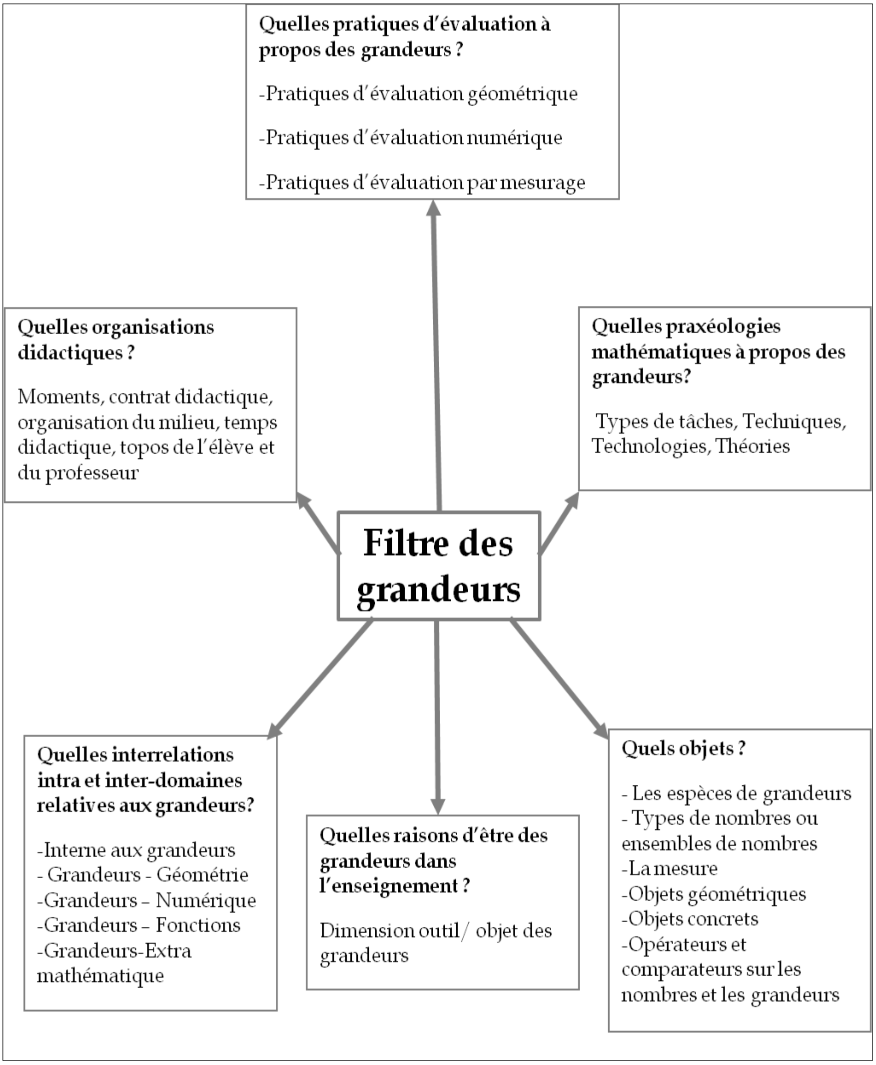


Figure 1. Filtre des grandeurs (Anwandter-Cuellar, 2012).

Nous allons décrire les éléments principaux du filtre de la grandeur « aire » que nous utilisons dans cette recherche.

3.1. La place et le rôle de l'objet « aire »

L'objet « aire » doit trouver sa place dans l'architecture globale des programmes ou des manuels, autrement dit à travers les organisations mathématiques globales, régionales, locales et ponctuelles (Chevallard, 1999). Nous regarderons ainsi la place donnée à cet objet à l'aide de l'échelle de codétermination didactique et ses articulations avec d'autres objets, en particulier avec les autres espèces de grandeurs et les différents domaines mathématiques.

Notre étude questionne, au niveau des institutions et des *pratiques virtuelles*, les raisons d'être de cet objet à travers les dynamiques internes et inter-domaines qui sont convoquées dans les situations proposées :

- la dynamique interne au domaine des grandeurs et mesures et à l'espèce de grandeurs « aire » ;
- les dynamiques inter-domaines ;
- les dynamiques extra-mathématiques pour lesquelles nous distinguons les interrelations, d'une part avec le monde réel et socio-économique, d'autre part avec les autres disciplines (physique, sciences de la vie et de la terre, géographie...).

Nous examinons notamment dans ces dynamiques si l'espèce de grandeurs « aire » est mise en relation avec d'autres objets (mathématiques ou non) et de quelles manières, ainsi que son statut objet ou outil au sens de Douady (1986) dans les situations analysées.

3.2. Les objets liés à l'espèce de grandeurs « aire »

Nous reprenons en partie les objets proposés par Guy Brousseau et Nadine Brousseau en 1991, et Guy Brousseau en 2002.

Les surfaces : les objets de l'univers de la mesure sont ici essentiellement ce que nous mettons sous le vocable de « surfaces planes » avec la distinction, souvent oubliée, entre les objets concrets (surface d'une table par exemple) et les objets géométriques (rectangle, carré, …).

L'aire sera pour nous une « espèce de grandeurs » en relation avec les espèces de grandeurs géométriques fondamentales : longueur, volume, angle, … Mais nous utiliserons aussi ce terme pour désigner parfois une aire comme valeur particulière de cette espèce de grandeurs (par exemple, l'aire de tel carré sans qu'elle soit exprimée à l'aide d'une unité d'aire).

Les fonctions-mesure sont des applications additives de l'ensemble des aires dans l'ensemble des nombres réels positifs. À chaque unité correspond une fonction-mesure différente relative à la grandeur aire.

La mesure d'une aire relativement à une unité d'aire est le nombre réel positif mis en relation par la fonction mesure.

Le terme « grandeur mesurée » se référera au couple mesure et unité (par exemple 25 cm^2 pour l'aire d'un carré de 5 cm de côté). C'est aussi ce qui anciennement était désigné par nombre concret.

La mesure, les nombres, les opérateurs et les comparateurs. Les nombres, les opérateurs, les comparateurs (Bronner, 1997, 2007), autrement dit les objets principaux du domaine numérique, peuvent être mis en relation dans des situations impliquant l'espèce de grandeurs « aire ».

3.3. Analyse des praxéologies relatives à l'aire

Les types de tâches relatifs à l'espèce de grandeurs « aire ». N. Anwandter-Cuellar (2012) a proposé une typologie de sept genres de tâches relatifs aux grandeurs, que nous spécifions en six types de tâches (de T_1 à T_6) pour l'espèce de grandeurs « aire » :

- T_1 : Comparer des aires ;
- T_2 : Déterminer une aire ;
- T_3 : Étudier les effets de déformations et de transformations géométriques et numériques sur l'aire d'une famille de surfaces ;
- T_4 : Produire une surface d'une aire donnée ;
- T_5 : Produire une surface d'une aire plus grande ou plus petite qu'une aire ou que l'aire d'un objet donné ;
- T_6 : Changer d'unités d'aire ;
- T_7 : Déterminer la valeur d'une espèce de grandeurs, autre que l'aire, dans un problème dont l'énoncé comporte des données concernant l'aire.

Nous avons en fait amalgamé en un unique type de tâches T_2 (déterminer une aire) deux genres proposés par N. Anwandter-Cuellar (instanciés en l'espèce de grandeurs aire) : calculer et mesurer une grandeur. Pour nous, c'est le type de techniques qui permettra de dire si on est davantage dans du calcul (qui peut être géométrique, graphique ou numérique) ou dans du mesurage (avec des instruments). Nous avons par ailleurs ajouté le nouveau type de tâches T_7, non présent dans la typologie de N. Anwandter-Cuellar. Voici un exemple qui relève de ce type de tâches : quel est le prix d'un terrain de 650 m^2 sachant que le prix au m^2 est de 360 euros ?

Les techniques, les technologies et les théories. Diverses théories concernant les aires ont été produites dans l'histoire des mathématiques, comme celles des mathématiciens Hilbert (1862-1943) ou Lebesgue (1875-1941), ou encore celles des didacticiens (Douady & Perrin-Glorian, 1989 ; Rouche, 1992 ; Chevallard & Bosch, 2001, 2002) que l'on retrouve en partie dans l'institution d'enseignement dans un document faisant partie de ressources pour le collège en France et intitulé « grandeurs et mesures » (MEN, 2007).

Pour poursuivre l'étude des praxéologies des institutions d'enseignement et des *pratiques virtuelles* relevant des manuels, au niveau des axes technique – technologie, nous utilisons pour chaque type de tâches les procédures identifiées dans les travaux de P. M. Baltar (1996, 1999) et N. Anwandter-Cuellar (2012). Enfin, l'étude d'une technique effective doit être complétée par la prise en compte d'une pratique d'évaluation (voir la section suivante).

3.4. Les pratiques d'évaluation de l'espèce de grandeurs aire

À la suite des travaux de A. Bronner (1997, 2007), N. Anwandter-Cuellar (2012) propose ainsi de distinguer différents types d'*évaluation d'une grandeur* : évaluation numérique (exacte ou approchée – A. Bronner donne les sous-catégories suivantes : calcul approximatif, calcul algorithmique, approximation) d'une grandeur, évaluation géométrique (exacte ou approchée) d'une grandeur et évaluation par mesurage (le plus souvent approchée).

3.5. Les organisations didactiques

Des questions spécifiques relatives à l'espèce de grandeurs « aire » seront examinées au niveau de chaque moment de l'étude comme celle des raisons d'être de cette notion, de la prise en compte des liens entre périmètre et aire, du travail sur des objets concrets ou non en classe de sixième, et du type de reprise engagé (Larguier, 2009).

4. Le savoir à enseigner relatif à l'aire en classe de 6^{e}

Nous rappelons que pour la période actuelle au Brésil, les Paramètres curriculaires nationaux (PCN) (MEC/SEF[3], 1997, 1998) n'ont pas le caractère obligatoire qu'ont les programmes français parus dans le *Bulletin officiel* (MEN, 2008). Dans les PCN les contenus à étudier et les objectifs d'apprentissages sont définis par cycle ; rien n'est dit sur ce qui est

3. MEC : Ministério da Educação e do Desporto ; SEF : Secretaria da Educação Fundamental.

spécifique pour chaque année scolaire qui compose le cycle, bien que les manuels scolaires soient bien conçus par année, alors qu’en France les programmes définissent les objectifs par cycle et par niveau. Ainsi au Brésil un même contenu peut se trouver en classe de 6^{e} dans une collection et en 4^{e} dans une autre. De plus au Brésil, le niveau du domaine est clairement identifié dans les paramètres curriculaires, mais pas celui des secteurs, et encore moins le niveau du thème, alors qu’en France les contenus sont explicités jusqu’au niveau du sujet. En conséquence nous analysons et nous comparons les préconisations données au Brésil et en France concernant le savoir à enseigner relatif à l’aire, sachant qu’elles n’ont pas la même valeur légale dans ces deux pays et qu’elles représentent donc des contraintes de poids différents.

Dans les instructions officielles actuelles françaises et brésiliennes pour l’école élémentaire et le collège, les grandeurs et mesures figurent comme un domaine et l’étude de l’espèce de grandeurs aire doit débuter à peu près au même âge (vers 9 ans). Dans les programmes français, le concept d’aire fait explicitement l’objet d’un secteur.

Le texte des PCN est plus étendu et détaillé que celui des programmes français en ce qui concerne les principes et les fondements des choix curriculaires. L’analyse globale des textes brésiliens montre que la raison d’être du domaine des grandeurs et mesures à l’école élémentaire et au collège est ancrée sur les dynamiques extra-mathématiques (avec des situations de la vie en société, ou en articulation avec d’autres disciplines scolaires) et sur des dynamiques inter-domaines, notamment avec les nombres et les opérations (y compris l’algèbre et les fonctions) et avec la géométrie (surtout au collège). La mise en évidence du caractère historique de la construction des savoirs mathématiques et la possibilité d’utiliser ce domaine dans l’étude de thèmes transversaux font aussi partie de la raison d’être de l’étude des grandeurs et mesures. Les textes français sont moins explicites sur ce dernier aspect, mais nous pouvons tout de même remarquer que le lien du domaine des grandeurs et mesures avec des situations de la vie quotidienne et des problèmes concrets ainsi qu’avec d’autres disciplines scolaires apparaît également et que la dynamique entre les grandeurs et le numérique est très accentuée.

À l'école élémentaire dans les deux pays, la détermination de l'aire (tâche de type T_2) par des techniques liées au pavage est préconisée et l'accent est mis sur la connaissance et l'utilisation des unités d'aire les plus usuelles. Les tâches de comparaison (de type T_1) sont également présentes : en France sans renvoyer à aucune technique spécifique et au Brésil en liaison implicite avec le pavage, par le choix du papier quadrillé comme support. En France les formules de l'aire d'un rectangle et d'un triangle[4] sont introduites au CM2, alors que l'usage des formules est explicitement déconseillé au Brésil à ce niveau.

En sixième, dans les deux pays, les techniques géométriques sont présentes dans les textes officiels. Cependant l'importance d'un travail sur les procédures de décomposition et recomposition, notamment pour donner du sens aux formules, est soulignée au Brésil alors que ce type de techniques n'est plus présent dans le programme français. *A contrario*, les changements d'unité d'aire ne sont pas explicitement préconisés au Brésil, alors qu'ils figurent parmi les capacités attendues en France. Les questions autour de l'estimation sont présentes dans les instructions des deux pays, avec une demande plus forte au Brésil. La dissociation entre l'aire et le périmètre est un des objectifs exprimés dans le programme en France. En sixième, les formules de l'aire d'un rectangle et d'un triangle sont reprises et celle du disque est ajoutée dans le programme français. Au Brésil, d'une manière générale, le travail sur les formules n'est indiqué explicitement qu'au quatrième cycle d'apprentissage qui correspond aux classes de 4^e et 3^e en France.

5. Le savoir enseigné vu à travers le manuel scolaire

Nous avons choisi dans un premier temps de la recherche, pour chacun des deux pays, un manuel scolaire parmi ceux prenant une part raisonnable de marché, sans être le plus distribué. Pour la France, il s'agit d'un manuel de la collection Myriade rédigé par Yvan Monka, Véronique Nicolle et Stéphane Percot (2009) ; pour le Brésil, il s'agit du manuel *Tudo é Matematica* rédigé par Luiz Roberto Dante (2009). Dans le cadre de cette communication nous mettons en lumière les résultats significatifs de notre travail d'analyse des

4. D'après le programme de 2008 mais un complément au programme de primaire de 2012 a supprimé l'aire d'un triangle quelconque au niveau du CM2.

deux manuels en lien avec certains critères du filtre des grandeurs (section 3).

5.1. Le rôle et la place de l'objet « aire de surfaces planes » dans le manuel scolaire de 6^{e} de la collection Myriade

Commençons, comme indiqué dans notre méthodologie (section 3), par étudier la place de l'espèce de grandeurs dans l'architecture globale du manuel et notamment ses interrelations avec les différents domaines mathématiques. Le manuel français est structuré en 13 chapitres s'enchaînant les uns à la suite des autres sans partition officielle :

Chap. 1 : Nombre entiers et décimaux
Chap. 2 : Addition et soustraction
Chap. 3 : Multiplication
Chap. 4 : Division
Chap. 5 : Écritures fractionnaires
Chap. 6 : Proportionnalité
Chap. 7 : Organisation et représentation des données.
Chap. 8 : Règle – Équerre – Compas
Chap. 9 : Rapporteur, angles
Chap. 10 : Symétrie axiale
Chap. 11 : Figures usuelles
Chap. 12 : Périmètre et aire
Chap. 13 : Parallélépipède rectangle – Volume.

Aucune suggestion n'est donnée pour modifier cet ordre ou alterner les chapitres, on peut donc penser que la progression implicite dans une *pratique virtuelle* conforme au manuel français est l'ordre de cette programmation. Dans cette perspective, la structuration implicite du manuel s'inscrit dans l'organisation globale suivante au niveau des domaines [5] :

I. Nombres et calcul (chapitres 1 à 5)
II. Organisation et gestion de données, fonctions (chapitres 6 et 7)
III. Géométrie (chapitres 8, 9, 10, 11 et 13)
IV. Grandeurs et mesure (chapitre 12)

5. Les domaines indiqués font référence au programme actuel du collège (MEN, Bulletin officiel spécial n° 6 du 28 août 2008).

Les interrelations avec le domaine des nombres et calcul. Des interrelations complexes entre le domaine des grandeurs et le domaine numérique se nouent à travers de nombreux exercices qui utilisent, mobilisent ou se fondent sur les grandeurs – notamment prix, durée, masse et longueur –, mais de manière très variable selon les différents secteurs. Dans les chapitres 1, 2, 3 et 4 (Nombre entiers et décimaux ; Addition et soustraction ; Multiplication ; Division), des contextes liés aux grandeurs masse, prix, durée et longueur se retrouvent dans presque toutes les activités et les exercices, cependant aucun n'évoque un contexte faisant intervenir surface et aire.

Par contre, curieusement, peu de grandeurs sont présentes dans le chapitre 5 sur les « Écritures fractionnaires ». La présence de la grandeur *aire* dans ce secteur se réalise, de manière très implicite, à travers des partages portant sur les surfaces elles-mêmes et non sur les aires (voir figure 2).

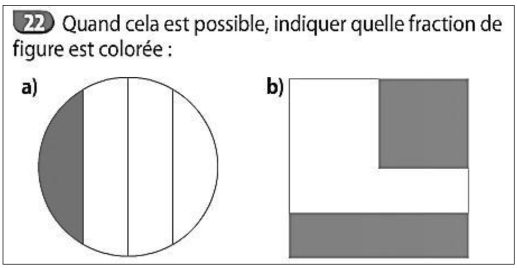


Figure 2. Chapitre sur les « Écritures fractionnaires » : présence de la grandeur *aire*.

Les interrelations avec le fonctionnel. Dans les chapitres 6 « Proportionnalité » et 7 « Organisation et représentation des données », les grandeurs sont omniprésentes : elles se retrouvent pratiquement dans toutes les activités, toutes les illustrations, et tous les exercices et problèmes. Cette omniprésence n'est pas à l'actif de la grandeur *aire*. Par exemple, sur les quatre-vingts activités ou exercices du chapitre 6, on ne relève son apparition que dans deux exercices.

Les interrelations avec le géométrique et les autres grandeurs géométriques. Le domaine géométrique, constitué des chapitres 8 à 13 (excepté le chapitre 12), est l'espace quasi exclusif de la grandeur « longueur », bien qu'on ne note pas de reprise d'un travail en tant qu'espèce de grandeurs.

« L'angle », seule espèce de grandeurs ayant vraiment droit de cité dans ce domaine avec la « longueur », est engagé solidairement dans des tâches de construction de figures. Seuls deux exercices (chapitre 11, n^{os} 35 et 43, p. 184) mobilisent la grandeur *aire* dans le domaine géométrique. Une seule référence officielle à l'aire peut être repérée, à travers un élément technologique de conservation de la « symétrie axiale » : « Propriété : La symétrie axiale conserve l'alignement, les distances, les angles et les aires » (chapitre 10, p. 176). Ainsi l'espèce de grandeur *aire* est laissée en attente d'un travail dans un secteur spécifique, que nous analyserons plus loin.

Le « volume » complète les interrelations des grandeurs avec le domaine géométrique dans le secteur consacré à l'étude des solides de type parallélépipède rectangle et au calcul de leur volume (chapitre 13), sans qu'aucun lien avec l'aire ne soit évoqué.

Il est remarquable que les auteurs évitent soigneusement de proposer des exercices sur les aires dans tous les chapitres précédents, les réservant au chapitre 12 portant spécifiquement sur cette espèce de grandeurs, chapitre que nous allons analyser dans la suite.

La constitution du domaine des grandeurs et mesures dans le manuel de 6^{e} de la collection Myriade et son organisation didactique. Il ne se dégage pas un large domaine « grandeurs », traité en tant que tel – il est en fait entremêlé officiellement avec le domaine géométrique. Dans ce manuel, en dehors de l'angle dans un chapitre de géométrie, les grandeurs sont travaillées spécifiquement dans le seul chapitre 12 « Aire et périmètre ». Ce dernier est structuré de la même manière que tous les autres en un exercice « pour revoir », pouvant jouer le rôle de reprise, des « activités » intitulées « Aire d'une figure », « Longueur d'un cercle » et « Aire d'un triangle », suivies d'un « cours » et d'exercices.

L'institutionnalisation est constituée d'un bloc technologico-théorique (pp. 208-209) reposant sur une définition de l'« aire d'une figure » comme étant « la mesure de la surface délimitée par cette figure », un tableau d'unités du système métrique (du millimètre carré au kilomètre carré), les formules de l'aire des polygones particuliers cités dans le programme officiel (triangle quelconque, triangle rectangle, carré, rectangle) et de l'aire du disque. Un bloc *praxis* (pp. 210-211), fait aussi l'objet de l'institutionnalisation et concerne les savoir-faire relatifs à la conversion d’unités, au calcul du périmètre et à l’aire du disque. La construction du bloc technologico-théorique se réalise dans la partie dite « Activité » (p. 207), ici nommée « Aire d’un triangle », sous la forme d’un problème guidé par des questions intermédiaires à partir de la décomposition du triangle selon une hauteur et de la recomposition comme demi-rectangle selon le schéma de la figure 3 (p. 201).

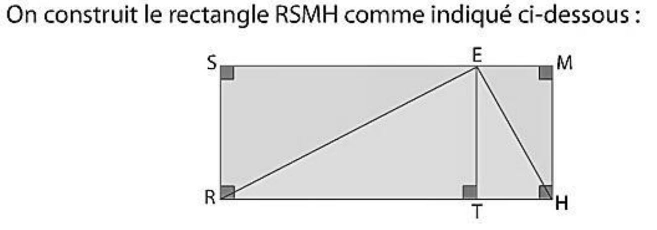


Figure 3. Aire d’un triangle : construction du bloc technologico-théorique.

Cette activité a ainsi comme fonction principale l’élaboration de l’élément technologique que constitue la formule de l’aire du triangle et d’une technique numérique associée. Cette formule représente la principale nouveauté du secteur avec le périmètre et l’aire du disque, et le manuel propose de nombreuses séries d’exercices relevant de ce type de tâches. L’élément technologique annoncé sur le calcul de l’aire du disque ne fera pas l’objet d’une activité mais d’une information directe dans le cours (p. 209) comme le montre la figure 4.

PROPRIÉTÉ : L’aire d’un disque est égale au produit du nombre pi (noté π) par le carré du rayon de ce disque.
En notant *A* l’aire du disque et *r* le rayon du disque, on a : $A = \pi \times r^2 = \pi \times r \times r$

Figure 4. Aire du disque : une information dans le cours.

Le sous-type de tâches « calculer l’aire d’un disque » amène le seul « savoir-faire » institutionnalisé dans ce chapitre relatif au type T_2, à partir de l’exemple suivant : « Calculer l’aire d’un disque de diamètre 4 cm. On donnera le résultat arrondi au centième près. » La technique relève d’une pratique d’évaluation de type *calcul approximatif* selon deux modalités :

- mentalement : « Le nombre π est à peu près égal à 3,14. Donc l’aire du disque est à peu près égale à 3,14 × 2 × 2, c’est-à-dire 12,56 cm^2. »

− avec une calculatrice : « On tape $\pi \times 2 \times 2$ sur une calculatrice… une valeur approchée au centième près de l’aire du disque est 12,57 cm^2. »

La place et le rôle des types de tâches relatives à la grandeur « aire ». Pour poursuivre l’analyse de l’organisation mathématique de ce secteur, nous commençons par donner la répartition des exercices et activités dans le chapitre 12 selon la typologie présentée à la section 3.3 (voir tableau 1).

Types de tâches	Spécimens du chapitre 12	Pourcentage
T_1	10	9 %
T_2	53	50 %
T_3	0	0 %
T_4 et T_5	12	11 %
T_6	24	23 %
T_7	7	7 %
Total	106	100 %

Tableau 1. Exercices et activités du chapitre 12 : les types de tâches.

Le type de tâches T_2 (Déterminer une aire) forme le principal objet de l’étude du thème « aire » avec 53 spécimens à travers la centaine d’activités, d’exercices ou de problèmes proposés dans le chapitre 12. Le traitement et la mobilisation du calcul de l’aire de *polygones particuliers* (de dimensions données) occupent une place imposante dans le secteur « périmètre et aire ».

Le travail praxéologique sur le type de tâches T_1 (Comparer des aires) comporte en tout 10 activités ou exercices. Les exercices sont en général de deux types :

− des exercices sur papier quadrillé comme dans le QCM (p. 206) présenté dans la figure 5 :

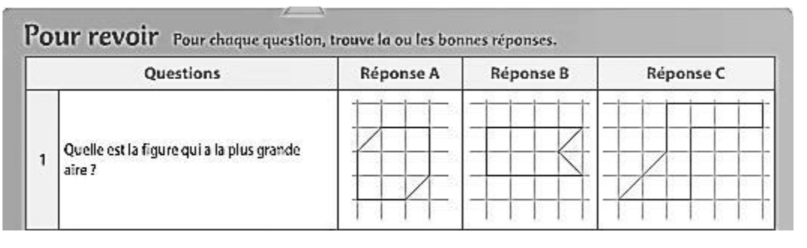
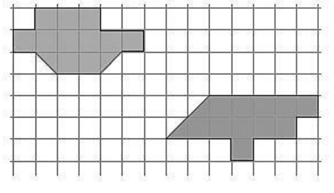


Figure 5. Travail sur T_1 : un exercice sur papier quadrillé.

− des exercices de type « comparer » ou « ranger » des aires mesurées (par exemple 542 cm^2 et 5,35 dm^2), la technique se ramenant à la comparaison des mesures.

Pour la plupart des spécimens de T_1 proposés, le caractère de reprise est ainsi avéré, on peut faire l'hypothèse qu'il s'agit d'une reprise à l'identique, selon la typologie de M. Larguier (2009).

Les deux types de tâches T_4 (Produire une surface d'une aire donnée) et T_5 (Produire une surface d'une aire plus grande ou plus petite qu'une aire) sont intimement mêlés comme dans une première « activité » du manuel (p. 206) dans laquelle les élèves doivent, notamment, tracer un polygone qui a « la même aire que le polygone vert mais un périmètre plus grand [ou plus petit] » sur un support quadrillé (voir figure 6).



1. Voici deux polygones représentés sur un quadrillage :
a) Comparer les aires de ces deux polygones.
b) Comparer les périmètres de ces deux polygones.
c) Que peut-on en conclure ?

2. En utilisant le quadrillage du cahier, tracer, dans chaque cas, un polygone qui a :
a) le même périmètre que le polygone bleu mais une aire plus grande ;
b) le même périmètre que le polygone bleu mais une aire plus petite ;
c) la même aire que le polygone vert mais un périmètre plus grand ;
d) la même aire que le polygone vert mais un périmètre plus petit.

Figure 6. Travail sur T_4 et T_5 : tracé de polygones.

Comme le montrent clairement les questions posées et le choix des figures de départ, à savoir deux polygones ayant même aire et des périmètres différents, les auteurs veulent montrer l'indépendance des variations des grandeurs aire et périmètre, dans le but de les différencier. Ces types de tâches jouent ainsi un rôle particulier dans ce manuel en s'inscrivant clairement dans l'objectif de « différencier aire et périmètre », annoncé en début de chapitre.

Comme nous l'avons déjà vu, la praxéologie associée à T_6 (Changer d'unités d'aire) fait l'objet d'une institutionnalisation. La technique pour traiter les vingt-quatre items relevant de ce type de tâches T_6 fait l'objet d'un « savoir-faire », institutionnalisé et présenté à partir d'exemples, et s'appuie implicitement sur la proportionnalité.

Sept exercices s'inscrivent dans le type de tâches T_7. On trouve essentiellement des exercices du cadre géométrique portant sur des figures usuelles comme indiqué dans la figure 7 où il s'agit de déterminer une longueur, une aire étant connue.

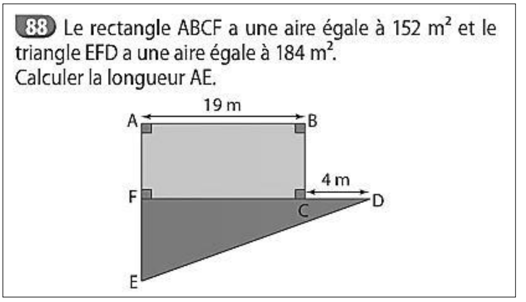


Figure 7. Travail sur T_7 : détermination d'une longueur.

5.2. Le rôle et la place de l'objet aire de surfaces planes dans le manuel scolaire de 6e brésilien *Tudo é Matemática*

Le manuel *Tudo é Matemática* (Tout est mathématiques) (Dante, 2009) fait partie de l'une des dix collections labélisées au PNLD 2011 (MEC/SEB[6], 2010) et utilisé dans les classes de sixième[7] sur la période de 2011 à 2013. Il est organisé en 10 chapitres[8] :

Chap. 1 : Nombres naturels et systèmes de numération
Chap. 2 : Operations fondamentales avec des nombres naturels
Chap. 3 : Puissance, racine carrée et expressions numériques
Chap. 4 : Géométrie : solides géométriques, régions planes et contours
Chap. 5 : Diviseurs et multiples des nombres naturels
Chap. 6 : Fractions et pourcentages
Chap. 7 : Nombres décimaux
Chap. 8 : Géométrie : angles, polygones et cercles
Chap. 9 : Grandeurs et mesures
Chap. 10 : Périmètres, aires et volumes

Sur les huit premiers chapitres, six sont consacrés au domaine des nombres et opérations, intercalés par deux chapitres consacrés à la géométrie, suivis des deux derniers chapitres dédiés à l'étude du domaine des grandeurs et mesures.

---

6. MEC : Ministério da Educação ; SEB : Secretaria de Educação Básica
7. Étant donnée la correspondance entre les classes de collège en France et au Brésil, présentée en annexe 1, pour faciliter la lecture et la comparaison entre les deux pays, nous utiliserons les noms des classes françaises, y compris pour désigner les classes de niveau équivalent au Brésil.
8. Les titres des chapitres sont des traductions libres du portugais.

Les grandeurs et mesures trouvent ainsi leur place, en tant que domaine, par l’existence d’un chapitre consacré à une étude d’ensemble (chapitre 9), suivi du chapitre 10 sur les grandeurs géométriques, l’objet aire y figurant en tant que thème d’étude.

Les interrelations avec le domaine des nombres et opérations. Bien que les grandeurs et mesures ne soient un objet d’étude qu’à la fin du manuel scolaire, elles sont omniprésentes tout le long de l’ouvrage en tant que raisons d’être motivant des objets géométriques, ou outil pour résoudre des problèmes ou encore en tant qu’habillage pour l’étude du domaine numérique.

– *Les grandeurs comme raisons d’être des objets numériques*. Par exemple, dès le premier chapitre, consacré à l’étude des nombres et des systèmes de numération, l’aire des surfaces planes est mise en œuvre à travers une dynamique extra-mathématique. Ainsi à l’introduction du chapitre 1, on trouve des illustrations montrant la présence des nombres dans la société, en tant que mesures de grandeurs, comme la mesure de l’aire du territoire de la ville de São Vicente (la première ville fondée au Brésil). Des exemples de ce type ne sont pas rares, autant dans les cours que dans les exercices.

– *Les grandeurs comme simple habillage*. Les mesures d’aire de territoires, comme celle du territoire brésilien, ou d’états de la fédération ou encore de terres cultivées, sont utilisées comme simples habillages pour l’étude de plusieurs thèmes mathématiques : grands nombres, décompositions additives des entiers en lien avec le système de numération décimal, puissances de 10, notation scientifique. On retrouve aussi cet usage à propos du travail sur les valeurs approchées comme dans l’exercice présenté dans la figure 8.

53 Observe no quadro a extensão (área) das cinco regiões do Brasil (IBGE, 2007). Copie-o em seu caderno e complete-o com os arredondamentos indicados. Depois, responda às questões propostas.

Fonte: Adaptado de *Atlas geográfico escolar*, IBGE, Rio de Janeiro, 2007.

Regiões	Área (em km²)	Arredondamento para unidade de milhar	Arredondamento para dezena de milhar	Arredondamento para centena de milhar
Norte	3 853 327	3 853 000	3 850 000	3 900 000
Sul	576 410	576 000	580 000	600 000
Sudeste	924 511	925 000	920 000	900 000
Nordeste	1 554 257	1 554 000	1 550 000	1 600 000
Centro-Oeste	1 606 372	1 606 000	1 610 000	1 600 000

a) Escreva as cinco regiões do Brasil de acordo com a ordem decrescente de suas áreas.
Norte, Centro-Oeste, Nordeste, Sudeste e Sul.
b) Em que região do Brasil você mora? Que estados formam essa região? Respostas pessoais.

Figure 8. Les grandeurs comme simple habillage : les Régions du Brésil.

Les grandeurs comme outil implicite. L'aire intervient aussi en tant qu'outil implicite comme dans l'étude des opérations sur les entiers (chapitres 2 et 3), dans la recherche des diviseurs d'un nombre entier (chapitre 5) et dans l'étude des fractions, nombres décimaux et pourcentages (chapitres 6 et 7). Par exemple, l'étude des techniques et des propriétés de la multiplication utilise l'aire de rectangles et de carrés tracés sur papier quadrillé, sans qu'il y ait une référence explicite (voir figure 9).

▼ GEOMETRICAMENTE, EM PAPEL QUADRICULADO

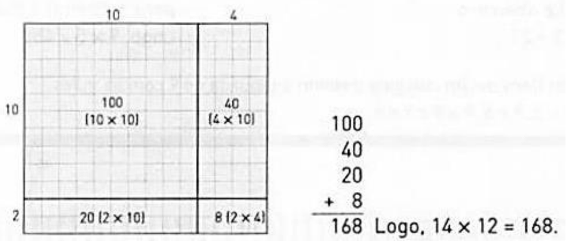
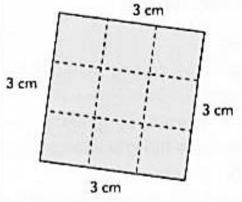


Figure 9. Les grandeurs comme outil implicite pour l'étude de la multiplication.

Les grandeurs comme outil explicite. L'aire peut jouer aussi un rôle d'outil explicite, comme pour l'étude de la racine carrée des carrés parfaits. L'idée de racine carrée est introduite par le calcul de la longueur du côté d'un carré dont l'aire est donnée (voir figure 10).



A IDEIA DE RAIZ QUADRADA

- Quando temos uma região quadrada com lados de 3 cm e queremos saber a medida de sua superfície (área), podemos:
  a) "quadricular" a figura em quadradinhos de 1 cm de lado e verificar que a área é de 9 cm^2;
  ou
  b) efetuar a multiplicação $3 \times 3 = 9$ e com isso chegar à área de 9 cm^2.
- Quando temos uma região quadrada com área de 36 cm^2 e queremos saber o comprimento de cada lado, devemos procurar o número que multiplicado por ele mesmo dê 36. Como $6 \times 6 = 36$, concluímos que cada lado dessa região quadrada tem 6 cm.

Figure 10. Les grandeurs comme outil explicite pour l'étude de la racine carrée.

La constitution du domaine des grandeurs et mesures dans le manuel brésilien et son organisation didactique. Une spécificité du manuel, à travers ce chapitre 9, est qu'il présente une revue, non seulement des différentes espèces de grandeurs, mais aussi des éléments technologiques communs au domaine des « grandeurs et mesures ». Cette organisation didactique renforce la constitution du domaine, en commençant par la reconnaissance de la présence des grandeurs et mesures dans la vie en société, partie suivie d'un texte sur l'origine historique à propos des mesures, des méthodes pour mesurer les grandeurs et des systèmes de mesures. Ce phénomène se renforce en présentant un élément technologique commun aux diverses grandeurs à l'aide de la définition suivante : « Mesurer consiste à comparer deux grandeurs de même espèce, pour vérifier combien de fois l'une contient l'autre (unité de mesure) » (Dante, 2009, p. 263). Il est tout de suite précisé que « dans une mesure, il doit toujours y avoir un nombre accompagné de l'unité de mesure utilisée ». Le manuel semble vouloir montrer que ce cadre théorique s'applique à différentes espèces de grandeurs (longueur, aire, masse, volume, capacité et même d'autres espèces de grandeurs telles que l'intensité sonore) en les introduisant par différentes situations liées à la vie de la société brésilienne.

Le chapitre 10, intitulé *Périmètres, aires et volumes*, est consacré aux grandeurs géométriques et commence, lui aussi, par une référence à des pratiques sociales. Plus spécifiquement sur l'aire, après un travail sur les aires de figures quelconques par dénombrement d'unités et de fractions d'unités, sont étudiées, dans cet ordre, les formules d'aire d'un rectangle, d'un carré, d'un parallélogramme, d'un triangle, d'un trapèze et d'un losange. La longueur d'un cercle est étudiée dans la partie consacrée au périmètre (ce qui permet d'élargir l'idée de périmètre au-delà des figures polygonales), mais la formule de l'aire du disque n'est pas traitée dans ce manuel.

La première rencontre avec l'espèce de grandeur aire, dans cette reprise en sixième, se réalise au chapitre 9, par des apports technologiques (voir figure 11).

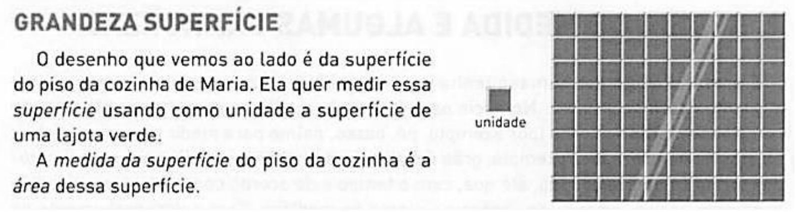
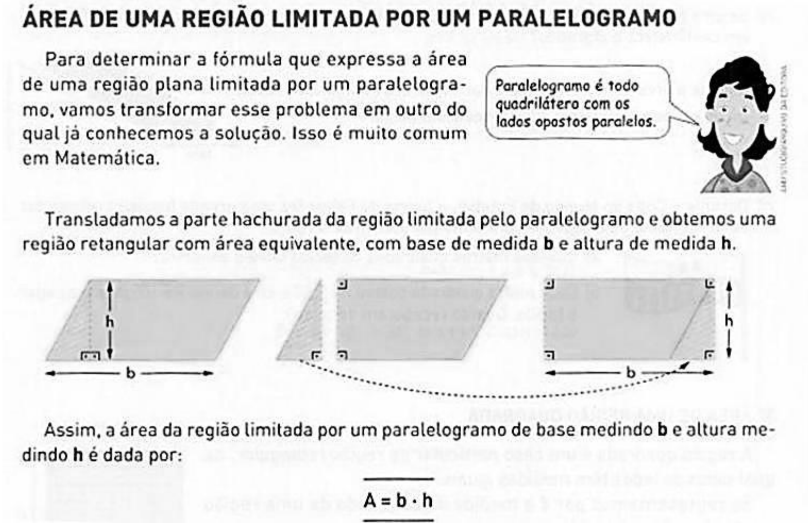


Figure 11. Première rencontre avec l'espèce de grandeur *aire*.

Le contexte est, encore une fois, celui des pratiques sociales, puisque la surface rectangulaire représente le carrelage d'une cuisine et l'approche de l'aire est, dès le départ, numérique.

Un autre apport technologique se trouve dans une section du chapitre 10, intitulée « mesure d'une superficie : aire d'une région plane », dans laquelle il est précisé que « calculer l'aire d'une figure plane c'est mesurer la région ou la portion du plan occupée par cette figure. Ceci est fait en comparant la figure à une unité d'aire. Le résultat est un nombre qui exprime combien de fois la figure plane contient l'unité d'aire considérée » (Dante, 2009, p. 298). Ce discours est cohérent avec l'idée générale de mesure annoncée au chapitre précédent.

Une partie du chapitre 10 est consacrée à l'institutionnalisation des formules d'aires des polygones. Les techniques sont du type découpages-recollements pour se ramener à un rectangle ou à un triangle rectangle, l'invariance de l'aire par décomposition et recomposition sans perte ni chevauchement restant implicite, comme dans l'exemple suivant (voir figure 12).


ÁREA DE UMA REGIÃO LIMITADA POR UM PARALELOGRAMO

Para determinar a fórmula que expressa a área de uma região plana limitada por um paralelogramo, vamos transformar esse problema em outro do qual já conhecemos a solução. Isso é muito comum em Matemática.

Paralelogramo é todo quadrilátero com os lados opostos paralelos.

Transladamos a parte hachurada da região limitada pelo paralelogramo e obtemos uma região retangular com área equivalente, com base de medida **b** e altura de medida **h**.

Assim, a área da região limitada por um paralelogramo de base medindo **b** e altura medindo **h** é dada por:

$$A = b \cdot h$$

Figure 12. Une propriété implicite : l'invariance de l'aire par décomposition et recomposition (Dante, 2009, p. 302).

La place et le rôle des types de tâches relatives à la grandeur « aire ». Le tableau 2 donne une vue d'ensemble de la distribution des exercices concernant l'aire dans les chapitres spécifiques du domaine *grandeurs et mesures* par rapport aux types de tâches de notre filtre (voir section 3).

Types de tâches	Spécimens chapitre 9	Spécimens chapitre 10	Total spécimens	Pourcentage
T_1	0	7	7	6 %
T_2	12	57	69	56 %
T_3	0	0	0	0 %
T_4	5	6	11	9 %
T_5	0	0	0	0 %
T_6	7	1	8	6 %
T_7	3	19	22	18 %
Autres	6	0	6	5 %
Total	33	90	123	100 %

Tableau 2. Distribution des exercices concernant l'aire.

La majorité des tâches sont des calculs d'aires (du type T_2). Les tâches de comparaison de l'aire (de type T_1), peu nombreuses, ne sont présentes qu'au chapitre 10 et, en général, la technique est basée sur le calcul de l'aire suivi de la comparaison des nombres en tant que mesures de ces aires.

Les tâches de type T_4, au chapitre 9, semblent viser à donner un sens à l'ordre de grandeur des unités d'aire et au changement d'unité. L'un des exercices demande à l'élève de construire une figure pour montrer que $1\ dm^2 = 100\ cm^2$ et dans un autre exercice l'élève doit indiquer, par estimation, des objets ou des lieux dont l'aire est d'environ 1 cm^2, 1 m^2, 1 km^2 et 1 hm^2.

Les tâches de changement d'unité (de type T_6) ne sont pas très nombreuses et sont concentrées au chapitre 9.

Les tâches de type T_7 ont une présence marquée dans ce manuel, surtout dans le chapitre 10. Elles concernent la plupart du temps des relations entre grandeurs géométriques (longueur, périmètre, aire et volume), mais aussi des relations entre l'aire et le prix.

Nous avons ajouté une catégorie « autres exercices », régulièrement présente dans le chapitre 9 où il est demandé de rappeler les espèces de grandeurs étudiées à l'école élémentaire, leurs noms, leurs unités, les instruments pour les mesurer, leurs usages dans la vie en société. Il s'agit d'une forme de *reprise* (Larguier, 2009) sur des tâches, non problématiques, de reconnaissance de grandeurs ou d'unités, et d'estimations de mesure.

5.3. Comparaison au niveau des manuels

Comme nous l'avons déjà indiqué, les « grandeurs et mesures » existent en tant que domaine dans le savoir à enseigner des deux pays à l'heure actuelle. Dans les deux manuels de sixième, l'aire de surfaces planes est un secteur d'étude en association avec d'autres grandeurs géométriques.

Les analyses précédentes ont montré la complexité de plusieurs dynamiques inter-domaines entremêlées. Tout d'abord, la dynamique entre le domaine des « grandeurs et mesures » et celui des « nombres et opérations » occupe une place importante dans les deux manuels, à travers plusieurs thèmes numériques faisant apparaître la mesure des grandeurs. Cette dynamique apparaît comme une importante raison d'être de l'étude des nombres. Cependant, l'aire est peu sollicitée dans ce sens dans le manuel français.

De plus, la dynamique extra-mathématique est peu présente dans le manuel français et, même en tant qu'habillage, l'aire n'est quasiment pas utilisée dans les chapitres autres que celui consacré à son étude. L'usage de l'aire en tant qu'outil est plus implicite que dans le manuel brésilien. Dans ce dernier, c'est une raison d'être importante des grandeurs, ancrée dans des dynamiques extra-mathématiques, notamment en liaison avec la géographie et les pratiques sociales (métiers du bâtiment, immobilier), et dans une forte dynamique inter-domaines avec le numérique[9]. En effet, les pratiques sociales (carreler une salle, par exemple) et des données géographiques (l'aire de territoires des états, de villes ou du pays) sont souvent en jeu, en tant qu'habillage, tout le long des chapitres autour du domaine numérique. De même, l'aire sert d'outil (explicite ou implicite) dans l'étude de plusieurs objets du domaine numérique (multiplication, fractions, diviseurs, racine carrée, etc.).

Nos analyses interrogent la manière dont est constitué ce domaine dans les manuels. Dans le manuel brésilien le domaine des « grandeurs et mesures » se dégage nettement par un discours technologique général et par une présentation de différentes espèces de grandeurs, avant de réaliser une étude spécifique de chaque grandeur, notamment les grandeurs géométriques. Dans le manuel français le domaine « grandeurs et mesures » ne se réalise qu'à travers le chapitre « périmètre et aire », et cela sans qu'aucun discours technologique plus global sur le domaine ne soit exprimé. De manière générale, peu de raisons d'être des grandeurs, et de l'aire plus particulièrement, sont mises en évidence.

Dans le secteur consacré aux grandeurs aire et périmètre, tous les types de tâches de notre typologie à propos de l'espèce de grandeurs *aire* sont présents dans les deux manuels, avec une place et un rôle variables, en dehors du type T_3 relatif aux déformations et transformations de surfaces et du type T_5 pour le Brésil.

Les manuels font la part belle aux praxéologies liées au calcul d'aires (type de tâches T_2). Les techniques mises en place pour des surfaces quelconques sont surtout basées sur le dénombrement d'unités sur un quadrillage. Ensuite les formules d'aire sont étudiées et largement utilisées (comme reprises de l'école élémentaire ou comme nouvelles introductions). Une convergence est observée en ce qui concerne la place très restreinte accordée aux techniques géométriques dans les deux manuels. Le manuel

9. Bien qu'il n'y ait pas d'obligation formelle de conformité, il y a convergence avec les critères explicités dans le PCN.

brésilien, comme dans le français, mettent en avant les éléments technologiques que constituent les différentes formules de calcul d'aires, retrouvant ainsi l'hypothèse de numérisation du concept d'aire mis en évidence dans les travaux de N. Anwandter-Cuellar (2012).

Nous avons déjà relevé dans le manuel français la niche particulière des types de tâches de production (T_4 et T_5) pour traiter la différenciation des espèces de grandeurs aire et périmètre qui fait partie des objectifs explicités par les auteurs du manuel. La différenciation entre l'aire et le périmètre, aspect délicat de l'étude de ces objets (Baltar, 1996), est travaillée de manière beaucoup plus importante dans le manuel français y compris avec l'usage des TICE, alors que l'accent dans le manuel brésilien est mis sur la présentation et l'application des formules de l'aire. Les praxéologies associées sont incomplètes, les activités et exercices sur ces types de tâches servent de *reprise* (Larguier, 2009) par rapport aux apprentissages de l'école élémentaire dans le cadre de cet objectif de différenciation.

Les tâches de conversion d'unités (type T_6) ne sont pas liées à des raisons d'être de quelque nature que ce soit et se limitent à des aspects techniques.

6. Conclusion

Dans ce travail nous avons caractérisé et comparé les choix de transposition didactique pour la reprise de l'enseignement de l'aire en classe de sixième en France et au Brésil, avec le support théorique et méthodologique du filtre de la grandeur aire. Ce travail a permis d'identifier des convergences et des spécificités pour l'étude de l'objet aire. Dans les deux pays l'aire fait partie du domaine des grandeurs et mesures présent dès l'école élémentaire. Ainsi, l'étude de l'aire en sixième reprend et approfondit le travail sur cet objet, débuté dans le cycle précédent.

Nous faisons l'hypothèse que la manière dont l'étude du domaine des grandeurs et mesures et de l'espèce de grandeurs aire est conduite dans le manuel brésilien est influencée par les recommandations du PNLD autant que par celles des PCN même si ces derniers n'ont pas un caractère obligatoire. En effet une partie des critères d'évaluation des manuels scolaires reprend des recommandations des PCN. Par exemple, le fait de ne pas traiter l'un des domaines des mathématiques du collège est un critère d’exclusion du PNLD et le lien des mathématiques avec leurs usages dans la vie sociale figure parmi les critères d’évaluation.

Ni les PCN, ni le PNLD, ne donnent des consignes précises en ce qui concerne la progression à l’intérieur d’un cycle. Bien que l’étude des formules d’aire ne soit explicitement conseillée qu’à partir de la quatrième, rien n’empêche les manuels de proposer cette étude à partir de la sixième, ce qui explique la divergence entre ce qui est préconisé par les PCN et ce qui est fait dans le manuel brésilien. La flexibilité curriculaire est un choix de société, puisqu’elle s’inscrit dans la loi des directives et bases de l’éducation nationale pour répondre à la pluralité culturelle du pays.

En France, les programmes sont plus précis et décrivent les contenus par année scolaire et dans chaque domaine jusqu’au niveau des sujets. La linéarité de l’exposé des contenus définit implicitement une progression qui se perçoit dans le manuel français. Nous retrouvons ainsi les prescriptions exprimées dans le programme de sixième, dans le travail proposé par le manuel français, pour l’aire et le périmètre.

Références

Anwandter-Cuellar, N. (2012). *Place et rôle des grandeurs dans la construction des domaines mathématiques numérique, fonctionnel et géométrique et de leurs interrelations dans l’enseignement au collège en France* (Thèse de doctorat). https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00736732/

Baltar, P. M. (1996). *Enseignement et apprentissage de la notion d’aire de surfaces planes : une étude de l’acquisition des relations entre les longueurs et les aires au collège* (Thèse de doctorat). Université Joseph Fourier, Grenoble.

Baltar, P. M. (1999). Une étude de situations et d’invariants : outil pour l’analyse de la construction du concept d’aire au collège. *Petit x*, *49*, 45-78.

Bellemain, P. M. B. (2002) Une étude comparative des choix de transposition didactique à propos du concept d’aire en France et au Brésil. Dans J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Éds), *Actes de la 11e école d’été de didactique des mathématiques* (pp. 357-361). Grenoble : La pensée sauvage.

Borne, D. (1998). *Le manuel scolaire*. http://www.ladocumentationfrancaise.fr/var/storage/rapports-publics/994000490/0000.pdf

Bronner, A. (1997). *Étude didactique des nombres réels, idécimalité et racine carrée* (Thèse de doctorat). Université Joseph Fourier, Grenoble.

Bronner, A. (2007). *La question du numérique : le numérique en questions* (Note de synthèse pour l'habilitation à diriger des recherches). Université Montpellier 2.

Brousseau, G. (2002). Les grandeurs dans la scolarité obligatoire. Dans J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Éds), *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 331-348). Grenoble : La pensée sauvage.

Brousseau, G. & Brousseau, N. (1991). Le poids d'un récipient. Étude de problèmes du mesurage en CM. *Grand N, 50*, 65-87.

Chevallard, Y. & Bosch, M. (2001). Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie I. Une Atlantide oubliée. *Petit x, 55*, 5-32.

Chevallard, Y. & Bosch, M. (2002). Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie II. Mathématisations. *Petit x, 59*, 43-76.

Chevallard, Y. (1999). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. Dans R. Noirfalise (Éd.), *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques* (pp. 91-118). Clermont-Ferrand : IREM.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. Structures & fonctions. Dans J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Éds), *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 3-22). Grenoble : La pensée sauvage.

Dante, L. R. (2009). *Tudo é matemática. 6° ano* (3e éd.). São Paulo, Brésil : Ática.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques, 7*(2), 5-31.

Douady, R. & Perrin-Glorian, M.-J. (1989). Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Educational Studies in Mathematics, 20*(4), 387-424.

Larguier, M. (2009). *La construction de l'espace numérique et le rôle des reprises en classe de seconde : un problème de la profession* (Thèse de doctorat). https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00637391/

Lima, P. F. & Bellemain, P. M. B. (2010). Grandezas e Medidas. Dans *Matemática: Ensino Fundamental. (Coleção Explorando o Ensino)* (Vol. 17, pp. 167-200). Brasília: Ministério da Educação.

Ministère de l'Éducation nationale. (2006). *Socle commun de connaissances et de compétences*. http://www.education.gouv.fr/bo/2006/29/MENE0601554D.htm

Ministère de l'Éducation nationale. (2007). *Grandeurs et mesures au collège (collection Ressources pour les classes de 6^e, 5^e, 4^e et 3^e du collège).* http://media.eduscol.education.fr/file/Programmes/16/9/doc_acc_clg_grandeurs_109169.pdf

Ministère de l'Éducation nationale. (2008). Programmes du collège. Programmes de l'enseignement de mathématiques. *Bulletin officiel spécial n^o 6 du 28 août 2008*.

Ministério da Educação e do Desporto, Secretaria da Educação Fundamental. (1997). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. 1º e 2º ciclos*. Brasília : Auteur.

Ministério da Educação e do Desporto, Secretaria da Educação Fundamental. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. 3º e 4º ciclos*. Brasília : Auteur.

Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. (2010). *Guia Nacional do Livro Didático (6º ao 9º ano). PNLD 2011*. Brasília : Auteur.

Monka, Y., Nicolle, V. & Percot, S. (2009). *Mathématiques 6^e (collection Myriade)*. Paris : Bordas.

Rouche, N. (1992). *Le sens de la mesure : des grandeurs aux nombres rationnels*. Bruxelles : Didier Hatier.

Annexe 1. Comparaison des cursus de scolarisation brésilien et français

Brésil	Educação básica															
	Educação infantil				Ensino fundamental									Ensino médio		
					Anos iniciais do ensino fundamental					Anos finais do ensino fundamental						
					1° ciclo			2° ciclo		3° ciclo		4° ciclo				
	Creche		Pré-escola		1° ano	2° ano	3° ano	4° ano	5° ano	6° ano	7° ano	8° ano	9° ano	1° ano	2° ano	3° ano
Âges	0 à 2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
France		PS	MS	GS	CP	CE1	CE2	CM1	CM2	6ème	5ème	4ème	3ème	2nde	1ère	Terminale
	Ecole maternelle				Ecole élémentaire					Collège				Lycée		
				Cycle des apprentissages fondamentaux			Cycle des approfondissements			Cycle d'adaptation	Cycle central		Cycle d'orientation			
	Ecole primaire									Enseignement secondaire						

Un phénomène d’écologie des organisations mathématiques lié à l’organisation de l’étude : le cas des probabilités

Anne Crumière
ENS de Lyon (IFÉ), France

Abstract. In this article, we focus on the probability in grade 9 (14-15 years old) as they were introduced in the secondary school curriculum in 2007. Using the notion of mathematical praxeology, it appears that the main type of tasks associate to these theme, “to determine a probability” supposes a technical ingredient, “to observe experimental frequencies”, that is underdeveloped at school. This article highlights the conditions and technical constraints of achieving the different moments of the study that hinder the emergence of the frequency definition of the concept of probability.

Resumen. En este artículo, nos interesamos por las probabilidades en clase de 3º (alumnos de 14-15 años) tal como se introdujeron en los programas de 2007. Utilizando la noción de praxeología matemática, hemos puesto en evidencia que el principal tipo de tareas asociado a este tema, «determinar una probabilidad», comporta un ingrediente técnico «observar experimentalmente las frecuencias» poco desarrollado en la enseñanza. Este artículo pondrá en evidencia las condiciones y restricciones relacionadas con las técnicas de realización de los diferentes momentos del estudio que no permiten la emergencia de la definición frecuencial de la noción de probabilidad.

Résumé. Dans cet article, nous nous intéressons aux probabilités en classe de 3e (élèves de 14-15 ans), introduites en 2007 dans le programme du collège. En utilisant la notion de praxéologie mathématique, nous avons mis en évidence que le type de tâches principal relatif à ce thème, « déterminer une probabilité », comporte un ingrédient technique « observer expérimentalement les fréquences » peu développé dans l’enseignement. Cet article mettra en évidence les conditions et les contraintes liées aux techniques de réalisation des différents moments de l’étude qui ne permettent pas l’émergence de la définition fréquentiste de la notion de probabilité.

IVe congrès international sur la TAD (Toulouse, 21-26 avril 2013)
Axe 4. *Apports de la TAD à l’enseignement et à la diffusion des connaissances*

Crumière, A. (2017). Un phénomène d’écologie des organisations mathématiques lié à l’organisation de l’étude : le cas des probabilités. Dans G. Cirade et al. (Éds), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l’école et dans la société* (pp. 785-802). https://citad4.sciencesconf.org

Les probabilités ont été introduites en troisième par le programme publié et mis en œuvre à la rentrée 2008. Examinons l'extrait du programme correspondant (Ministère de l'Éducation nationale [MEN], 2008, p. 34) :

Connaissances	Capacités	Commentaires
1.4. Notion de probabilité [Thèmes de convergence]	- Comprendre et utiliser des notions élémentaires de probabilité. - Calculer des probabilités dans des contextes familiers.	La notion de probabilité est abordée à partir d'expérimentations qui permettent d'observer les fréquences des issues dans des situations familières (pièces de monnaie, dés, roues de loteries, urnes, etc.). La notion de probabilité est utilisée pour modéliser des situations simples de la vie courante. Les situations étudiées concernent les expériences aléatoires à une ou *à deux épreuves.*

Déterminer la probabilité d'un événement attaché à une expérience aléatoire à une ou deux épreuves, noté *T*, est ainsi le type de tâches principal de la praxéologie mathématique relative à la notion de probabilité en troisième, sachant que seul le sous-type de tâches « Calculer la probabilité d'un événement attaché à une expérience aléatoire à une épreuve » est exigible pour le socle.

Regardons maintenant le programme de la classe de 2de (MEN, 2009, p. 9) :

> **Objectifs visés par l'enseignement des statistiques et probabilités à l'occasion de résolutions de problèmes *dans le cadre des probabilités*,** rendre les élèves capables :
>
> • d'étudier et modéliser des expériences relevant de l'équiprobabilité (par exemple, lancers de pièces ou de dés, tirage de cartes) ;
>
> • de proposer un modèle probabiliste à partir de l'observation de fréquences dans des situations simples ;
>
> • d'interpréter des événements de manière ensembliste ;
>
> • de mener à bien des calculs de probabilité.
>
> Les situations étudiées concernent des expériences à une ou plusieurs épreuves.
>
> ✧ La répétition d'expériences aléatoires peut donner lieu à l'écriture d'algorithmes (marches aléatoires).

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Probabilité sur un ensemble fini		
Probabilité d'un événement.	• Déterminer la probabilité d'événements dans des situations d'équiprobabilité. • Utiliser des modèles définis à partir de fréquences observées.	La probabilité d'un événement est définie comme la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent. Pour les calculs de probabilités, on utilise des arbres, des diagrammes ou des tableaux.
Réunion et intersection de deux événements, formule :		
$p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A) + p(B)$.	• Connaître et exploiter cette formule.	

Déterminer la probabilité d'un événement attaché à une expérience aléatoire à une ou deux épreuves, noté *T*, reste le type de tâches principal de la praxéologie mathématique relative à la notion de probabilité en seconde, mais l'environnement technologico-théorique s'enrichit, ce qui conduit à modifier les techniques mises en place en troisième.

On a ainsi une frontière entre la classe de 3^{e} et celle de 2de, qui se dessine de la façon suivante. Les probabilités sont définies en troisième par une approche fréquentiste, en observant que la fréquence de réalisation d'un événement a tendance à se stabiliser lors d'un très grand nombre d'expérimentations jusqu'à se rapprocher d'une fréquence « théorique » appelée probabilité de l'événement considéré. En seconde, la probabilité d'un événement est caractérisée comme la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent et on va calculer des probabilités qui étaient plutôt déterminées au moyen des fréquences en classe de 3^{e}. Les expériences à deux épreuves qui n'étaient pas exigibles pour le socle en troisième deviennent routinières en seconde.

Maintenant que la ligne de partage entre troisième et seconde a été esquissée, examinons les documents de travail de deux professeurs de troisième sur le thème des probabilités.

1. L’organisation mathématique à propos des probabilités en troisième : ce qui existe

1.1. Selon l’étude des séquences de deux professeurs

On désignera par Agathe et Milan ces deux professeurs, qui enseignent depuis plus de cinq ans. Regardons de plus près les documents de travail de la professeure Agathe. Elle suit une organisation de l’étude ternaire et a proposé comme activité un problème génétique dont nous reproduisons ci-dessous l’énoncé (figure 1).

Voici le caryotype de deux parents réduit à deux paires de chromosomes : les paires n°1 et 9.

La paire n°1 porte le gène responsable du rhésus sanguin qui existe sous deux allèles différents : Rh+ et Rh-. Rh+ est dominant par rapport à Rh-.

La paire n°9 porte le gène responsable du groupe sanguin qui existe sous 3 allèles différents : **A**, **B** et **O**. A et B sont dominants par rapport à O. A et B ont "la même force" et s'expriment tous les deux.

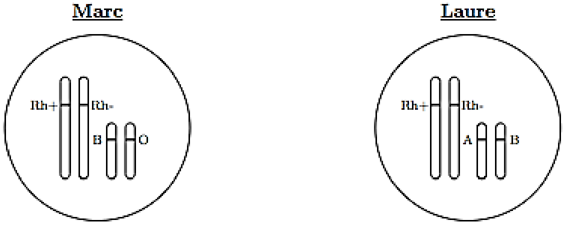


Figure 1. Activité de la professeure Agathe.

Pour démarrer sa séquence, la professeure Agathe propose donc une activité introduisant dans le milieu une autre discipline, les sciences de la vie et de la terre – plus précisément les notions de chromosomes, gènes et allèles (notions au programme de la classe de 3^{e} dans cette matière). L’énoncé est suivi d’un certain nombre de questions, reproduites ci-dessous :

1. Indiquer quel est le groupe et le rhésus de Marc ? De Laure ? Justifier vos réponses.
2. Représenter les différentes combinaisons de chromosomes possibles dans les spermatozoïdes de Marc et dans les ovules de Laure.
3. Construire un tableau donnant toutes les combinaisons de chromosomes possibles pour les enfants de ce couple.
4. Quelle est la probabilité pour ce couple d’avoir un enfant :
   a) de rhésus négatif ?
   b) du groupe sanguin B ?
   c) du groupe sanguin A et de rhésus positif ?

5. On considère que la détermination du groupe sanguin de l'enfant de Marc et Laure est une expérience aléatoire.

a) Citer un événement impossible.

b) Citer toutes les issues possibles.

c) S'agit-il d'une situation d'équiprobabilité ? Justifier.

d) Quelle est la probabilité d'avoir un enfant qui ne soit pas du groupe sanguin A ? Donner deux solutions utilisant pour le calcul une ou plusieurs probabilités : p(A), p(B) et p(AB).

Les trois premières questions permettent d'aboutir à l'élaboration d'un tableau à double entrée, outil quasi indispensable pour vérifier que l'on n'a oublié aucune issue. Nous entrons ensuite dans le vif du sujet : « Quelle est la probabilité pour ce couple d'avoir un enfant de rhésus négatif ? » Le calcul de probabilités par l'expérimentation, tel qu'il est mentionné dans le programme de troisième, ne semble pas envisagé ; seule la définition de la notion de probabilité du programme de seconde semble devoir émerger. Toutefois il faut auparavant avoir établi, ou plutôt supposé, que chaque caryotype de l'enfant a la même probabilité d'être réalisée, alors que ce problème d'équiprobabilité n'est abordé qu'à la question 5.c. Or, sans ce présupposé, il semble impossible de traiter la question 4, dès lors que la seule technique qui puisse émerger s'appuie sur la formule de Laplace : l'élève compte dans le tableau à double entrée le nombre de caryotypes contenant deux allèles Rh- et divise le nombre ainsi obtenu par le nombre total de caryotypes possibles.

En résumé, nous sommes ici face à un tableau à double entrée, mode de résolution proposé dans le programme de seconde, mais avec lequel on a beaucoup de mal à travailler avec la notion fréquentiste des probabilités en troisième. En particulier, on ne voit pas comment, lors du moment technologico-théorique, on va pouvoir justifier les assertions formulées autrement qu'en prenant appui sur un rapport culturel à la notion de probabilité que le découpage en questions laisse entrevoir et qui manifeste une visite de l'œuvre sans raison d'être malgré la situation génétique choisie comme support.

L'institutionnalisation proposée par la professeure Agathe est reproduite ci-dessous (figure 2). Ce professeur anticipe *a priori* sur le travail à faire en seconde en introduisant les probabilités d'un point de vue « ensembliste ».

Conformément à ce que nous avons observé à propos de son activité, le problème de la détermination expérimentale de la probabilité d'un événement n'est pas posé et la définition proposée laisse dans le flou la façon de déterminer le quotient qui représentera la probabilité d'un événement.

II- Probabilité

Définition 1.3. *On peut déterminer par un quotient la "chance" qu'un événement a de se produire. Ce quotient est appelé probabilité de l'événement.* (Exemple : la probabilité d'obtenir 1 sur un dé équilibré est de $\frac{1}{6}$).

Propriété 1.1.
- *Quelque soit un événement A, on a :* $0 \leqslant p(A) \leqslant 1$.
- *La probabilité d'un événement qui se produit obligatoirement (événement certain) est égale à 1.*
- *La probabilité d'un événement qui ne se produit jamais (événement impossible) est égale à 0.*
- *La probabilité de l'événement contraire de A :* $\overline{A}$ *est :* $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

Exemple : Lançons un dé équilibré.

La probabilité de l'événement A : "obtenir 1 ou 2" est égale à $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
La probabilité d'obtenir un nombre compris entre 1 et 6 est égale à 1 (événement certain).
La probabilité d'obtenir un nombre plus grand que 10 est égale à 0 (événement impossible).
La probabilité d'obtenir l'événement $\overline{A}$ vaut $1 - p(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Définition 1.4. *Lorsque toutes les issues d'une expérience aléatoire ont la même probabilité, on dit qu'il y a équiprobabilité.* (Exemple : on lance un dé équilibré).

Propriété 1.2. *Lorsqu'il y a équiprobabilité, alors la probabilité d'un événement est :* $\frac{\textit{nombre de cas favorables}}{\textit{nombre de cas possibles}}$.

Figure 2. Extrait de la synthèse proposée par la professeure Agathe.

Examinons maintenant les documents de travail du professeur Milan. D'après les documents fournis, le professeur Milan s'appuie sur deux expériences issues de situations familières, le lancer de pièce et le lancer de dé :

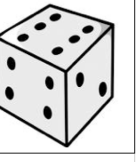
Expérience 1	Expérience 2
On lance une pièce de monnaie équilibré et on regarde sa face supérieure. 	On lance un dé à 6 faces et on regarde le nombre de points inscrits sur la face supérieure. 

Figure 3. Extrait de la synthèse proposée par le professeur Milan.

Cela laisse présager l'émergence de la notion de probabilité par une approche fréquentiste, ce qui paraît confirmé par l'institutionnalisation d'une définition de la probabilité d'un événement conforme à une approche fréquentiste : « Lorsqu'on effectue un très grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence de réalisation d'un événement se rapproche d'une "fréquence théorique" appelée **probabilité**. » Pourtant, cette définition ne semble pas exploitée pour mettre en place les modèles des principales expériences et cette synthèse se poursuit par l'extrait ci-dessous :

III Calculs de probabilités

Propriété : Quand les issues d'une expérience aléatoire ont toutes la même probabilité, alors la probabilité d'un événement A est égale au quotient :

$$P(A)=\frac{Nombre\ d'issues\ réalisant\ l'événement\ A}{nombre\ d'issues\ possibles} \qquad \left(\frac{nombre\ d'issues\ favorables}{nombre\ d'issues\ possibles}\right)$$

Exemples : Soit A l'événement « obtenir un nombre inférieur à 5 »
Les issues qui réalisent l'événement A sont : 'obtenir 1 » ; « obtenir 2 » …. ; « obtenir 5 »
Il y a donc 5 issues qui réalisent l'événement A.
Il y a 6 issues possibles.
donc $p(A)=\frac{nombres\ d'issues\ favorables}{nombre\ d'issues\ possibles}=\frac{5}{6}$

Figure 4. Extrait de la synthèse proposée par le professeur Milan.

Apparemment, ce professeur a construit la notion de probabilité avec une approche fréquentiste – bien que la raison d'être de la détermination d'une probabilité ne soit pas véritablement présente –, mais ne l'a pas utilisée pour ensuite construire une technique fondée sur cette approche. La suite de la synthèse le prouve en proposant comme technique de la classe l'utilisation de la formule de Laplace. Malgré une définition de la notion de probabilité plus conforme au programme, le professeur Milan « outrepasse », comme la professeure Agathe, le programme de troisième.

1.2. Dans les manuels de troisième : un rapport institutionnel aux probabilités peu fréquentiste

Une étude des manuels de mathématiques pour la classe de 3^{e} montre que, même si le type de tâches « Calculer la probabilité d'un événement » est généralement correctement identifié, les techniques proposées pour les expériences à une épreuve sont basées, comme nous l'avons vu chez les professeurs Agathe et Milan, sur un ingrédient technologique, la formule de Laplace, dont on peut donner la formulation suivante :

> Quand les résultats d'une expérience aléatoire ont tous la même probabilité, alors la probabilité d'un événement est égale au quotient :
>
> $$\frac{\text{nombre de résultats favorables à l'évènement}}{\text{nombre de résultats possibles}}$$

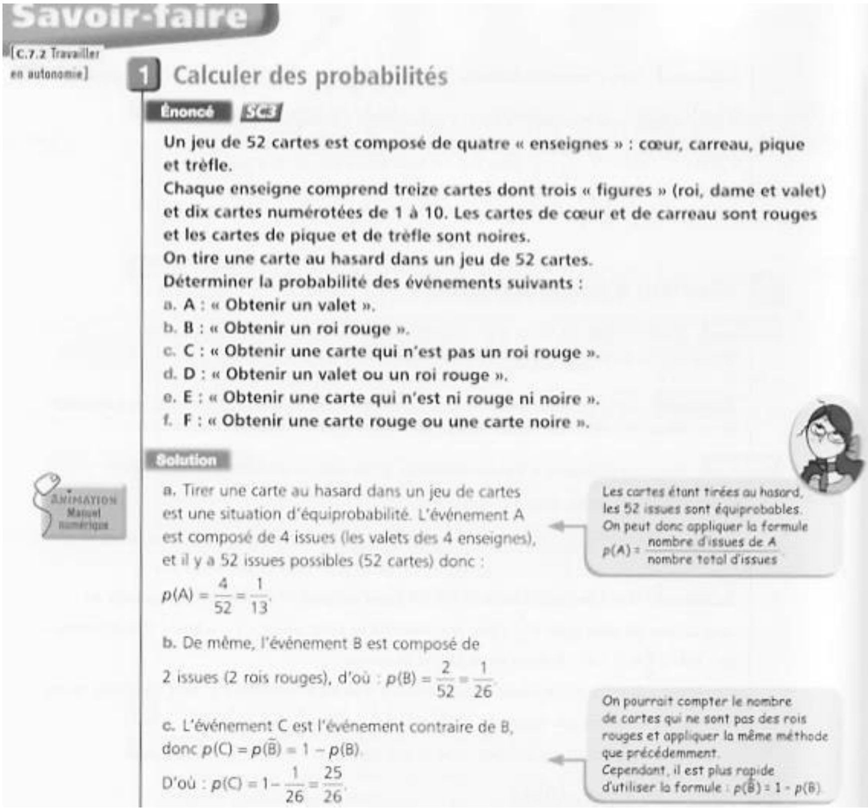
Certains manuels proposent des définitions de la notion de probabilité parfois approximatives. On en citera deux exemples :

– « La probabilité d'un événement A représente les chances que l'événement se réalise lors d'une expérience aléatoire. » (Braconne-Michoux et al., 2008)
– « La probabilité d'un événement A est la proportion probable, parmi tous les cas possibles, des cas où A sera réalisé si on répète un grand nombre de fois l'expérience. » (Andrieu, Fourton, Lanoëlle & Perrinaud, 2008)

Ces manuels mélangent, d'une façon qui n'est pas toujours compréhensible, une approche fréquentiste et une approche ensembliste. La définition donnée en seconde de la notion de probabilité, « La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des issues qui le réalisent », est dissimulée ici derrière les mots « chances » ou « proportion probable ». Sur ce point, dans une brochure publiée par l'APMEP et intitulée *Probabilités au collège : ne pas laisser l'enseignement des probabilités au hasard…*, Brigitte Chaput et Claudine Vergne (2012) proposent de « s'abstenir de donner une définition plutôt que de tomber dans de telles dérives ».

Des manuels tels ceux de la collection Nouveau Prisme ou encore Phare proposent pourtant des définitions en accord avec le programme de troisième. Voici celle que l'on peut lire dans l'ouvrage de la collection Nouveau Prisme (Cuaz, Jacob & Le Bourgeois, 2008, p. 182) : « Lorsqu'on répète un très grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence de réalisation d'un événement A se rapproche d'une "fréquence théorique" appelée probabilité de l'événement A et notée p(A). »

Cependant, ces manuels ne continuent pas à traiter ce thème avec une vision fréquentiste, comme en témoigne l'extrait ci-après qui est représentatif du rapport institutionnel au calcul de probabilités développé dans les manuels :



Savoir-faire

[C.7.2 Travailler en autonomie]

1 Calculer des probabilités

Énoncé SC3

Un jeu de 52 cartes est composé de quatre « enseignes » : cœur, carreau, pique et trèfle.
Chaque enseigne comprend treize cartes dont trois « figures » (roi, dame et valet) et dix cartes numérotées de 1 à 10. Les cartes de cœur et de carreau sont rouges et les cartes de pique et de trèfle sont noires.
On tire une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes.
Déterminer la probabilité des événements suivants :
a. **A : « Obtenir un valet ».**
b. **B : « Obtenir un roi rouge ».**
c. **C : « Obtenir une carte qui n'est pas un roi rouge ».**
d. **D : « Obtenir un valet ou un roi rouge ».**
e. **E : « Obtenir une carte qui n'est ni rouge ni noire ».**
f. **F : « Obtenir une carte rouge ou une carte noire ».**

Solution

ANIMATION Manuel numérique

a. Tirer une carte au hasard dans un jeu de cartes est une situation d'équiprobabilité. L'événement A est composé de 4 issues (les valets des 4 enseignes), et il y a 52 issues possibles (52 cartes) donc :
$p(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

Les cartes étant tirées au hasard, les 52 issues sont équiprobables. On peut donc appliquer la formule $p(A) = \frac{\text{nombre d'issues de } A}{\text{nombre total d'issues}}$

b. De même, l'événement B est composé de 2 issues (2 rois rouges), d'où : $p(B) = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$.

c. L'événement C est l'événement contraire de B, donc $p(C) = p(\bar{B}) = 1 - p(B)$.
D'où : $p(C) = 1 - \frac{1}{26} = \frac{25}{26}$.

On pourrait compter le nombre de cartes qui ne sont pas des rois rouges et appliquer la même méthode que précédemment.
Cependant, il est plus rapide d'utiliser la formule : $p(\bar{B}) = 1 - p(B)$.

Figure 5. Troisième spécimen d'une praxéologie relative à CASP (Jacob et al., 2012, p. 184).

On voit ici apparaître la notion d'équiprobabilité qui favorise l'application de la formule de Laplace clairement institutionnalisée : « On peut donc appliquer la formule ». Dans la résolution de cet exercice qui est désigné comme « savoir-faire », visant donc l'institutionnalisation d'une technique à mettre en œuvre pour résoudre les autres exercices du même type, il n'y a aucune mention de calcul de fréquences. À la question « Déterminer une probabilité », les auteurs proposent une solution sans lien avec la définition de probabilité qu'ils mettent en avant.

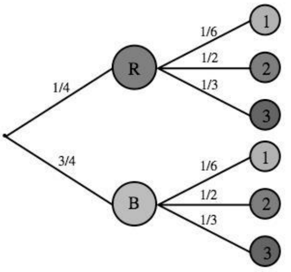
On fait donc le même constat que pour le professeur Milan : on est confronté à un fossé entre la définition de la notion de probabilité et les techniques proposées pour le calcul d'une probabilité. On notera qu'il ne s'agit pas d'un problème en soi : on a nombre de praxéologies mathématiques pour lesquelles la définition des objets prend très rapidement une fonction théorique. Le problème vient de ce que, ici, le programme de troisième demande, légitimement du point de vue de la construction du sens et des raisons d'être de la théorie des probabilités (voir *infra*), que la définition fréquentiste ait une fonction, partiellement au moins, technologique.

2. L'organisation mathématique : une idée de ce qui devrait exister

En s'appuyant sur les différents documents officiels mis à la disposition du professeur et notamment le document *Probabilités* – issu des *Ressources pour les classes de collège* –, paru en mars 2008 et mis à jour en octobre 2011 (MEN, 2011), on peut analyser la technique permettant d'accomplir le type de tâches principal *T* de la façon suivante :

> τ_1. On modélise l'expérience à l'aide d'un arbre. On pondère chaque branche par la probabilité associée à l'événement qu'elle modélise ; on vérifie que chaque probabilité est plus petite que un et que la somme des probabilités portées sur les branches est un. Si l'expérience est à deux épreuves, pour chaque chemin dans l'arbre, on multiplie les probabilités rencontrées. On somme les probabilités obtenues sur chaque chemin pour deux épreuves, ou chaque branche pour une épreuve, répondant à l'événement à déterminer.

On remarquera que l'on considère alors comme allant de soi un problème essentiel, à savoir l'obtention de la pondération sur les branches. Le document *Probabilités* cité plus haut reste dans l'ensemble muet sur ce point mais donne des ingrédients pour la justification de la technique donnant la probabilité d'un chemin : c'est « l'approche fréquentiste » qui est mobilisée à partir de l'étude d'un exemple portant sur une expérience à deux épreuves : on fait tourner une roue comportant deux secteurs, l'un rouge et l'autre bleu, puis une deuxième roue comportant six secteurs portant les numéros 1, 2 et 3 :



Comment évaluer la probabilité du résultat (R, 1) ?

L'approche fréquentiste de la probabilité permet la justification suivante :

Imaginons que l'on reproduise 120 000 (ou *N*) fois l'expérience. 1/4 de ces expériences environ suivront la branche vers R, et parmi celles-ci 1/6 environ iront vers 1.

Donc il y en a environ $\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\times 120000\right)$ ou $\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\times N\right)$, soit 5 000 (ou *N*/24) qui conduiront au résultat (R,1). La fréquence correspondante est 5 000/120 000 ou 1/24.

De manière plus générale, ceci conduit à admettre que la probabilité d'obtenir R à la première épreuve et 1 à la deuxième est égale au produit des probabilités 1/4 et 1/6, rencontrées sur le chemin représentant le résultat (R, 1).

Ce résultat peut être institutionnalisé, par exemple sous la forme suivante :

Dans un arbre, la probabilité du résultat auquel conduit un chemin est égal au produit des probabilités rencontrées le long de ce chemin.

Figure 6. Éléments d'une praxéologie relative aux probabilités en troisième, issus du document *Probabilités* (MEN, 2011, p. 12).

Cette approche permet de produire deux éléments technologiques dans le document *Probabilités* :

– la pondération sur une branche par l'expérience sur un échantillon de grande taille ;

– « la probabilité du résultat auquel conduit un chemin est égal (*sic*) au produit des probabilités rencontrées le long de ce chemin » ;

auxquels il faut ajouter le fait que la probabilité d'une issue est égale à la somme des probabilités des chemins d'extrémité cette issue.

L'obtention de la pondération sur les branches suppose que les modèles rencontrés soient enregistrés comme ingrédients technologiques, ce qui n'est pas explicité par le document *Probabilités*. Ceci est rendu possible par le petit nombre de types de situations rencontrés : roue, dé, pièce, urne pour l'essentiel. La technique pour déterminer la probabilité d'une branche sera donc fondée sur l'identification du modèle pertinent, modèle qui aura été produit par l'approche fréquentiste.

On peut penser avoir obtenu là les éléments principaux d'une analyse adéquate de l'organisation mathématique. Pourtant, l'extrait précédent relatif aux expériences à deux épreuves se poursuit de la manière suivante : « Mais cette connaissance n'est pas un objectif du programme et on ne proposera que des exemples très simples dans lesquels un raisonnement permet facilement de trouver les résultats en leur donnant du sens » (MEN, 2011, p. 12).

On notera d'abord que, d'un point de vue didactique, institutionnaliser une propriété sans qu'elle serve à la production ou la justification d'une technique n'est généralement pas pertinent. La praxéologie proposée doit donc être modifiée pour les expériences à deux épreuves, en mettant en œuvre par exemple la technique suivante, où p_i désigne la probabilité de la branche *i* que l'on suppose donnée :

> On suppose que l'on reproduise 100 fois l'expérience aléatoire ; à peu près $p_i \cdot 100 = n_i$ de ces expériences suivront la branche *i*, et parmi celles-ci à peu près $n_{ij} = p_j \cdot n_i$ suivront la branche *j*. La fréquence du chemin (*i*, *j*) serait donc à peu près $n_{ij}/100$, ce qui est la probabilité du chemin.

D'une part, on voit que cela suppose d'avoir une définition de la probabilité d'un événement comme fréquence théorique. D'autre part, il apparaît clairement d'un point de vue didactique que seules quelques expériences à deux épreuves, en petit nombre, devront être traitées pour que la propriété du produit n'émerge pas et ne fasse pas obstacle au travail à mener. Nous y reviendrons.

Voici, pour faire entendre notre propos, ce qui pourrait exister comme texte du savoir pour la classe de 3e si l'on se limite aux expériences à une épreuve – texte dont il faudrait travailler encore la formulation pour le rendre plus conforme à ce que l'on attend de traces écrites destinées à des élèves de troisième.

> *Définitions :* Une expérience aléatoire est une expérience dont le résultat est uniquement dû au hasard.
>
> Chacun des résultats possibles de l'expérience est appelé issue.
>
> Un événement est un ensemble d'issues. On dit qu'un événement est réalisé lorsque le résultat de l'expérience est l'une des issues qui le composent.
>
> Un événement élémentaire est un événement qui ne peut être réalisé que par une seule issue.
>
> Lorsqu'on répète un très grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence de réalisation d'un événement a tendance à se stabiliser jusqu'à se

rapprocher d'une fréquence « théorique » appelée probabilité de l'événement considéré, notée P(.).

Propriétés : Une fréquence étant toujours comprise entre 0 et 1, la probabilité de tout événement est comprise entre 0 et 1.

Définitions : La fréquence de tout événement qui doit nécessairement se réaliser étant égale à 1, la probabilité correspondante est égale à 1. Un tel événement est appelé un événement certain.

Technique : Pour déterminer la probabilité d'un événement, on répète n fois l'expérience aléatoire avec n assez grand. On détermine les issues qui répondent à l'événement considéré, et la fréquence de réalisation de cet événement qui est le quotient du nombre d'issues qui composent l'événement apparues dans la répétition de l'expérience par n. On fait cela plusieurs fois et on prend comme probabilité de l'événement considéré un nombre dont les fréquences calculées s'approchent. Si on connaît les probabilités des événements élémentaires, p_i, on estime le nombre d'issues d'un événement élémentaire i apparues dans la répétition de l'expérience n fois par np_i.

Probabilités des expériences usuelles

Dans le cas du lancer d'une pièce de monnaie non truquée, on a remarqué expérimentalement que pour un très grand nombre de lancers (plus de 800), la fréquence de l'événement « Obtenir Face » est très proche de 0,5. Dorénavant, on prendra pour fréquence théorique :

P(« Obtenir Face ») = 0,5

P(« Obtenir Pile ») = 0,5

Dans le cas du lancer de dé non truqué, on a observé que pour un très grand nombre de lancers, la fréquence de l'événement « Obtenir 1 » était comprise entre 0,16 et 0,17, de même pour les autres événements élémentaires. Nous prendrons dorénavant pour fréquence théorique, la fraction $\frac{1}{6}$ pour chacun des événements élémentaires du lancer de dé donc :

P(« Obtenir 1 ») = P(« Obtenir 2 ») = P(« Obtenir 3 ») = P(« Obtenir 4 ») = P(« Obtenir 5 ») = P(« Obtenir 6 ») = $\frac{1}{6}$.

Dans le cas de la roue de la loterie, on a remarqué que lorsqu'on fait tourner un très grand nombre de fois la roue, la fréquence de l'événement « Obtenir un secteur particulier de la roue » est proche du quotient de la mesure du l'angle du secteur en question sur 360°. On prendra pour fréquence théorique :

$$\frac{\text{mesure de l'angle du secteur en question en degré}}{360°}$$

> Dans le cas d'une urne, on a observé que lorsqu'on pioche un très grand nombre de fois dans l'urne, la fréquence de l'événement « Tirer une boule d'une certaine couleur » est proche de la fraction égale à la proportion de boules de cette couleur dans l'urne. On prendra pour fréquence théorique :
>
> $$\frac{\text{nombre de boules de la couleur recherchée}}{\text{nombre total de boules}}$$
>
> *Technique* : Pour prédire le nombre de sorties d'un événement lorsqu'on répète une expérience aléatoire, on détermine la probabilité de cet événement et on multiplie cette probabilité par le nombre de répétitions de l'expérience.

On soulignera que, pour le cas du tirage dans l'urne par exemple, la technique proposée est très proche de la technique existant dans les manuels et qui repose sur l'utilisation de la formule de Laplace. Mais ici, nous proposons pour chaque cas familier une technique construite à partir de la répétition de l'expérience, donc à partir du calcul d'une fréquence. Ainsi nous pourrons nous appuyer, « pour proposer un modèle probabiliste », sur ces « observations de fréquences dans des situations simples » – pour suivre la formulation de l'en-tête du programme de seconde.

3. Conditions et contraintes de l'existence d'une organisation mathématique fréquentiste

Deux conditions au moins viennent gêner, voire interdire, la présence de l'approche fréquentiste dans les praxéologies proposées par les professeurs observés et les manuels – et plus largement dans le savoir enseigné.

3.1. Une infrastructure fréquentiste disparue

La première de ces conditions, identifiée par Yves Chevallard et Floriane Wozniak (2011) et sur laquelle nous nous sommes implicitement appuyée dans les pages qui précèdent, est que l'infrastructure fréquentiste du calcul des probabilités est laissée de côté depuis de nombreuses années à l'université au profit d'une infrastructure de ce calcul que l'on peut qualifier d'ensembliste. Cette infrastructure fréquentiste est parfois considérée comme non rigoureuse par les enseignants en raison d'une méprise sur le travail de mathématisation à mener.

En effet, cette infrastructure permet de revenir au fondement du calcul des probabilités ou plutôt à la raison d’être de ce calcul des probabilités : la modélisation de la variabilité statistique. Y. Chevallard et F. Wozniak (2011) citent notamment à cet égard un commentaire fort éclairant de B. V. Gnedenko et A. Ia. Kintchine (1964) à propos d’un petit problème reproduit ci-dessous ainsi que sa résolution :

> Un tireur fait mouche dans 80 % des cas ; un autre (placé dans les mêmes conditions), atteint le but dans 70 % des cas. On demande quelle est la probabilité pour que le but soit touché si les deux tireurs le visent simultanément. (On considère que le but est atteint, indifféremment, s’il l’est par une ou par deux balles.)
>
> Admettons que les tireurs effectuent 100 tirs couplés. Lors de 80 de ces tirs environ, le but sera atteint par le premier tireur. Restent 20 tirs environ qui sont manqués en ce qui le concerne. Mais nous savons que le second tireur fait mouche en moyenne 70 fois sur 100, c’est-à-dire 7 fois sur 10. Nous pouvons donc escompter que, sur les 20 tirs où le premier tireur manque le but, il l’atteindra, lui, 14 fois environ. Par conséquent, sur 100 tirs couplés, le but sera touché approximativement 80 + 14 = 94 fois. La probabilité pour que le but soit atteint en cas de tir simultané de nos deux tireurs est donc de l’ordre de 94 %, ou 0,94.

Le commentaire de B. V. Gnedenko et A. Ia. Kintchine est alors le suivant :

> Le problème que nous venons d’envisager est très simple. Il ne nous en conduit pas moins à une conclusion très importante. Il est souvent utile, en effet, de déterminer la probabilité de certains événements, d’après celle d’autres événements, moins complexes. C’est là un procédé qui trouve de très nombreuses applications dans toutes les sciences et dans tous les domaines d’activité pratique comportant des opérations et des phénomènes massivement répétés.
>
> Il serait évidemment très malcommode d’avoir, en présence de chaque nouveau problème de ce genre, à définir un mode particulier de solution. La science tend toujours à établir des règles générales, susceptibles d’être appliquées mécaniquement ou quasi mécaniquement à la solution de problèmes similaires.

> Dans le domaine des phénomènes caractérisés par une répétition multiple, la science qui s'occupe d'établir de telles règles a pour nom théorie des probabilités.

C'est nettement le début de la construction du modèle qui est au programme de la classe de 3e, et le travail expérimental de détermination de probabilité « d'événements moins complexes », lié à des contextes familiers, doit être mis à profit pour déterminer la probabilité d'autres événements, tout en gardant l'arrière-plan expérimental qui donne le sens et le contrôle du travail mené.

3.2. Une infrastructure didactique manquante

La présence dans la profession de cette problématique fréquentiste qui permet de mettre en scène les probabilités comme modélisant la variabilité statistique est bien entendu primordiale. Mais il semble qu'une infrastructure didactique, liée à la réalisation des moments de l'étude, soit également nécessaire, tout en étant méconnue de la profession. Cette infrastructure a été mise en évidence par Michèle Artaud (2011) à propos des puissances d'un nombre en quatrième. Dans la classe de 4e en effet, les notations a^n et a^{-n} et leur utilisation sur les exemples numériques très simples figurent au programme d'étude. Les règles de calculs au programme de quatrième sont seulement celles qui portent sur les puissances de 10, du type : $10^m \times 10^n = 10^{m+n}$; $\frac{1}{10^n} = 10^{-n}$; $(10^m)^n = 10^{m\times n}$, où m et n sont des entiers relatifs. Leur extension à un nombre a différent de 10 relevant de la classe de 3e.

Mais l'auteure remarque que, de manière répétée, des formules du type $a^m \times a^n = a^{m+n}$ émergent dès la classe de 4e : elles sont présentes dans la plupart des manuels, dans les traces écrites de l'activité des classes qu'elle a pu observer cliniquement ou par le biais d'Internet. Et elle met en évidence la gestion fine de l'articulation de deux moments de l'étude que suppose la non-apparition des formules pour a différent de 10.

Plus précisément, si le nombre de puissances autres que 10 rencontré par l'élève de quatrième est au-delà d'un certain seuil, le travail de la technique au programme de la classe de 4e, fondée sur la définition de a^n, se mue en un moment exploratoire de la technique au programme de la classe de 3e qui débouche très vite sur un moment technologico-théorique. Il faut donc savoir arrêter le travail « assez tôt ».

Revenons alors au cas qui nous occupe ici, celui des probabilités en troisième. Nous avons vu, à travers notamment le document *Probabilités* (MEN, 2011), que le cas des expériences à deux épreuves en troisième relève du même phénomène. La difficulté réside là aussi dans un dosage « convenable » du nombre de spécimens travaillés pour que le moment de travail ne donne pas lieu à l'émergence de l'organisation mathématique au programme de la classe de 2^de^. Ce phénomène n'est pas repéré par la profession qui donne en classe de 3^e^ une importance assez grande aux expériences à deux épreuves. On a vu le document *Probabilités* développer ce point et insister sur la représentation sous la forme d'arbres qui masque le travail fréquentiste à effectuer – et les manuels ne sont pas en reste. On notera que l'on aurait sans doute la même analyse pour l'émergence de la formule de Laplace dans le cas où l'approche fréquentiste serait mise en œuvre.

Cela est augmenté ici d'un autre phénomène, pour les expériences à deux épreuves, que nous avons signalé plus haut : on voit en effet les auteurs du document *Probabilités* ne pas « juguler le processus didactique » (Artaud, 2011) et proposer de produire (moment technologico-théorique) et institutionnaliser le résultat qui permet de justifier la technique au programme de la classe de seconde. Or, une fois le résultat produit, il devient quasiment impossible de ne pas l'utiliser pour produire la technique inscrite au programme de seconde (moment exploratoire) compte tenu de la facilité d'exécution qu'elle procure par rapport à la technique « fréquentiste » – qui a pour avantage, on le répète, de donner du sens au travail engagé. Les auteurs des manuels que nous avons consultés ont d'ailleurs « tous » suivi la proposition d'institutionnalisation.

On a donc ici un exemple éclairant du fait que, dans les ensembles de conditions favorisant ou permettant l'existence d'une praxéologie mathématique dans les systèmes didactiques, si les conditions portant sur l'infrastructure mathématique sont essentielles, des conditions liées à l'infrastructure didactique sont également cruciales et le travail de constitution de techniques de réalisation des moments didactiques et d'étude de leur portée, notamment, demande à être développé.

Références

Andrieu, X., Fourton, J.-L., Lanoëlle, A. & Perrinaud, J.-C. (2008). *Dimathème 3^e*. Paris : Didier.

Artaud, M. (2011). Les moments de l'étude : un point d'arrêt de la diffusion. Dans M. Bosch et al. (Éds), *Un panorama de la TAD* (pp. 141-162). Barcelone, Espagne : CRM.

Braconne-Michoux, A., Freycenet, D., Freycenet, P., Huynh-Quan-Binh, P., Merlier, J.-M., Pasqualini, F. & Rousseau, P. (2008). *Maths 3^e (collection Diabolo)*. Paris : Hachette.

Chaput, B. & Vergne, C. (2012). Probabilités au collège. À propos de l'introduction aux probabilités en Troisième. Dans Commission Inter-IREM Statistique et Probabilités & Commission Inter-IREM Collège (Éds), *Probabilités au collège : ne pas laisser l'enseignement des probabilités au hasard…* (pp. 6-17). Paris : APMEP.

Chevallard, Y. & Wozniak, F. (2011). Un cas d'infrastructure manquante : statistique et probabilités en classe de troisième. Dans M. Bosch et al. (Éds), *Un panorama de la TAD* (pp. 831-854). Barcelone, Espagne : CRM.

Cuaz, L., Jacob, N. & Le Bourgeois, D. (2008). *Maths 3^e (collection Prisme)*. Paris : Belin.

Gnedenko, B. V. & Khintchine, A. Ia. (1964). *Introduction à la théorie des probabilités*. Paris : Dunod.

Jacob, N., Le Bourgeois, D., Martin, A., Roy, A., Sitbon, A., Vissio, J. & Xoual, I. (2012). *Maths 3^e (collection Nouveau Prisme)*. Paris : Belin.

Ministère de l'Éducation nationale. (2008). Programmes du collège. Programmes de l'enseignement de mathématiques. *Bulletin officiel spécial n^o 6 du 28 août 2008.*

Ministère de l'Éducation nationale. (2009). Programme d'enseignement de mathématiques de la classe de seconde générale et technologique. *Bulletin officiel n^o 30 du 23 juillet 2009*.

Ministère de l'Éducation nationale. (2011). *Mathématiques*. *Probabilités (collection Ressources pour les classes de collège).* http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/24/3/Probablites_17_03_08_maj2011_197243.pdf

Desafíos en los procesos de estudio de matemáticas con adultos de baja escolaridad

Dilma Fregona
Facultad de Matemática, Astronomía y Física,
Universidad Nacional de Córdoba, Argentina

María Fernanda Delprato
Facultad de Filosofía y Humanidades,
Universidad Nacional de Córdoba, Argentina

Pilar Orús
Inst. de Mat. i Aplicacions, Universitat Jaume I, Castellón, España

Abstract. We propose some challenges for teachers in the education of adults, in Córdoba (Argentina), and certain ways of addressing these challenges: we discuss their working conditions, identify specific issues of this teaching modality and illustrate it with some aspects of a didactic organization around the study of multiplication. Analysis of various products available at the Didactic of Mathematics Resources Center at the University Jaume I were used to introduce the case of multiplication and retrieve certain adults' relationships to that object.

Résumé. Nous présentons quelques-uns des défis que rencontrent les enseignants chargés de l'éducation des adultes à Córdoba (Argentine) et certaines façons de relever ces défis : nous analyserons leurs conditions de travail, identifierons des problèmes spécifiques qui se posent et illustrerons certains aspects d'une organisation didactique autour de l'étude de la multiplication. L'analyse des différentes productions disponibles dans le *Centro de Recursos de Didáctica de las Matemáticas* de l'université Jaume I nous permet d'introduire le cas de la multiplication et d'identifier certaines relations que les adultes entretiennent avec cet objet.

Resumen. Planteamos algunos desafíos de docentes de la modalidad educativa de Jóvenes y Adultos, en Córdoba (Argentina), y ciertos modos de abordar esos retos: analizaremos sus condiciones de trabajo, identificaremos problemáticas específicas de la modalidad e ilustraremos aspectos de una organización didáctica en torno al estudio de la multiplicación. El análisis de diferentes producciones disponibles en el Centro de Recursos de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad Jaume I, nos permitió introducir el caso de la multiplicación y recuperar ciertas relaciones que los adultos tienen con ese objeto.

IV^{e} congrès international sur la TAD (Toulouse, 21-26 avril 2013)
Axe 4. *Apports de la TAD à l'enseignement et à la diffusion des connaissances*

Fregona, D., Delprato, M. F. & Orús, P. (2017). Desafíos en los procesos de estudio de matemáticas con adultos de baja escolaridad. Dans G. Cirade et al. (Éds), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* (pp. 803-825). https://citad4.sciencesconf.org

Los resultados que presentamos son fruto del trabajo colectivo [1] en un taller semanal realizado entre docentes de primarias de adultos, un estudiante de Ciencias de la Educación e investigadores de la Facultad de Filosofía y Humanidades (FFyH) y de la Facultad de Matemática, Astronomía y Física (FAMAF), UNC,[2] constituido inicialmente para la realización del trabajo de campo de la tesis de doctorado de Delprato (en curso). Dicho taller se inició durante el año 2008, y seguimos estudiando propuestas para llevar a cabo y, luego comunicarlas, en dos aulas de adultos.

1. Condiciones de trabajo

El espacio en el que principalmente se implementó esta secuencia es un Centro de Nivel Primario de Adultos (CENPA) de la ciudad de Córdoba, es decir, un espacio de enseñanza formal de matemática cuyo propósito es la atención del rezago educativo de jóvenes y adultos en el nivel primario. Allí se desempeñan dos de las profesoras. La tercera también tiene un cargo en la modalidad de adultos, pero en una institución donde cumple diferentes tareas con distintos grupos de alumnos a los que se ofrece propuestas formativas diferenciadas (semipresencialidad, escolarización de un grupo de jóvenes integrantes de la comunidad gitana que anteriormente fueron atendidas en un programa de alfabetización, un grupo de trabajadores de la UNC en proceso de alfabetización, tutorías de alumnos que pretenden rendir en condición de *libre* el examen para acreditar el nivel primario) por lo cual podemos afirmar el carácter multifuncional que asume el trabajo docente en ese espacio. La fuente de datos proviene fundamentalmente del primer espacio, por eso nos detendremos en analizar las condiciones dadas allí.

Ese CENPA desarrolla una gran actividad en la comunidad donde está inserto vinculándose con diferentes instituciones: la Unidad Primaria de

1. Participan, respectivamente: Gabriela Aguilar, Adriana Arredondo, Paula Schiapparelli (docentes de nivel primario de adultos) Nicolás Gerez Cuevas (profesor de matemática y tesista de licenciatura en Ciencias de la Educación), Fernanda Delprato, Dilma Fregona (docentes e investigadoras de la UNC).

2. Proyectos *Educación básica rural y de jóvenes y adultos. Políticas, instituciones y actores*, CIFFyH, UNC. Agencia Nacional de Investigación Científica y Tecnológica-FONCYT, Convocatoria Proyectos Bicentenario, Temas Abiertos-PICT-2010-0890, SECYT, Res. 214/10; *Indagaciones sobre la formación de docentes en Matemática. Perspectivas, tendencias y desafíos,* FaMAF, UNC, SECYT, Res. 159/09; MCyT Res. 1210/2007.

Atención de la Salud (centro de salud dependiente de la Ciudad de Córdoba donde, entre otras acciones, se realizan talleres de salud reproductiva y de violencia de género), la capilla (encuentros interculturales anuales, talleres de oficios), el Instituto de Culturas Aborígenes (recuperación de música, danzas, lenguas originarias en el espacio de enseñanza), Médicos del Mundo (salud ambiental y endemias como dengue), Fundación ARCOR y Minetti, Universidad Católica de Córdoba, Institutos Superiores de Formación Docente (dependientes del estado provincial, reciben estudiantes para realizar observaciones de clases, prácticas de enseñanza, estudios diagnósticos, en particular de los estudiantes que se forman en educación especial o psicopedagogía), UNC (FFyH y FaMAF). El CENPA funciona por la tarde (de 14 h a 17 h) en un rincón del comedor de una escuela para niños, que recibe ayuda del gobierno provincial para almuerzo (a las 12 h) y merienda (a las 16 h). Cuando se inicia la clase de adultos, algunos niños están terminando de comer y luego vuelve el bullicio a la hora de merendar. Asimismo, como muestra la imagen, algunas de las alumnas concurren con sus niños no escolarizados (alrededor de ocho niños de 0 a 4 años).

Figura 1. Vista del salón de clase y los niños que acompañan a sus mamás.

Esa mesa y bancos sobre la cual trabajan los niños de la figura es del mismo tipo del que usan las alumnas del CENPA: un grupo corresponde al primer ciclo y el otro al segundo ciclo, agrupados según sus posibilidades de lectura autónoma de las consignas de trabajo. Ambos grupos comparten el espacio de ese comedor. Hay una docente responsable para cada ciclo y ambas comparten el taller que actualmente se realiza en la FaMAF.

Las docentes que participan de la indagación iniciaron su ejercicio en la modalidad de la Educación de Jóvenes y Adultos (EDJA), lo que posibilita priorizar la discusión sobre los sujetos adultos y la especificidad de una propuesta que recupere, interprete, potencie y desarrolle los conocimientos y saberes de estos sujetos. Los alumnos asistentes son veinte como máximo, la mayoría de ellos mujeres de entre 20 y 30 años, migrantes (provenientes sobre todo de Bolivia), aunque también hay algunos jóvenes. Esta composición del alumnado incide en que la asistencia esté sujeta a las *obligaciones* domésticas. Además de las alumnas en los dos ciclos hay un grupo de alfabetización que concurre dos veces por semana, en un horario diferenciado (esos días los alumnos del primer ciclo entran más tarde).

2. Problemáticas específicas de la modalidad

El cotidiano escolar en el espacio de la EDJA genera particulares desafíos dado que la población destinataria no ha sido considerada originalmente como objeto de intervención de la escuela (ya que no ha sido su *objetivo original*) y por ende, como contexto de producción de saberes pedagógicos (Oliveira, 2001). Esta autora nos propone reconstruir este lugar social peculiar del adulto transitando tres campos: su condición de *não-crianças*, su condición de excluidos de la escuela y, finalmente, su condición de miembros de determinados grupos culturales. Según la autora, la condición de *não-crianças* conlleva el reconocimiento de ciertos rasgos distintivos de la vida adulta:

> Traz consigo uma história mais longa (e provavelmente mais complexa) de experiências, conhecimentos acumulados e reflexões sobre o mundo externo, sobre si mesmo e sobre as outras pessoas. Com relação a inserção em situações de aprendizagem, esas peculiaridades da etapa de vida em que se encontra o adulto fazem com que ele traga consigo diferentes habilidades e dificultades (em comparação com a criança) e, provavelmente, maior capacidade de reflexão sobre o conhecimento e sobre seus próprios processos de aprendizagem (Oliveira, 2001, pp. 60-61).

También nos advierte que esta caracterización genérica conlleva el riesgo de estereotipar al adulto de la EDJA por oposición al adulto letrado. Un primer rasgo cultural relevante común sería la condición de excluidos de la escuela regular que incide en la especificidad de estos adultos como sujetos de aprendizaje. No obstante, la autora nos advierte que esta condición común y la pertenencia a grupos culturales no dominantes no implican homogeneidad en esta condición de exclusión, y que existen disparidades de competencias al interior de este grupo aparentemente uniforme según los modos de resolución de las demandas comunes de la vida cotidiana. Pero la posibilidad de reconocer este rasgo cultural común permite anticipar el impacto del no dominio de los supuestos que regulan el trabajo escolar debido a la exclusión de la escuela. O sea que el lugar social del adulto caracterizado de este modo interpela fuertemente la necesidad de herramientas para indagar esta heterogeneidad: inter-grupos (la que conlleva no ser el objeto habitual de la escuela, no pertenecer al grupo cultural dominante) e intragrupo (sus diferencias en tanto sujetos de aprendizaje).

Una posible discusión en este sentido es el reconocimiento del funcionamiento dispar de las prácticas de numeracidad en diversos ámbitos (Barton y Hamilton, 2004), que distinguen la especificidad de las prácticas escolares más habituales. Esto redunda en la no generalización de este funcionamiento y en la pregunta sobre los modos no escolares, por ejemplo del cálculo. Pregunta que supondría la redefinición de la mirada sobre el otro no meramente como alumno sino como sujeto, por ejemplo, con experiencias previas y simultáneas de cálculo más allá de las escolares y, a la vez, con reconocimientos desde *el afuera* de los modos de funcionamiento y los objetos escolares de las prácticas de numeracidad habituales en el ámbito escolar.

Además, en su formación inicial, las docentes fueron formadas como maestras para educar a niños, tomando en consideración fundamentalmente espacios graduados y poblaciones relativamente homogéneas. Coincidimos entonces con investigadores que consideran necesario brindar a esos docentes las bases metodológicas y herramientas de investigación sencillas que les permitan conocer quiénes son las personas que participan (Campero, 2009) –rasgos socioeconómicos, intereses y necesidades– y los contextos en que se desenvuelven, incluyendo también los usos de la lengua escrita y del cálculo.

Actualmente, en la Provincia de Córdoba, hay un cambio en el diseño curricular para la modalidad (Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba, 2008), con características novedosas (estructura modular, flexibilidad en la secuencia de contenidos, etc.). El análisis de problemáticas vinculadas a las posibilidades de apropiación de ese diseño (alcance de las proposiciones, adecuaciones de materiales y secuencias de enseñanza para los alumnos) también fue objeto de estudio en el espacio del taller.

Es peculiar también el modo de acreditación de saberes para la continuidad en el sistema, ya que no está necesariamente vinculado al tiempo escolar. Es responsabilidad de los docentes decidir quién está en condiciones de hacer una evaluación que les permita acreditar el nivel. Ese momento de la evaluación no puede constituirse para las alumnas en una instancia (más) de fracaso en la escuela.

3. Aspectos de una organización didáctica en torno al estudio de la multiplicación

3.1. Marcos del estudio

Por las características de los desafíos a los que nos enfrentamos, tomamos resultados de diferentes campos de producción. Además de los aportes ya señalados que provienen de la educación de jóvenes y adultos, estudiamos aspectos relativos a la relación entre formación docente e investigación, y nociones provenientes de la didáctica de la matemática. Otro referente conceptual empleado para dar cuenta de los saberes docentes demandados para interpretar los procedimientos de cálculo alternativos de los alumnos lo constituyen los Nuevos Estudios de Literacy (y numeracy) (NEL).

Inicialmente estos referentes nos posibilitaron anticipar espacios de intervención de una propuesta de enseñanza relevante: las distancias entre disponibilidad de estas escrituras numéricas y contenidos apropiados en las vías de acceso cotidianas; así como, la consolidación, optimización y diversificación de las estrategias disponibles en los sujetos, recuperando necesidades vitales de eficacia presentes en los contextos cotidianos de los sujetos. Esto conllevó en la indagación empírica un trabajo en torno a prácticas de escritura numérica usadas por los sujetos (*esbozos de escritura*) y, al acceso a portadores de información numérica (billetes, calendario) como referentes posibles de una enseñanza relevante. Posteriormente también posibilitaron interpretar las dificultades docentes en relación a las jerarquías de prácticas de numeracidad de ámbitos escolares y no escolares (Delprato & Fregona, 2011).

Para identificar tensiones y posicionamientos asumidos en el proceso de indagación, hemos recuperado algunas reflexiones sobre el *taller de* *educadores* (Achilli, 2008): la articulación entre la lógica de la intervención y la de la investigación; la diferenciación entre *práctica docente* y *práctica pedagógica*[3]; las resistencias a la generación del espacio de trabajo asentado en un modo relacional de apropiación dialéctica del conocimiento. A continuación, damos cuenta de algunas de esas tensiones específicas de los aspectos identificados:

- en la articulación entre investigación y formación docente, asumimos el proceso de indagación como un estudio, es decir, una investigación que tiene la particularidad de haber sido construida desde y para una acción práctica, procurando transformar algún problema de esa realidad socioeducativa en un problema de conocimiento para ser así objeto de un trabajo de delimitación /designación / problematización conceptual. En este tránsito hemos detectado tensiones en la articulación entre investigación e intervención en torno a: procesos de objetivación del cotidiano escolar (con la intención de objetivar la conciencia práctica de los docentes) y su comunicación y negociación al interior de los espacios; implicancias éticas de la difusión de estas experiencias (véase en Rockwell 2009 su análisis de los dilemas éticos que conlleva la narración de una experiencia etnográfica).
- al explicitar diversos núcleos problemáticos de su práctica docente, vinculados a la práctica pedagógica (*miedo a que no sepan, revisar [las tareas propuestas] con otros ojos, de matemático*, la gestión de la heterogeneidad, la interpretación de producciones de los sujetos, la asistencia discontinua vinculada a prácticas productivas o cuidado de los niños, la organización de los tiempos y del espacio de la enseñanza, etc., a las condiciones del trabajo docente en la modalidad, a las exigencias curriculares, etc.) hemos acordado, en el transcurso del tiempo, diferentes modos de *acompañamiento* en la tarea de enseñanza. Aunque se produjeron variantes en el taller –por la disponibilidad de espacio físico y de horarios, demandas de las docentes, exigencias de comunicación de los resultados, etc.– de un modo sistemático buscamos identificar y

3. Es necesario distinguir y ampliar la relación entre ambas prácticas, la docente implica *un conjunto de actividades, interacciones, relaciones que configuran el campo laboral del sujeto maestro o profesor en determinadas condiciones institucionales y sociohistóricas* (Achilli, 2008, p. 23).

documentar hallazgos que circulan en el taller, y reconstruir condiciones de la tarea en base a un intercambio de sugerencias.

- la generación de un espacio de trabajo con esas características, supone reconocer la práctica docente como trabajo intelectual y revisar un modo relacional *enajenado* del conocimiento (ídem, pp. 38-40) que sitúa a los docentes en el lugar de ejecución y en una relación de exterioridad con la posibilidad de reflexión y crítica de sus prácticas para su mejora.

Además, los aportes de la didáctica de la matemática, en particular de la teoría de las situaciones didácticas y de la teoría antropológica de lo didáctico, contribuyeron a delimitar el foco de la problemática indagada reconstruyendo algunas posiciones y polémicas respecto de la relevancia de los saberes matemáticos, la problemática del sentido de esos saberes, la contextualización para su enseñanza, la especificidad de los conocimientos vinculados a prácticas sociales o instituciones diversas, la vinculación entre alumnos y docente desde la no obligatoriedad, la validación de conocimientos de contextos cotidianos.

La nominación quizá sea una exigencia de legibilidad para la transmisión en contextos de enseñanza, no necesariamente en instituciones cuyo trabajo no está organizado en torno al conocimiento matemático. ¿Cuál es el estatuto de estos objetos usados pero no nominados: «será 'objeto' sólo aquello que, en una institución dada, tiene un nombre?» (Bosch, 1994, p. 13). Si se le reconoce el carácter de 'objeto' a aquellos en torno a los cuales no existe un léxico institucional, ¿cómo convertir en objeto de saber algo que no es nominado en la práctica institucional recuperada? Finalmente, otra dimensión de estas prácticas institucionales excede la dimensión de la praxis y alude al logos, es decir, la *tecnología* que asegura la justificación y control de las técnicas institucionales. Esta tecnología, entonces, tiene rasgos peculiares específicos (a no ser que adopte tecnologías de otras instituciones): «Tanto la función tecnológica como la teórica son relativas a cada institución: no hay una justificación única para una técnica que aseguraría su existencia en cualquier tipo de entorno.» (Bosch, 1994, p. 44). Nuevamente aquí resuena el reconocimiento de lógicas dispares que organizan las instituciones de práctica y las de trabajo con el conocimiento: ¿Cómo dialogan sus tecnologías, una centrada en dar respuesta a las demandas de la acción y la otra, en la inteligibilidad de una técnica a enseñar?

Este reconocimiento de saberes institucionales y las sujeciones institucionales en el marco de las cuales se conoce, supone el reconocimiento de tipos de tareas (y técnicas asociadas) que se resuelven en dicho contexto institucional. ¿Este conjunto de tareas de diversas instituciones podrían constituirse en referentes para la (re) contextualización de los saberes a ser enseñados? ¿Qué particularidades conllevan estas prácticas institucionales?

Asimismo, las nociones de *variable didáctica*, vinculada con la noción de *medio* y de *situación*, así como la de *medio del profesor*, circularon como herramientas teóricas para el análisis y toma de decisiones sobre las clases: caracterizamos las actividades en términos de las restricciones impuestas a la tarea (que privilegian la aparición de cierto tipo de resoluciones que implican un determinado saber puesto en juego) y como criterio de selección de actividades (pertinencia según la intencionalidad didáctica).

Este tipo de análisis posibilitó ir detectando variables a manipular para generar secuencias amplias de enseñanza con versiones diversas que hicieran posible su gestión simultánea al interior de un grupo diverso. En suma, procuramos intervenir sobre el *medio del profesor* discutiendo y construyendo colectivamente dos aspectos centrales que orientan las decisiones docentes: el conocimiento compartido del proyecto de enseñanza y el conocimiento (mediante la construcción de herramientas de análisis) de las producciones de los alumnos en las actividades de dicho proyecto (Fregona & Orús, 2011).

Para analizar las condiciones de producción de estas situaciones de enseñanza, analizamos el proceso en sí de los talleres de educadores. Así, en el análisis de la toma de decisiones sobre el curso de los talleres, también intervino la teoría antropológica de lo didáctico en la sistematización de recorridos de trabajo en torno a la enseñanza de nociones matemáticas, que consideramos podría contribuir a caracterizar la especificidad del trabajo en la modalidad de jóvenes y adultos, y de los saberes profesionales necesarios. En esta discusión de los *saberes docentes* demandados, recuperamos el análisis de la composición de una obra matemática: *tarea, técnica, tecnología y teoría*. Según esta perspectiva, el uso normalizado de la técnica requiere que aparezca como un modo de hacer no sólo correcto sino también comprensible y justificado, lo que consideramos que conllevaría el acceso a su tecnología. Este referente teórico posibilita detectar la ausencia del acceso de los docentes a la tecnología de las nociones matemáticas enseñadas (como por ejemplo los algoritmos de las cuatro operaciones básicas), y su vínculo con las dificultades docentes para la interpretación de las producciones de los alumnos y sus procedimientos de cálculo alternativos (asentados en propiedades del sistema de numeración y de las operaciones en juego). Hemos podido identificar más en detalle las características de las praxeologías matemáticas y didácticas de los docentes.

3.2. Estudio de la multiplicación. Una organización didáctica

La interpelación a los saberes didácticos para la enseñanza, tomó como objeto durante el transcurso de 2011 la división con cociente entero. Escogimos como documento base para el estudio una traducción al español de un documento *gris* producido en 1985 por la Universidad de Bordeaux (Brousseau et al., 1985). ¿Por qué la elección de ese documento? En primer lugar, porque la división es un tema problemático en la escolaridad obligatoria, tanto en la escuela primaria común como en la modalidad adultos. Además, ese informe muestra con cierto detalle una secuencia en la cual hay pistas sobre aspectos del proyecto de enseñanza (materiales a utilizar, momentos de avance y *balances*), producciones de los alumnos, dificultades que encuentran los docentes en la gestión de la clase, etc. Y finalmente, porque la secuencia empieza con problemas que los alumnos resuelven de algún modo (con *métodos empíricos de cálculo* según las Instrucciones Oficiales de la época) y los conduce al algoritmo estándar. Esta última es una cuestión fundamental para los docentes. En reiteradas oportunidades y a través de diferentes expresiones, las docentes plantearon: «*¿cómo se vuelve al [*algoritmo*] convencional? Porque es eso lo que se quiere.*»

Durante los encuentros se suscitan discusiones, se recuperan experiencias que permiten avanzar en la relación con los saberes matemáticos y la gestión de la enseñanza que incluye nuevos sentidos para los conocimientos en juego y los actores involucrados en el proceso. La reflexión sobre decisiones tomadas en las aulas de matemática aparece entonces como una construcción en situación específica más que como un entrenamiento válido para todas las situaciones (Lave, 1988/1991). Y es ese carácter situado lo que le da su potencialidad como saber profesional ya que opera *a la luz de su propia práctica*, con base en procesos grupales de discusión e intercambio de experiencias, tendiendo al fortalecimiento de su identidad en tanto educador (Campero, 2009).

Esta concepción de un saber enseñar matemática más contextualizado y diferenciado implica, a nivel de la formación continua, partir de las significaciones que el docente desarrolla en contexto y que van a otorgar sentido a toda situación o acción presentada por el investigador y sometida a estudio (Bednarz, 2000). En el espacio del taller, discutíamos interpretaciones del informe sobre la división, planteábamos dudas, ensayábamos respuestas, etc., y todas esas cuestiones quedaron registradas en un archivo, que tomó espesor a través de la circulación en un determinado orden entre los integrantes del equipo (de acuerdo a la disponibilidad para trabajar sobre él) y sobre el cual volvíamos y seguimos volviendo.

Esa publicación sobre la división contiene aspectos implícitos, fuertemente contextualizados en las prácticas de enseñanza que se realizaban (y muchas de ellas continúan, con variaciones) en la Escuela Michelet de Talence, Francia, donde, por más de 25 años, funcionó el Centro para la Observación e Investigación en Enseñanza de la Matemática (COREM).

Ese Centro era un laboratorio que permitía observar a docentes y alumnos en sus interacciones en clase, y desplegar experiencias de enseñanza desarrolladas y llevadas a cabo por el trabajo conjunto de personas vinculadas a la Universidad de Bordeaux –investigadores y estudiantes de los postgrados en didáctica de la matemática– y docentes de la escuela[4]. En ese ámbito y con la colaboración de numerosas personas, se produjeron investigaciones fundamentales en el marco de la teoría de las situaciones didácticas y también experimentales, ligadas a la enseñanza efectiva de la matemática. Parte de ese material fue difundido en ámbitos de investigación a través de artículos en revistas especializadas y tesis de postgrado. Pero existe además un buen número de publicaciones llamadas *grises*, algunas destinadas a docentes de diferentes niveles del sistema, entre las cuales está

4. Para una descripción más detallada: http://guy-brousseau.com/le-corem/presentation/

el informe sobre la división. Asimismo, en el ámbito del COREM había otros recursos documentales (informes anuales de lo realizado en la Escuela, planificaciones de los maestros, producciones de los alumnos sobre diferentes temas, evaluaciones trimestrales y anuales, etc.) que en la actualidad fueron cedidos a la Universidad Jaime-I de Castellón, España, constituyendo el Centro de Recursos de Didáctica de las Matemáticas (CRDM)[5].

Nuestras condiciones actuales de trabajo nos permiten el acceso a esa documentación y también dialogar con quienes diseñaron y llevaron al aula las actividades reseñadas en ese informe[6]. Tenemos la posibilidad de la reconstrucción y la comunicación a otros actores del sistema, sean docentes que enseñan matemática en formación inicial o continua, sean estudiantes de posgrado en educación matemática.

¿Cuál es el interés de retomar un informe difundido en 1985? El informe comienza con problemas destinados a alumnos del tercer año de escolaridad primaria (8 ó 9 años). Las *historias* de los enunciados son parecidas[7], lo que sorprende es el tamaño de los números involucrados[8] y las primeras respuestas que producen los alumnos recuperando adiciones o sustracciones reiteradas, o aproximaciones a través de multiplicaciones. Una de las cuestiones planteadas en el espacio del taller fue: *¿Cuáles son los conocimientos disponibles que tienen los alumnos?*

El estudio de diferentes producciones disponibles en el CRDM relativas al estudio de la multiplicación (Berthelot & Gresillier, 1985), condujo al taller a elaborar actividades para introducir la multiplicación y establecer nexos entre las relaciones que los estudiantes adultos tienen con ese objeto (por ejemplo, muchos de ellos saben de memoria parcial o totalmente las

---

5. Pilar Orús, responsable de la gestión de este Centro, es integrante de proyectos de investigación presentados en organismos argentinos.
En http://www.imac.uji.es/CRDM/index.php se puede encontrar mayor información sobre los recursos albergados.
6. Entre otros, Nadine y Guy Brousseau, Christiane Destouesse, Denise Greslard y Marie-Hélène Salin.
7. Se trata de buscar el número de grupos que se pueden armar con cierta cantidad de «elementos».
8. El primer problema es: Se quiere distribuir un alfajor a cada uno de los 245 niños de una colonia de vacaciones. Cada caja contiene 18 alfajores. ¿Cuántas cajas hay que abrir?

tablas de multiplicar, o tienen acceso a ellas) y las que intentan construir una noción estable de la multiplicación.

Frecuentemente la población con bajo nivel de escolaridad retorna a la escuela con demandas muy precisas, entre otras, en torno a las tablas de multiplicar y el algoritmo de la división.

Mostraremos dos de las actividades propuestas y las respuestas obtenidas por los alumnos de los dos centros educativos de adultos mencionados en el apartado 1. La fuente de datos son registros tomados por el docente (en un formato consensuado en el taller) y producciones de los adultos.

Actividad 1: juego de comunicación de disposiciones rectangulares. La docente describe en su carpeta:

> Actividad 1: Multiplicación:
>
> Juego de mensajes de tablas – Organización rectangular
>
> Material: papel cuadriculado de la misma trama. Hojas y fibras. Tablas de 7×15 y 10×10
>
> Grupos o equipos de cuatro: dos receptores y dos emisores
>
> – Un equipo recibirá una tabla con cruces y deberá escribir un mensaje claro al otro equipo. El mensaje debe servirle al equipo que lo recibe para poder hacer una tabla igual.
>
> – El equipo receptor deberá hacer una tabla igual.
>
> – Luego se intercambian las tareas de emisores y receptores.
>
> Verificación:
>
> Consigna, ¿las tablas son iguales?
>
> Luego de varias sesiones: ¿quién piensa que debe conservar el mismo tipo de mensaje? ¿Por qué? ¿Quién piensa cambiarlo? ¿Por qué?

El primer juego en la clase de Gabriela se lleva a cabo el 27/06/2012, con los alumnos del primer ciclo. Comienzan a trabajar a las 15:32, a las 15:44 se dan diálogos del tipo:

> Zulma: *¿Cómo se lee, así (acostado) o parado?*
>
> Docente: *Lo deciden Uds*.
>
> Discuten a qué llamar renglones y a qué columnas. Escriben los datos de columnas y renglones y empiezan a contar las cruces.
>
> Silveria cuenta de a 7, hasta 21, se detiene. Marta continúa de a 1 y se pierde.

Las producciones de los alumnos dan cuenta de diferentes técnicas:

- cuentan de a uno, asumiendo que la tarea es comunicar el número de cruces ya que la escritura usual de una cantidad es el número estándar,
- cuentan los elementos de la fila, suman los elementos de cada fila o agrupadas de a dos, según los cálculos mentales disponibles,
- indican, con vocabulario diverso, la disposición rectangular: «conlunas» y «reglones»; «conlunas» y «filas»; «alocotado» y «alolargo» [9].

Figura 2. Producción de un grupo, clase de Gabriela 27/06/2012.

Puesta en común:

Docente: *¿Cómo sé si las tablas son iguales?*

Marta: *Cuento las cruces o sumo, de a 15…*

Docente: *¿Y si hago esto?* (Las superpongo).

Zulma propone medir, es decir comparar directamente los lados de la tabla de los emisores con la elaborada por los receptores.

Docente: *Sí, mido si tienen el mismo largo de cada lado. Y si las pongo a la luz, veo que coinciden las cruces.*

Silveria: *Se ve igual*.

El 29/08/2012, Gabriela propone otra vez el juego (las tablas tienen 23 × 11 y 19 × 13), mostramos dos producciones de los emisores. Ninguno de los alumnos cuenta el número de cruces, la tarea está mejor identificada. Virginia y Diego, del segundo ciclo y Silveria S. del primer ciclo, escriben:

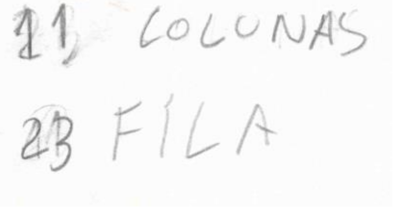


Figura 3. Producción de un grupo, clase de Gabriela 29/08/2012.

Observamos que los números fueron borrados, inicialmente eran 23 columnas y 11 filas. El cambio da cuenta de la persistencia de las

9. Las formas de registro están vinculadas con el nivel de dominio de la escritura. Se refieren a «columnas», «renglones», «al costado» y «a lo largo».

discusiones sobre el modo de orientar la tabla o el modo de designar las dos dimensiones.

Daniel e Isabel, del segundo ciclo, y Marta, del primer ciclo, producen:

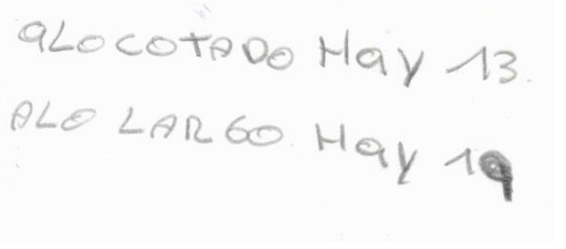


Figura 4. Producción de un grupo, clase de Gabriela 29/08/2012.

Este grupo de emisores describe las dimensiones en términos de «al costado» y «a lo largo», expresiones que tal vez dejan a los receptores con cierta ambigüedad sobre la posición de la tabla.

El 5/6/12, Paula (en el otro espacio educativo), con sus alumnas de primer ciclo, propone la actividad según la descripción ya señalada anteriormente. En este caso las disposiciones rectangulares fueron de 8×14 y 9×13.

Los emisores (un grupo de tres personas) que disponían de 8×14, intentan contar de 8 en 8, y se pierden. Una de ellas cambia de técnica y comienza a contar de a un elemento, el grupo la adopta. Envían un mensaje diciendo que hay 116 cruces.

Observamos aquí también el problema de identificar cuál es la tarea solicitada. Es muy fuerte la tradición escolar de dar el número en el formato estándar.

Los receptores, primero cuentan todos los cuadraditos que hay en la hoja: cada fila tiene 20 cuadraditos, van de 20 en 20. Cuando reciben el mensaje, hacen diferentes intentos que se reflejan en marcas sobre la cuadrícula, pero finalmente lo que exhiben es lo siguiente:

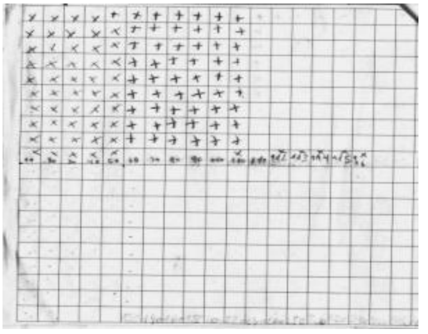


Figura 5. Producción de un grupo, clase de Paula, 5/06/2012.

Las filas tienen 11 cruces, y repiten 10 de esas filas. En la última, en cada cuadrito registran acumulativamente la cantidad de cruces de izquierda a derecha… Y siguen registrando, a partir de 110 de a uno, en esa fila hasta 116.

En el momento de la verificación, observaron que las tablas no coincidían, advirtieron que el mensaje no había sido suficiente para producir una tabla igual a la dada. Vuelven a hacer un juego de comunicación, algunos de esos intercambios permiten reproducir la disposición y otros no. En estos últimos casos, la docente vuelve a dar el mensaje al grupo emisor para que vean cómo lo podían modificar. En esta segunda oportunidad cuentan la cantidad de filas y columnas y escriben una multiplicación (la cuenta parada) y algunas alumnas la resuelven. Los receptores de estos nuevos mensajes logran reproducir la tabla que corresponde.

El 19/6/12, Paula propone otra vez el juego de comunicación, con tablas de 7×15 y 10×10. No hay límite de tiempo para realizar el trabajo, la verificación será por superposición.

Un grupo de dos emisoras produce el siguiente mensaje, las receptoras recortan la figura que se superpone con el modelo.

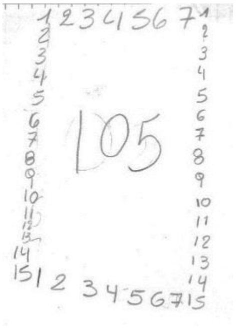


Figura 6. Producción de un grupo, clase de Paula, 19/06/2012.

Actividad 2: ¿Qué disposiciones rectangulares se pueden formar con un determinado número de asteriscos? La descripción que hace la docente en su carpeta de clase es:

> Material: tablas grandes para recortar
>
> Objetivo: darnos cuenta que un número puede escribirse con diferentes multiplicaciones (20 = 2 × 10 = 4 × 5 = 5 × 4)
>
> ¿Qué tablas puedo formar?
>
> ¿Con la misma cantidad de cruces puedo formar tablas diferentes? ¿Cuál sería el mensaje que escribiría para que otro grupo pueda hacer una tabla igual?
>
> · con 20 x
>
> . con 24 x
>
> . con 30 x
>
> . con 36 x
>
> Puesta en común.

El 31/08/2012, Gabriela trabaja con el grupo del segundo ciclo dado que la docente está con licencia. Les da 3 minutos para trabajar.

> Diego intenta hacer una tabla de 20 × 20.
>
> Silveria: *¡No! Veinte cruces adentro.*
>
> Nelly y Virginia delimitan rectángulos a partir de repertorios de cálculos mentales (en la puesta en común dicen «*yo fui sumando de a 5*», «*yo fui sumando de a 10*») y cuentan las cruces para verificar siguiendo las filas.

Muestran las tablas.

Grupo 1:

x x x x   x x x x x

x x x x	x x x x x	x x x x x x x x x x
x x x x	x x x x x	x x x x x x x x x x
x x x x	x x x x x	
x x x x		

Se discute públicamente si son iguales.

Silveria R.: Sí, pero nosotros contamos de a 4 y en el otro de a 5.

Sobre el final de la clase, Gabriela propone un trabajo individual con las tablas que se pueden armar con 36 cruces. Cada alumno dispone de varios ejemplares para recortar o delimitar disposiciones rectangulares. Durante la puesta en común, la mayoría de los alumnos muestra sus tablas y dice qué número sumaron para llegar a la cantidad de cruces.

Simona (muestra un cuadrado): *Sumé de a seis: doce, dieciocho, veinticuatro, treinta, treinta y seis.*

Otros, como Diego, Virginia y Silveira M., explicitan la multiplicación que corresponde a cada disposición.

Virginia (muestra las tablas y) enuncia: *Cuatro por nueve, dieciocho por dos, seis por seis, seis por seis.*

Cuando se hizo pública la descripción en términos de *tanto por tanto*, muchos alumnos lo adoptaron y recuperaron el signo × como un saber muy valorado. En el taller, Gabriela expresó la alegría de los alumnos que habían vinculado estas actividades con sus conocimientos sobre la multiplicación. A pesar de la resistencia inicial de las maestras, por el *miedo a que no sepan*, hubo consenso[10] para introducir la escritura horizontal $4 \times 9 = 36$, usar la calculadora para verificar el cálculo y buscar todos los productos de dos factores que equivalen a una determinada cantidad.

Variante de la actividad 2, descripta en la carpeta de Gabriela del siguiente modo:

Trabajo individual.

Material: tablas grandes para recortar o delimitar

---

10. Durante varias reuniones analizamos documentos (entre ellos Brousseau (2007), revisamos el material para los alumnos, elaboramos consignas para cada tarea, anticipamos técnicas matemáticas de los alumnos y didácticas en la gestión, discutimos variables relativas al tamaño de los números y tiempo de trabajo.

Objetivo: instalar la escritura $A \times B$ para simbolizar/comunicar una organización rectangular.

Recordamos la actividad: ¿Qué tablas puedo formar con cierta cantidad de cruces, ahora asteriscos? Deben formar todas las tablas posibles.

¿Con la misma cantidad de cruces puedo formar tablas diferentes? ¿Cuál sería el mensaje que escribiría para que otro grupo pueda hacer una tabla igual?

· con 20 ✻

. con 24 ✻

. con 30 ✻

. con 36 ✻

Puesta en común. ¿Con la misma cantidad de cruces puedo formar tablas diferentes? ¿Por qué? Escritura $A \times B$.

El 3/12/12, Gabriela propone esta actividad. Dado que el edificio de la escuela está muy deteriorado, agravado por las últimas lluvias, un grupo de madres y de maestros tomaron el edificio y las clases se dan, en horario reducido y por la mañana en el patio de la escuela, a la sombra de los árboles.

8:43 Entrego la hoja A4 con asteriscos. Empezamos con 20 ✻

8:51 Llegó Virginia. *Diego me dice que si ya está. Ha hecho* 4×5, 5×4, 2×10, 10×2. *Le digo que le falta uno, rápidamente agrega una fila de* 20×1 y 1×20.

La primera tabla de Virginia es de 1×20.

Inicialmente Diego y Virginia no escribían la igualdad, pero rápidamente la adoptan cuando Gabriela se lo explica. No todos los alumnos usan el *por*, muchos siguen sumando. Virginia reúne sus resultados en un cartel, tal como el que mostramos:

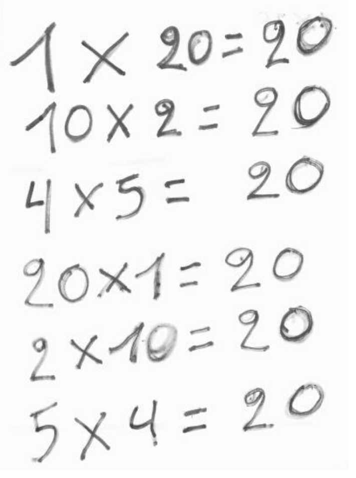


Figura 7. Producción de un grupo, clase de Gabriela, 3/12/2012.

> 9:15 Entrego otra hoja para hacer tablas de 24 ∗, les recuerdo que deberán escribir al lado como multiplicación.
>
> Isabel: *¿Cuántas tablas son?*
>
> D: *Eso lo tenés que averiguar vos, pero tenemos que hacer todas las que se puedan.*

¿Cómo saber si están todos los productos de dos factores que dan 24? La alumna quiere hacer la tarea de un modo seguro, desafía a la docente, y ésta devuelve la cuestión. Frecuentemente hay situaciones donde las alumnas proponen retos matemáticos, que son estudiados en el espacio del taller.

> 9:30 Usamos las calculadoras.
>
> D: *¿Alguien sabe usarlas?*
>
> María: *Se prende con el botón rojo.*
>
> Vemos que no todas tienen el botón de encendido de color rojo. Ubicamos las teclas ON, OFF, = y ×
>
> Verificamos las cuentas escritas.

Debido a la situación edilicia, el Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba suspende el ciclo lectivo en ese establecimiento, dos semanas antes de la finalización.

4. Conclusiones

Tal como lo anuncia el título de esta comunicación, los desafíos en el espacio de enseñanza de la matemática a jóvenes y adultos son diversos. Y también lo son en el espacio del taller, donde la construcción de un consenso sobre organizaciones matemáticas y didácticas es una experiencia singular sobre cómo mirar, en las condiciones dadas, los procesos áulicos y el proceso de formación de todos los integrantes del equipo.

En el marco de la heterogenidad de los alumnos, constatamos un funcionamiento dispar de las prácticas de numeracidad, e identificamos modificaciones positivas en los modos de resolver las tareas (expresada en eficacia, economía, adecuación), en las formulaciones y simbolizaciones que permiten a los alumnos reconocer huellas tanto de saberes anteriores como de los que circulan en los cuadernos de sus hijos en edad escolar. Estos resultados son altamente motivadores, reafirman el sentido de estar en la escuela por parte de los alumnos como de la búsqueda de situaciones que favorezcan los aprendizajes por parte de los docentes.

Al iniciar el juego de comunicación de los arreglos rectangulares, fue muy fuerte la necesidad de comunicar la cantidad de elementos de la colección, ya que no es una práctica habitual en la enseñanza expresar una cantidad a través de una operación. Si bien los alumnos de segundo ciclo, desde el inicio del juego de comunicación no tuvieron necesidad de contar los elementos de la colección de a uno, tampoco fue inmediato el reconocimiento de que con una multiplicación se resolvía de un modo eficaz y económico. También allí, alumnos y docentes expresaron su satisfacción ante el sentido que empezó a tomar ese conocimiento fragmentado de las tablas de multiplicar.

Como ya lo mencionamos, el acompañamiento a los docentes adoptó diferentes formatos, según las condiciones en que se daba. Durante los dos últimos años, la fuente documental fundamental fueron los registros de las docentes realizados en el aula y las producciones de las alumnas. El formato de esos registros también tiene como referente el documento sobre la división, ya que en diversas oportunidades discutimos específicamente cómo sistematizar lo que vamos experimentando con los alumnos, y entonces analizamos ese documento desde su forma. Es decir, recuperamos qué contenidos y aspectos tenía ese documento, para cimentar el proceso en desarrollo y su posterior comunicación. A partir de ello, y en las condiciones del trabajo docente, definimos cómo documentar esos aspectos. Ese registro y las producciones de los alumnos son digitalizados por uno de los integrantes del equipo y se realiza luego, en el taller, una suerte de registro ampliado.

Aspiramos a que la difusión de nuestro trabajo se constituya en un material de estudio que pueda contribuir a la formación de docentes que enseñan matemática, en particular en centros educativos para jóvenes y adultos, y también para los docentes formadores.

Referencias

Achilli, E. (2008). *Investigación y formación docente*. Rosario, Argentina: Laborde. (Edición original 1998)

Barton, D. & Hamilton, M. (2004). La literacidad entendida como práctica social. En V. Zavala, M. Niño-Murcia & P. Ames (Eds.), *Escritura y sociedad. Nuevas perspectivas teóricas y etnográficas* (pp. 108-139). Lima: Red para el Desarrollo de las Ciencias Sociales.

Bednarz, N. (2000). Formation continue des enseignants en mathématiques : une nécessaire prise en compte du contexte. En P. Blouin & L. Gattuso (Eds.), *Didactique des mathématiques et formation des enseignants* (pp. 63-78). Montreal, Canadá: Modulo.

Berthelot, R. & Gresillier, M. F. (1985). *La multiplication au CE1 : quelques apports des recherches en didactique aux leçons de tous les jours*. Bordeaux: Université Bordeaux 1 (IREM).

Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad* (Tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona, España.

Brousseau, G. (2007). *Le calcul « à la plume » des multiplications et des divisions élémentaires*. Paris: ARDM. http://www.ardm.eu/files/Francais_Calcul_partie1.pdf

Brousseau, G., Briand, J., Brousseau, N., Gresillier, M. F., Greslard, D., Lacave-Luciani, M. J., Teule-Sensacq, P. & Vinrich, G. (1985). *La division à l'école élémentaire. Compte rendu des situations d'enseignement réalisées avec des enfants de CE2, CM1 et CM2*. Bordeaux: Université Bordeaux 1 (IREM).

Campero, C. (2009, marzo). *Importancia y retos de la formación de los educadores y educadoras de la EPJA*. Ponencia presentada en Universidad Pedagógica Nacional, Mérida, México.

Delprato, M. F. & Fregona, D. (2011). Procesos de comunicación sobre registros de cálculo en un trabajo colectivo en EDJA. En M. d. C. Lorenzatti, (Ed.), *Procesos de literacidad y acceso a la educación básica de jóvenes y adultos* (pp. 107-135). Ministerio de Ciencia y Tecnología de la Provincia de Córdoba y Secretaría de Ciencia y Técnica de la Universidad Nacional de Córdoba.

Fregona, D. & Orús, P. (2011). *La noción de medio en la teoría de las situaciones didácticas. Una herramienta para analizar decisiones en las clases de matemática*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Lave, J. (1991). *La cognición en la práctica* (L. Botella, trad.). Barcelona, España: Paidós. (Cognition in practice, 1988, Cambridge: Cambridge University)

Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba. (2008). *Propuesta Curricular Alfabetización y Nivel Primario. Educación Permanente de Jóvenes y Adultos (EPJA).* http://docplayer.es/7434470-Propuesta-curricular-alfabetizacion-y-nivel-primario-educacion-permanente-de-jovenes-y-adultos-epja.html

Oliveira, M. K. (2001). Jovens e adultos como sujeitos de conhecimento e aprendizagem. En V. M. Ribeiro (Eds.), *Educação de jovens e adultos: novos leitores, novas leituras* (pp. 15-43). Campinas, Brazil: Mercado das Letras.

Rockwell, E. (2009). *La experiencia etnográfica: historia y cultura en los procesos educativos*. Buenos Aires: Paidós.

La construcción de triángulos en la escuela primaria

Lidia Ibarra, Blanca Formeliano, Florencia Alurralde, Ivone Patagua, Mirta Velazquez, Silvia Baspiñeiro y Graciela Mendez
Consejo de Investigación de la Universidad Nacional de Salta (CIUNSa), Universidad Nacional de Salta, Argentina

Abstract. Argentinian curricular guidelines include the teaching of geometry. However, over the years it has had a great absence in classroom tasks. In this sense, the purpose of this paper is to study the curriculum and institutional dimensions, characterizing a local mathematical organization on the theme of "Construction of Triangles" in grade 7.

Résumé. L'enseignement de la géométrie est présent dans les programmes et documents d'accompagnement argentins. Cependant, au cours des années, la géométrie a été peu travaillée dans les classes. En ce sens, l'objectif de cet article est d'étudier les dimensions curriculaire et institutionnelle qui caractérisent une organisation mathématique locale autour du thème « Construction de triangles », en 7^{e} année de l'école primaire.

Resumen. En obras de referencias como los diseños curriculares argentinos está presente la enseñanza de la geometría. Sin embargo, a lo largo de los años ha tenido una gran ausencia en las tareas áulicas. En este sentido, el propósito de este artículo es estudiar las dimensiones curricular e institucional, que caracterizan a una organización matemática local alrededor del tema «Construcción de triángulos», en el aula de 7º año de escolaridad básica.

IV^{e} congrès international sur la TAD (Toulouse, 21-26 avril 2013)
Axe 4. *Apports de la TAD à l'enseignement et à la diffusion des connaissances*

Ibarra, L., Formeliano, B., Alurralde, F., Patagua, I., Velazquez, M., Baspiñeiro, S. & Mendez, G. (2017). La construcción de triángulos en la escuela primaria. Dans G. Cirade et al. (Éds), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* (pp. 827-837). https://citad4.sciencesconf.org

1. Introducción

Según los documentos curriculares argentinos, la enseñanza de la geometría debe complejizarse a lo largo de los niveles escolares, desde la primaria, pasando por la secundaria hasta la universidad. En este sentido, es imperiosa la necesidad de preparar a los alumnos en los contenidos de geometría, generando un espacio para justificaciones cada vez más rigurosas favoreciendo el razonamiento deductivo.

Este artículo se propone analizar las dimensiones curricular e institucional, que caracterizan a una organización matemática (OM) local alrededor del tema «Construcción de triángulos», propuesto en los diseños curriculares del último año (7º) del Segundo Nivel de Educación General Básica (EGB) en la ciudad de Salta, Argentina, donde las edades del alumnado oscilan entre 11 a 12 años.

Situados en el contexto y a partir del propósito planteado emergen las siguientes preguntas de investigación: ¿La organización matemática de referencia incide en la organización matemática a enseñar? ¿A partir de las organizaciones matemáticas puntuales, es posible construir la organización matemática local subyacente al tema «Construcción de triángulos»? ¿Cuáles son las variables didácticas que permiten la complejización en las tareas de «construcción de triángulos»? ¿Qué sucede en el aula con este tipo de tareas? ¿Existen condiciones que permiten al alumno confrontar en diferentes dominios —formulación, construcción, comunicación— sus conocimientos sobre la construcción de triángulo? ¿Cuáles son los factores que inciden en el planteo o ausencia de técnicas en las construcciones realizadas por los alumnos?

2. Antecedentes de investigación

En Argentina, en los últimos quince años, hubieron dos reformas educativas importantes. En el año 1993, la Ley Federal de Educación organizó el sistema educativo en dos niveles: Inicial y Escuela General Básica (EGB) obligatoria (9 años) dividida en EGB1, EGB2 y EGB3. En el año 2006, la Ley de Educación Nacional organiza el sistema en Nivel Inicial, Primario (7 años) y Secundario (5 años). Esta segmentación produjo que algunos alumnos cursaran el 7° año en la primaria y otros en la secundaria.

En relación con la geometría, podemos describir a grandes rasgos las características siguientes:

Focalizados en el tema construcción de triángulos, el análisis de los documentos curriculares nacionales, jurisdiccionales y provinciales, como así también en libros escolares destinados a alumnos muestra la *ausencia de secuenciación, complejización y organización del conocimiento geométrico*.

El análisis de los libros de texto destinados a los estudiantes y que adopta el docente para enseñar el contenido en cuestión, se constanta la *ausencia de espacios para la conjetura y la argumentación en la actividad geométrica.* En particular, se observa falta de explicitación de las condiciones que posibilitarían, por ejemplo, la construcción de un triángulo en 6º y 7º años.

En cuanto a las tareas que desarrollan los alumnos en sus carpetas, se observa la *escasa presencia de problemas geométricos*, hecho que se correlaciona con la propuesta de los libros de texto analizados. Este fenómeno didáctico en torno a la enseñanza de la Geometría es un desafío a superar en la Enseñanza Primaria, lo que constituye la etapa inicial de un trabajo futuro.

3. Marco teórico

Para transmitir conocimientos sobre una cuestión determinada —en esta ocasión «la construcción de triángulos»— hay que recorrer un camino que empieza en la sociedad, continúa por la escuela, sigue por cierta disciplina y área dentro de la disciplina en la que se estudia la cuestión, por cierto sector, que determinan lo que será didácticamente posible realizar en el aula (Chevallard, 2001). Esto hace que cada institución tenga su propia geometría escolar, tal que en algunas las tareas son los contenidos conceptuales y en otras se ponga más énfasis en los procedimientos. Este fenómeno da cuenta de la relatividad con que cada institución organiza su currículo escolar.

Al referirse a la actividad matemática, (Chevallard, 1999) distingue dos aspectos: el matemático y el didáctico, que no pueden tomarse de manera independiente. Tanto las organizaciones matemáticas OM como las organizaciones didácticas OD tienen una estructura praxeológica en la que se distinguen cuatro componentes: tareas (T), técnicas (τ), tecnologías (θ) y teorías (Θ). Los dos primeros, esto es, tareas y técnicas, conforman lo que se denomina el bloque práctico-técnico. Mientras que los dos últimos, tecnologías y teorías, conforman el bloque tecnológico-teórico. Se define una praxeología puntual (OMP) como aquella centrada en un único tipo de tarea y con una única técnica matemática salvo pequeñas variaciones. Una praxeología u organización matemática es local (OML) si se obtiene como resultado de la integración flexible de diversas praxeologías puntuales con una tecnología común. Una praxeología es regional si se obtiene mediante la integración, alrededor de una teoría matemática común, de diversas praxeologías locales. La reconstrucción institucional de una teoría matemática requiere elaborar un lenguaje común que permita describir, interpretar, relacionar, justificar y producir las diferentes tecnologías de las praxeologías locales que integran la praxeología regional.

Elaborar una praxeología matemática supone para cualquier «estudiante», ya sea matemático investigador o alumno de matemática, entrar en un proceso de estudio que, como tal, no es un proceso uniforme, sino que está estructurado en seis diferentes momentos de estudio o momentos didácticos. Cada momento del proceso de estudio hace referencia a una dimensión o aspecto de la actividad de estudio, más que a un período cronológico preciso. Estos momentos son: (1) el momento del primer encuentro con la organización que está en juego; (2) el de la exploración del tipo de tareas y el de la elaboración de una técnica relativa a este tipo de tareas; (3) el de la constitución del entorno tecnológico-teórico relativo a la técnica; (4) el momento del trabajo de la técnica; (5) el momento de la institucionalización y (6) el momento de la evaluación.

De esta forma, en el proceso de estudio, la organización matemática (OM) y la organización didáctica (OD) son tres aspectos inseparables del trabajo matemático. El proceso de estudio puede ser entendido como el proceso de construcción matemática. El resultado de esa construcción es una OM y, finalmente, la manera en que esa organización se construye, una OD. En este sentido, y tal como sostienen Chevallard, Bosch y Gascón (1997, p. 51) los hechos didácticos y los hechos matemáticos son inseparables. Por ende, decimos que estudiar matemáticas consiste en construir o reconstruir determinados elementos de una organización matemática para dar respuesta a un tipo de tareas problemáticas en una institución determinada.

3.1. Reformulación de la organización matemática de referencia

A partir del trabajo de Ibarra, Formeliano, Méndez, Velásques y Alurralde (2011) se describen las tareas escolares para «construir un triángulo» distinguiendo las tareas:

T_1: Construir un triángulo dados tres lados.

T_2: Construir un triángulo dados un lado y dos ángulos.

T_3: Construir un triángulo dados un ángulo y un lado.

T_4: Construir un triángulo dados dos lados y el ángulo comprendido.

T_5: Construir un triángulo dados dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

Las técnicas elementales que se pueden combinar para llevar a cabo estas tareas se describen como:

τ_1: Trazar una recta.

τ_2: Transportar ángulos.

τ_3: Trazar ángulos.

τ_4: Transportar segmentos.

τ_5: Trazar segmentos.

τ_6: Interceptar dos semirrectas en forma gráfica.

τ_7: Trazar rectas paralelas.

Entendiendo como procedimiento la sucesión de técnicas, surge la reformulación de las mismas y las diferentes justificaciones, teniendo en cuenta que dos procedimientos son diferentes en una tarea si el orden de las sucesivas técnicas utilizadas se altera o si se plantean técnicas distintas. Por ejemplo, para la tarea T_2 (Construir un triángulo dado un lado y dos ángulos), se pueden realizar tres procedimientos diferentes desde un primer análisis de los recursos empleados.

$\tau_5 \rightarrow \tau_3 \rightarrow \tau_3 \rightarrow \tau_6$

$\tau_1 \rightarrow \tau_3 \rightarrow \tau_5 \rightarrow \tau_3 \rightarrow \tau_6$

$\tau_1 \rightarrow \tau_3 \rightarrow \tau_3 \rightarrow \tau_5 \rightarrow \tau_7 \rightarrow \tau_6$

También hay que considerar que dos procedimientos son diferentes cuando se cambia el instrumento de construcción. Por ejemplo, utilizando regla de bordes paralelos, regla y transportador, regla no graduada y compás o regla graduada y compás.

En función de estas consideraciones describimos los nuevos procedimientos que utilizaremos en la organización matemática de referencia.

3.2. Descripción de los procedimientos en función del instrumento utilizado

En la exploración del campo de problemas de la «construcción de triángulos» se eligen algunas tareas y se buscan los procedimientos que nos permite delimitar un primer campo de problemas.

Los instrumentos utilizados son:

a. Regla de bordes paralelos.
b. Regla y transportador.
c. Regla no graduada y compás.
d. Regla graduada y compás.

Se trabajó con los siguientes procedimientos:

a. El transporte de lado y luego el transporte de los dos ángulos.
b. El transporte de ángulo, luego transporte de lado y nuevamente el transporte de ángulo.
c. El transporte de los dos ángulos y luego el del lado.

3.3. Análisis a priori de las tareas T_2: «Construir un triángulo dados un lado y dos ángulos»

Para Brousseau (1986, p. 43), «El momento fundamental de la investigación en didáctica de la matemática lo constituye el análisis a priori de la situación. El investigador en didáctica debe ser capaz de prever los efectos de la situación que ha elaborado, antes de ponerla a prueba en el aula; sólo posteriormente podrá contrastar sus previsiones con los comportamientos observados.»

En este trabajo nos focalizamos en el análisis de la T_2 y describimos los posibles procedimientos:

I. Utilizando regla graduada y transportador graduado

a. $\tau_5 \rightarrow \tau_3 \rightarrow \tau_3 \rightarrow \tau_6$
b. $\tau_1 \rightarrow \tau_3 \rightarrow \tau_5 \rightarrow \tau_3 \rightarrow \tau_6$
c. $\tau_1 \rightarrow \tau_3 \rightarrow \tau_3 \rightarrow \tau_5 \rightarrow \tau_7 \rightarrow \tau_6$

II. Utilizando regla no graduada y compás

a. $\tau_1 \rightarrow \tau_4 \rightarrow \tau_2 \rightarrow \tau_2 \rightarrow \tau_6$

b. $\tau_1 \rightarrow \tau_2 \rightarrow \tau_4 \rightarrow \tau_2 \rightarrow \tau_6$

c. $\tau_1 \rightarrow \tau_2 \rightarrow \tau_2 \rightarrow \tau_4 \rightarrow \tau_7 \rightarrow \tau_6$

III. Utilizando regla graduada y compás

a. $\tau_1 \rightarrow \tau_5 \rightarrow \tau_2 \rightarrow \tau_2 \rightarrow \tau_6$

b. $\tau_1 \rightarrow \tau_2 \rightarrow \tau_5 \rightarrow \tau_2 \rightarrow \tau_6$

c. $\tau_1 \rightarrow \tau_2 \rightarrow \tau_2 \rightarrow \tau_5 \rightarrow \tau_7 \rightarrow \tau_6$

En el caso de la tarea T_3 (Construir un triángulo dado un lado y dos ángulos), solo constataremos que de ella surgen otras subtareas tales como «que los dos ángulos sean adyacentes al lado», «los ángulos pueden ser dos ángulos agudos, un obtuso y un agudo, un recto y un agudo» o «que un ángulo sea adyacente al lado y el otro opuesto», realizando el mismo estudio de los ángulos que en el caso anterior. Estas subtareas proporcionan las herramientas necesarias para el desarrollo y ampliación de una de las técnicas iniciales. En esta ampliación van apareciendo necesidades matemáticas y didácticas que ayudan a justificar la praxeología matemática.

4. Análisis de la puesta a prueba en el aula

En el análisis a priori anticipamos los probables procedimientos que plantearán los alumnos para la tarea «Construir un triángulo dados un lado y dos ángulos» que corresponde al Tema: Construcción de triángulos, tarea que se llevó a cabo en los 7º años de la institución Escuela Patricio Sosa en el turno mañana y tarde.

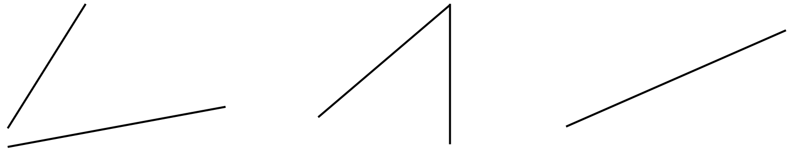
El trabajo en el aula se realizó con tres fichas repartidas a cada alumno, donde se explicitaban las tareas y recursos correspondientes. Para cada tarea se ocupó 80 minutos de clase. En todas las clases se trabajó en grupos de a pares. Con estas condiciones se realizó el momento del primer encuentro con el tema, poniendo en juego la *Ficha nº 1*, cuya finalidad fue: «Detectar los saberes que los estudiantes tenían sobre el transporte de ángulos y segmentos, comprobándose que sí disponían de ellos usando distintos recursos, como regla graduada y transportador.»

En el momento de exploración y elaboración de una técnica relativa a este tipo de tarea, se trabajó con los recursos de regla y compás la *Ficha nº 2*: Dados dos ángulos agudos y un lado y la *Ficha nº 3*: Dados ángulo agudo, un ángulo recto y un lado.

Los estudiantes debían anticipar las posibles formas de construir un triángulo y discutir sobre la posibilidad de construcción, ya que está implícita la propiedad de los ángulos interiores de un triángulo.

A modo de ejemplo se analizará la *Ficha nº 2*.

Ficha nº 2: Construir utilizando regla y compás un triángulo con los siguientes elementos:



Escribir el procedimiento utilizado para la construcción.

Figura 1. Ficha nº 2 de la propuesta didáctica.

Durante el desarrollo del trabajo realizado por los alumnos con la *Ficha nº 2*, se observó que procedían a aplicar diferentes técnicas, justificando el trabajo realizado en forma escrita a través del procedimiento empleado, lo que hizo visible la constitución del entorno tecnológico-teórico. En la producción de los estudiantes se observó dos procedimientos:

Primer procedimiento. Se aplica τ_2 para el transporte de uno de los ángulos utilizando el compás para el transporte del mismo. Luego con τ_4 se transporta el segmento sobre cualquiera de los lados del ángulo transportado, utilizando compás. A posteriori con τ_2 se traslada el otro ángulo sobre el segmento transportado anteriormente, de manera que el vértice del mismo sea el extremo libre del segmento. En síntesis en el esquema de trabajo se suceden las siguientes técnicas $\tau_2 \rightarrow \tau_4 \rightarrow \tau_2$.

Segundo procedimiento. Mediante τ_4 con regla no graduada se transporta el lado, luego con τ_2 se traslada la abertura de un ángulo sobre uno de los extremos del segmento y con τ_2 el otro ángulo.

En síntesis en el esquema de trabajo se suceden las siguientes técnicas $\tau_4 \rightarrow \tau_2 \rightarrow \tau_2$.

El momento del trabajo de la técnica fue durante la socialización de los distintos procedimientos; en este momento es cuando surge la discusión sobre las condiciones de los ángulos, y se conjetura que: «dados dos ángulos y un lado», si los dos ángulos son agudos siempre es posible construir un triángulo y anticipar que sucede cuando uno de los datos es un ángulo recto.

5. Análisis a posteriori

Ficha nº 2.

Procedimientos	Análisis a priori	Trabajo de los alumnos	Análisis a posteriori
Transporto uno de los ángulos utilizando el procedimiento para el transporte de un ángulo con compás. Transporto el segmento sobre cualquiera de los lados del ángulo transportado en 1, utilizando compás. Transporto el otro ángulo sobre el segmento transportado en 2, de manera que el vértice del mismo sea el extremo libre del segmento.	$\tau_1 \rightarrow \tau_2 \rightarrow \tau_4 \rightarrow \tau_2 \rightarrow \tau_6$	$\tau_2 \rightarrow \tau_4 \rightarrow \tau_2$	Podemos decir que los alumnos transportan directamente el ángulo sin tener en cuenta la recta. Las mayores dificultades están en el momento de la socialización en relación al lenguaje geométrico que luego se recuperaba en el momento de institucionalización.
τ_5: Con un compás que mantenga la abertura se transporta el lado, luego con τ_2 la abertura del ángulo y con τ_2 el otro ángulo.	$\tau_1 \rightarrow \tau_5 \rightarrow \tau_2 \rightarrow \tau_2 \rightarrow \tau_6$		Podemos decir que los alumnos transportan directamente el segmento sin tener en cuenta la recta.

Ficha nº 3. Los mismos procedimientos con la variante de que el ángulo recto puede ser transportado con la esquina de la regla de bordes paralelos.

Aquí los procedimientos empleados consisten en transportar el lado XY sobre una recta; sobre el lado XY se transporta el ángulo YXZ (se puede marcar el ángulo por arriba o abajo del segmento); sobre el lado XY se transporta el ángulo XYZ (se puede marcar el ángulo por arriba o abajo del segmento); luego se marca el punto donde se cortan las semirrectas de ambos ángulos (que no se encuentran sobre las rectas que contiene el segmento XY).

El análisis a priori consiste en la secuencia de técnicas:

$$\tau_1 \rightarrow \tau_5 \rightarrow \tau_2 \rightarrow \tau_2 \rightarrow \tau_6$$

En este caso, los alumnos transportan directamente el segmento sin tener en cuenta la recta.

6. Conclusiones

Luego de haber sido partícipes de las realidades que acontecen en la sala de clases, consideramos que el aula es una complejidad donde confluyen teoría y práctica. En este sentido analizamos y vimos reflejados los momentos de trabajo; sin embargo, el momento de exploración de la técnica se desarrolló en un tiempo mayor al previsto, lo que generó una reorganización de las actividades.

Focalizados en la tarea seleccionada, concluimos que las variables didácticas que permite complejizarla son: 1) los datos asociados a la tarea y 2) los recursos utilizados en la tarea y la sucesión de las técnicas, ya que a partir de ellos y de la experiencia previa de los estudiantes emergen nuevos procedimientos de resolución posibilitando en algunos casos nuevos conocimientos

Desde los procedimientos utilizados por los estudiantes, se detectaron casos en los que no pudieron abordar la construcción del triángulo, debido a que no tenían en cuenta dos condiciones: la propiedad de la «suma de los ángulos interiores de un triángulo» y la orientación del segundo ángulo interior transportado para formar el triángulo, un ejemplo de ello, es el siguiente procedimiento escrito por el estudiante X: «Transporto el segmento, sobre una recta cualquiera, luego los ángulos de manera que sus vértices coincidan con los extremos del segmento».

Una sucesión de técnicas como la siguiente: $\tau_1 \rightarrow \tau_2 \rightarrow \tau_2 \rightarrow \tau_4 \rightarrow \tau_7 \rightarrow \tau_6$$\tau_1 \rightarrow \tau_2 \rightarrow \tau_2 \rightarrow \tau_4 \rightarrow \tau_7 \rightarrow \tau_6$, no surge en el trabajo geométrico del 7º año de escolaridad, debido a la ausencia del uso de estas técnicas en este contexto; como la τ_7. Por lo tanto, manifestamos que la selección de la tarea influye en la complejización de la enseñanza de un tema, pudiendo afirmar que el estudio de las técnicas incide en el currículo escolar.

Así también, la elaboración de la organización matemática de referencia, que involucra el análisis de las distintas obras institucionales, escolares y curriculares (libros de textos, diseños curriculares jurisdiccionales, carpetas de los alumnos, entre otros) favoreció a posteriori el diseño de la secuencia de enseñanza y el análisis de la producción de los alumnos. A partir de la organización matemática elaborada, se desprende el estudio de la organización matemática puntual y desde la puesta en escena de la secuencia, se complejiza hacia una organización matemática local.

Referencias

Bosch, M., Fonseca, C. & Gascón J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares, *Recherches en didactique des mathématiques*, *24*(2-3), 205-250.

Bosch, M. & Gascón, J. (2007). 25 años de trasposición didáctica. En L. Ruiz Higueras, A. Estepa, F. J. García (Eds). *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD)*, (pp. 385-406). Jaén, España: Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, *7*(2), 33-115.

Chevallard, Y., Bosch, M. & Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelona, España: ICE-Horsori.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques, 19*(2), 221-266.

Ibarra, L., Formeliano B., Méndez, G., Velásques, M & Alurralde, F. (2011). Un estudio sobre la noosfera para entender la enseñanza de la geometría a través de la construcción del triángulo. En M. Bosch et al. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 367-381). Barcelona, España: CRM.

L’évolution du rapport au savoir en classe thérapeutique : conditions et contraintes

Ghilaine Menotti
LISEC, Université de Strasbourg (IUFM), France

Abstract. Autistic children may, in an appropriate school context, develop their praxeologies relation to knowledge and to studies. We identify conditions and constraints enabling us to characterize the school background in which they operate. Within the class, we study topological changes, both in teacher and student position. We contextualize our words with data from a community school therapeutic class, which hosts about ten children most of whom are in kindergarten (in 1st school year) and mostly boys.

Resumen. Algunos niños autistas pueden, en un contexto escolar apropiado, desarrollar su relación a las praxeologías de saber y de estudio. Identificamos las condiciones y limitaciones que permiten caracterizar el contexto escolar en lo que evolucionan. Dentro mismo de la clase, estudiamos los cambios topológicos que se operan, tanto en posición de profesor como en posición de alumno. Contextualizamos nuestro discurso con datos de una clase terapéutica de una escuela de barrio que acoge una decena de niños, casi todos procedentes de preescolar, mayoritariamente varones.

Résumé. Des enfants autistes peuvent, dans un contexte scolaire adéquat, développer leur rapport aux praxéologies de savoir et d’étude. Nous identifions des conditions et des contraintes permettant de caractériser le contexte scolaire dans lequel ils évoluent. Au sein même de la classe, nous étudions des modifications topologiques, aussi bien en position professeur, qu’en position élève. Nous contextualisons nos propos par des données issues d’une classe thérapeutique, au sein d’une école de quartier, accueillant une dizaine d’enfants, pour la plupart issus de maternelle, en grande majorité des garçons.

IV^e^ congrès international sur la TAD (Toulouse, 21-26 avril 2013)
Axe 4. *Apports de la TAD à l’enseignement et à la diffusion des connaissances*

Menotti, G. (2017). L’évolution du rapport au savoir en classe thérapeutique : conditions et contraintes. Dans G. Cirade et al. (Éds), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l’école et dans la société* (pp. 839-860). https://citad4.sciencesconf.org

1. Introduction

Du fait de leur centre d'intérêt restreint et de leur comportement stéréotypé, les enfants autistes ont très souvent une histoire scolaire pour le moins houleuse, altérant leur rapport à l'étude au sein de cette institution qu'est l'École. Élèves et enseignants sont mis en grande difficulté par l'impossibilité pour certains enfants de laisser toute trace écrite, d'amorcer ou de poursuivre seuls une tâche scolaire, mais aussi par les stratégies qu'ils mettent en place pour dissimuler leurs connaissances ou contourner les demandes. Ces deux dimensions, personnelle et sociale, s'entremêlent dans leur rapport problématique à l'apprendre.

L'école étant un lieu articulant dimensions sociale et culturelle, une voie de travail pour faire évoluer les rapports à l'étude et à certaines praxéologies de savoir (Chevallard, 1992) met l'accent sur l'inscription dans un collectif pour permettre à l'enfant de venir occuper une position d'élève. Vouloir développer le rapport à l'étude, dans le cadre de l'école, des enfants autistes nécessite des modifications dans l'équipement praxéologique du professeur et des élèves. Dans la position de professeur, une des premières contraintes externe à la classe se situe dans sa conception des apprentissages des élèves, ici autistes. Dans la position d'élève, cela a pour conséquence des coopérations loin d'être transparentes pour ces enfants au vu de leurs troubles.

Nous contextualiserons nos propos par des données issues d'une classe thérapeutique, au sein d'une école de quartier, accueillant une dizaine d'enfants, pour la plupart issus de maternelle, en grande majorité des garçons. Ces enfants de 5 ou 6 ans à leur arrivée dans cette classe, généralement scolarisés à mi-temps, sont pris en charge le reste de la journée au sein d'un hôpital de jour. Cette classe, comme toutes celles de l'enseignement spécialisé publique est incluse dans une école élémentaire.

2. Conditions et contraintes externes à la classe thérapeutique

La scolarisation des enfants autistes est une question vive actuellement en France. Dans la continuité du « plan autisme 2008-2010 »[1], la Haute Autorité de Santé (HAS) et l'Agence nationale de l'évaluation et de la

1. http://www.sante.gouv.fr/IMG/pdf/Plan_autisme_2008-2010.pdf

qualité des établissements et service sociaux et médicaux sociaux (Anesm) ont publié, en 2012, une recommandation de bonne pratique dans la prise en charge des enfants autistes et plus généralement porteurs de troubles envahissants du développement (TED). Ces troubles sont définis selon la 10e révision de la classification statistique internationale des maladies et des problèmes de santé connexes, comme :

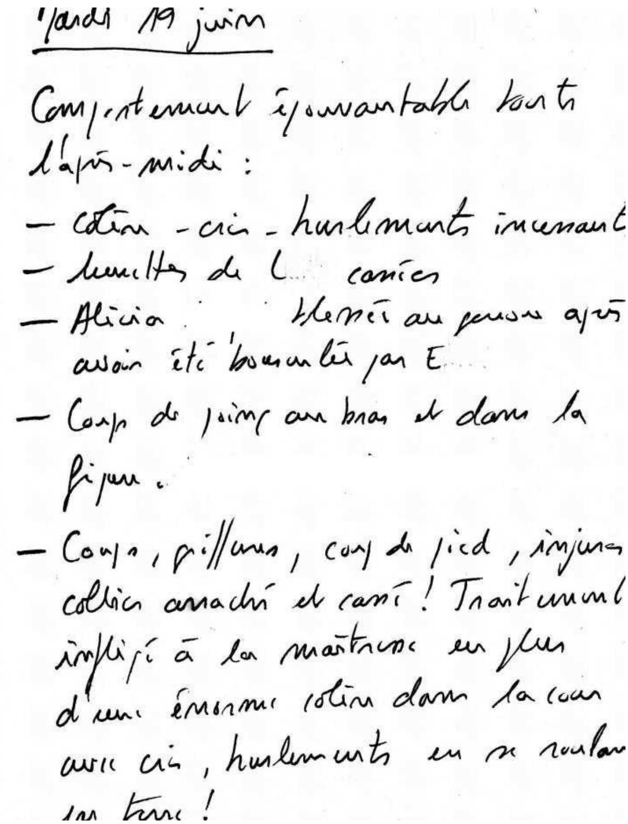
> Un groupe de troubles caractérisés par des altérations qualitatives des interactions sociales réciproques et des modalités de communication, ainsi que par un répertoire d'intérêts et d'activités restreint, stéréotypé et répétitif. Ces anomalies qualitatives constituent une caractéristique envahissante du fonctionnement du sujet, en toute situation. (Organisation Mondiale de la Santé, 2000, CIM 10, chap. V, codes F84.0 à F84.9)

L'argumentaire scientifique de ce rapport comprend une partie consacrée à l'évaluation de l'efficacité et de la sécurité des interventions proposées pour ces enfants porteurs de TED. Les auteurs y constatent que les interventions globales comportementales ou développementales

> … concernent toutes des enfants avec TED et retard mental de léger à sévère, âgés de 18 mois à 6 ans en début d'intervention. Aucune étude n'a évalué l'efficacité ou la sécurité des interventions globales comportementales ou développementales pour les enfants au-delà de 6 ans, sauf une, relative à une intervention Education of Autistic and Communication related handicapped CHildren (TEACCH), où les enfants étaient plus âgés en début d'intervention. (p. 98)

Ils précisent également qu'« aucune revue systématique spécifique aux interventions en milieu scolaire n'a été identifiée » (p. 94). Toutefois la nécessité de l'intégration scolaire des enfants autistes y est réaffirmée.

Depuis la loi du 30 juin 1975, de nombreux textes prônent l'intégration scolaire des personnes handicapées, celui du 11 février 2005 prévoyant le droit à la scolarisation de tout enfant, quelle que soit la nature de son handicap. Or, la scolarisation de ces enfants n'est pas sans poser problème, dans certains cas, comme en témoigne l'écrit de cette maîtresse de grande section. En fin d'année scolaire, elle décide d'afficher quotidiennement ses remarques au-dessus du portemanteau d'Éric, enfant autiste de 5 ans, scolarisé dans cette école depuis l'âge de 3 ans.



Mardi 19 juin

Comportement épouvantable toute l'après-midi :

– colère – cris – hurlements incessant

– lunettes de L... cassées

– Alicia ... blessée au genou après avoir été bousculée par E...

– Coups de poing au bras et dans la figure.

– Coups, griffures, coup de pied, injures collier arraché et cassé ! Traitement infligé à la maîtresse en plus d'une énorme colère dans la cour avec cris, hurlements en se roulant par terre !

Figure 1. Exemple de réaction d'une maîtresse de maternelle lors de la scolarisation d'un enfant autiste.

On peut y lire :

Mardi 19 juin

Comportement épouvantable toute l'après-midi :

– colères – cris – hurlements incessants

– lunettes de L. cassées

– Alicia blessée au genou après avoir été bousculée par E.

– Coups de poings au bras et dans la figure

– Coups griffures, coups de pieds, injures, collier arraché et cassé ! Traitement infligé à la maîtresse en plus d'une énorme colère dans la cour avec cris, hurlements en se roulant par terre !

Le désarroi manifesté par cette enseignante de grande section de maternelle, socialement tenue de scolariser ces enfants, est à regarder à la lumière de contraintes et de conditions liées à la position professeur de maternelle et relevant de différents niveaux de l'échelle de codétermination didactiques. Notons deux contraintes extérieures à l'école relevant du niveau de la société : le peu de stabilité des connaissances sur les TED (HAS, 2012), l'absence de diagnostic médical et donc de prise en charge lors de l'année de petite section. Ajoutons-en trois autres relevant du niveau de l'école : le déficit de formation de certains enseignants sur ce sujet (HAS, 2012), les effectifs des classes, parfois les doubles niveaux, la présence limitée d'auxiliaires de vie scolaire (AVS) peu formées. Centrons à présent notre attention sur certaines conditions de scolarisation en maternelle, référant ainsi au niveau pédagogique de l'échelle de codétermination didactique. Dès leur entrée en petite section, les enfants porteurs de TED sont mis en difficulté de plusieurs façons. Citons :

- La prédominance de l'oral au détriment des pictogrammes ou de l'écrit, alors que dans ce dernier domaine, les enfants semblent avoir des compétences précoces : « … les lettres et les chiffres peuvent fonctionner en tant qu'objet autistique et ainsi permettre d'établir une première relation, une première médiation à travers des apprentissages » (Bursztejn & Gerber, 2001).
- L'accueil du matin et les moments d'autonomie dans la journée au cours desquels les élèves peuvent se rendre dans les « coins jeux » organisés dans la salle de classe. Il s'agit généralement de coins « dînette », « garage », « poupées », « jeux de sociétés », « lecture », autrement dit des lieux favorisant les imitations et interactions sociales, excluant les enfants autistes du fait même de leurs troubles.
- La gestion des placements lors des mises au travail (regroupement autour de l'enseignant(e), ateliers…), qui est laissée à l'initiative des élèves et conduit à des régulations entre eux, le professeur n'intervenant qu'en dernier recours. Du fait de leurs difficultés de communication, les enfants autistes ne peuvent qu'être mis sur la touche de ces négociations souterraines entre élèves, ce qui engendre bien souvent des conflits du type de ceux décrits par la maîtresse citée ci-dessus.

Soulignons qu'ici ces élèves particuliers peuvent être regardés comme des révélateurs de pratiques « transparentes » dans le contexte d'une classe ordinaire. Dans un tel cadre, les élèves les plus au fait du fonctionnement de la situation de classe choisissent l'espace qu'ils veulent occuper, aussi bien lors des mises au travail que lors des moments d'accueil et d'autonomie. Ce rapport particulier à l'école pourrait être regardé à la lumière de l'habitus, développé par Pierre Bourdieu (1980).

Les fortes tensions naissant dans un tel contexte scolaire peuvent avoir des effets délétères sur la scolarisation de l'enfant autiste et sur ceux qui gravitent autour (Goffman, 2010), produisant des inquiétudes parfois exprimées par les parents. La souffrance des enfants autistes en classe ordinaire, dont certains ont été entièrement déscolarisés alors que d'autres sont accueillis une demi-heure par jour avec pour condition sine qua non la présence de leur mère, produit un premier système de contraintes spécifiques aux classes thérapeutiques dans lesquelles des enseignants spécialisés assurent la scolarisation d'élèves en situation de handicap.

Une des premières tâches de l'enseignant consiste alors à réconcilier l'enfant et sa famille avec l'école. Avant même leur arrivée, l'enseignant est amené à penser leur accueil en fonction de leurs spécificités, non seulement en lien avec leurs troubles mais également avec leur histoire scolaire. La classe doit impérativement être un espace sécurisé et sécurisant. Pour reprendre une idée de René Amigues (2007, p. 95), la classe thérapeutique « devient pour l'enfant un nouveau lieu de médiation entre lui et sa famille », l'école étant une institution permettant aux parents de s'inscrire dans une certaine normalité sociale.

Ces professeurs spécialisés sont « chargés de l'enseignement et de l'aide pédagogique aux élèves présentant des troubles importants des fonctions cognitives » comme le précise l'arrêté du 5 janvier 2004. Ajoutons qu'une des particularités liées à cette option est l'absence de programme d'enseignement de référence : l'enseignant « construit un projet d'enseignement ou d'aide pédagogique adapté en prenant en compte l'environnement scolaire et familial […] ». Les attentes institutionnelles ne sont plus formulées en termes de praxéologies de savoir mais en termes de possibles. De telles modifications produisent un déplacement du système de contraintes pesant sur la scolarisation de ces élèves. D'institutionnelles elles deviennent internes aux professeurs. Ce silence de la noosphère quant à la scolarisation de ces enfants ayant des troubles cognitifs, et bien au-delà, de la société (Basaglia, 1970), conduit à un système de scolarisation fort disparate. Notons que Jacques Hochmann

(2009) fait un parallèle entre les élèves du début du XX[e] siècle, exclus du système d’enseignement au titre de leur « inéducabilité » et les autistes d’aujourd’hui :

> ... relégués dans les services souvent les plus négligés des hôpitaux psychiatriques, les idiots d’alors, nos autistes d’aujourd’hui, ne bénéficiaient plus, lorsqu’elle existait, que d’une instruction scolaire très limitée. (p. 385)

Un tel parallèle laisse entrevoir comment sont, trop souvent, regardées les capacités d’étude de ces enfants. Dans un tel contexte, les normes de la profession concernant les élèves « faibles » risquent de prendre le dessus et d’hypothéquer les apprentissages à venir puisque les praxéologies d’étude mises en place par le professeur sont produites par le *logos* dont il est porteur quant aux capacités cognitives de ces élèves. Penser ces enfants capables d’apprendre à lire, à écrire et à calculer demande une grande confiance dans leurs capacités, comme en attestent de nombreux travaux montrant l’interdépendance entre les attentes du professeur et les apprentissages des élèves (Rosenthal & Jacobson, 1968 ; Gilly, 1989 ; Menotti, 2002).

Inversement, cette liberté institutionnelle laissée à ces enseignants spécialisés produit de nouvelles conditions de scolarisation dans ces classes thérapeutiques.

3. Conditions et contraintes internes à la classe thérapeutique

Chacun de ces enfants a ses conditions pour être élève, de façon plus ou moins marquée, plus ou moins envahissante. Dans la position de professeur, ces conditions deviennent des contraintes d’enseignement ; elles imposent notamment une vigilance de tous les instants, surtout en début de scolarisation en classe thérapeutique Cette vigilance a, entre autres, comme fonction de cerner au plus près les modalités nécessaires à mettre en place pour chaque élève afin de rendre possible des activités scolaires dont le processus d’apprentissage dépend pour beaucoup. Les aménagements et adaptations co-construits avec l’élève sont le fruit d’un travail d’observation exigeant et de longue haleine dont l’issue n’est pas toujours aussi concluante que dans le cas de Louis, élève de la classe thérapeutique :

> Après dix-huit mois de scolarisation de Louis en classe thérapeutique, la professeure n'était toujours pas en mesure d'affirmer s'il savait lire. Il ne semblait rien lire d'autre que son prénom. Il utilisait les livres pour les empiler et les brasser, c'est-à-dire faire passer le livre du dessous sur le dessus de la pile et ainsi de suite. Les livres étaient aussi des personnages posés sur des chaises qu'il déplaçait en récitant les stations de tram. Imposer un autre usage du livre : l'ouvrir, le feuilleter, en regarder les illustrations ou les textes, générait une intense angoisse. La maîtresse lui offrit un album emballé dans du papier cadeau. Intrigué, il accepta d'ouvrir le livre et d'en tourner les pages. Petit à petit, avec beaucoup de précaution, l'enseignante réussit à mieux cerner quelles étaient les lettres qui lui faisaient peur. Seules celles de son prénom étaient qualifiées de « lettres amies », les autres étant plus ou moins menaçantes. Lorsque Louis écrivait, les lettres se transformaient parfois sous son crayon en arbre ou en fleur, bien souvent le travail était effacé, et il exprimait sa fatigue intense devant une activité si coûteuse. L'ordinateur l'angoissait, il craignait d'être prisonnier de la machine. La professeure apporta alors une machine à écrire, qu'elle présenta comme une machine qui lui permettrait d'écrire en prenant le pouvoir sur les lettres. Cela leur ouvrit à tous les deux des perspectives. Lors d'un travail sur la compréhension, devant choisir un mot parmi deux propositions écrites pour légender une illustration, il réussit le travail sans se tromper, à condition que personne d'autre ne s'approche. Il fut par contre impossible pour cet élève qui ne se taisait pourtant jamais d'oraliser le mot entouré. La professeure commença alors un travail d'enquête pour recenser à quelles conditions Louis pouvait montrer qu'il savait lire. Elle découvrit ainsi qu'il ne pouvait effectuer les exercices de lecture que sur une feuille volante ; le contenu ne devait pas être en lien avec son quotidien ou sa personne ; il devait entourer sa réponse, le pointage engendrant une réponse fausse ; il ne pouvait recopier ; lorsqu'il devait choisir un mot parmi trois propositions, il commençait par entourer la catégorie avant d'entourer le mot attendu (ex. fleur pour muguet) ; enfin il était nécessaire que la couleur de la feuille ou de l'écriture soit une « couleur amie ».

Dans un processus d'enseignement/apprentissage, la construction de la connaissance serait regardée, par un constructiviste piagétien strict, comme étant de la seule responsabilité de l’élève. Or l’activité, permettant l’évolution du rapport de l’élève au savoir, est profondément sociale. Cette inscription sociale nécessite de la part du professeur une grande sensibilité au partage des responsabilités (Brousseau, 1996) dans les phénomènes d’apprentissage. Dans l’exemple ci-dessus, il est de la responsabilité du professeur d’enrichir le milieu pour permettre à cet élève de s’engager dans l’activité demandée. Jérôme Bruner (1983), sous couvert d’enrôlement, et Guy Brousseau (1983), sous couvert de dévolution, attirent tous deux notre attention sur ces moments très particuliers de l’apprentissage. Ces deux auteurs placent la responsabilité de l’entrée dans l’activité également du côté du professeur et non pas du seul côté des élèves, contrairement aux interprétations en terme de motivation des élèves qui place la responsabilité dans le *topos* de l’élève.

Permettre à ces enfants de venir occuper la position élève suppose également des modifications dans les praxéologies de l’étude au quotidien. Au lieu de lutter contre les « comportements stéréotypés » de ces enfants, le professeur prend appui sur les forces de ses élèves : il cherche non pas les manques mais les points d’ancrage sur lesquels il peut arrimer les adaptations didactiques pour construire des chemins d’apprentissage. Les coopérations entre Louis et la maîtresse en sont une illustration :

> Louis est tiraillé entre son envie de répondre aux attentes de la maîtresse et l’angoisse qui le submerge à chaque fois qu’il doit faire face à une déstabilisation, même minime. À eux deux, ils ont donc élaboré une façon d’aborder chaque nouvelle notion sur une semaine scolaire, en quatre étapes. Le premier jour la professeure exécute seule la consigne en verbalisant ses procédures, l’enfant assis à côté d’elle observe à distance. Le deuxième jour, l’enseignante reprend le même exercice, l’élève pose sa main sur la sienne. Le troisième jour, les mains s’inversent. La séance se clôt par un point sur le ressenti de Louis et les perspectives : pourra-t-il oser seul l’activité le lendemain ? Le quatrième jour, s’il va bien, Louis annonce à la maîtresse dès son arrivée à l’école qu’il est prêt à réaliser l’activité seul, et fixe les conditions nécessaires : la présence de sa professeure ou au contraire sa mise à distance, le choix du support, le moment le plus opportun, souvent dès son arrivée, dans une urgence à la hauteur de la tension ressentie.

Le fait pour le professeur de prêter sa main, ses mots, ses gestes est regardé comme une coopération entre le maître et l'élève. L'évolution quotidienne témoigne de la volonté des deux protagonistes de prendre en compte l'autre : aussi bien du point de vue du professeur qui tient compte des difficultés de ses élèves face à la nouveauté que du point de vue de l'élève qui accepte d'y faire face.

De telles conditions pour être élève pèsent lourd dans le projet individuel de scolarisation, à tel point que l'on peut se demander s'il sera possible aux élèves de classe thérapeutique d'appliquer dans un autre contexte des connaissances apprises en classe. Maxime nous permet de penser que c'est envisageable :

> Maxime, 9 ans, est un grand producteur de listes. Sans cesse, que ce soit avec un feutre sur une feuille, sa salive sur une vitre ou sur le sol, il écrivait en classe le contenu de sa vidéothèque, listait les albums de Tintin, de Tchoupi, les aventures de Pokemon... Rassemblées dans le « cahier de Maxime », son cahier personnel, ces listes auront été le socle sur lequel il a construit ses acquisitions scolaires deux années durant. Petit à petit, ses listes furent enrichies, il abandonna son écriture logographique, disposée en strates, au profit d'une écriture verticale puis horizontale avec la compréhension de la phrase. Il devint capable d'écrire de petits textes décrivant ses vacances idéales, ses souhaits d'activités pour le week-end, persuadé que ce qui est écrit se réalise.
>
> Ce jour-là, après un semestre en classe thérapeutique, Maxime vint vers sa maîtresse, agité, répétant en boucle la même phrase : « Tu t'es fait mal ? »
>
> La maîtresse : « Maxime s'est fait mal. Où as-tu mal, Maxime ?
>
> Maxime : « Tu t'es fait mal ? »
>
> Effectivement, sa gencive saignait légèrement. Il ne pouvait dire ce qui s'était passé, malgré ses tentatives. Tout à coup, il prit un feutre et écrivit « Cassé dent ». Il regarda sa maîtresse en tapotant son texte.
>
> La maîtresse : « Maxime s'est cassé une dent ? »
>
> Maxime : « Cassé dent, cassé dent. »
>
> Une fois seulement son écrit oralisé, Maxime put le répéter. Maxime venait de comprendre le pouvoir de communication du langage écrit. Professeure et élève furent abasourdis !

> Quelques semaines plus tard, l'enseignante rencontra sa mère. Celle-ci aborda comme à chaque fois la question de la santé de son enfant. Habituellement, c'était pour décrire le casse-tête de l'identification des maux dont Maxime se plaignait. Il geignait sans pouvoir exprimer ce qui n'allait pas. Mais la semaine précédente, pour la première fois, lorsque sa mère lui avait demandé où il avait mal, Maxime avait pris l'initiative d'écrire sur une ardoise « Maxime mal ventre ». Quel soulagement, quelle fierté devant ce progrès tant espéré !

Il ne s'agit pas, de notre point de vue, de simples incorporations d'algorithmes mais bien l'élaboration de schèmes (Vergnaud, 2003) permettant de fonctionnaliser des savoirs. Il y a bien construction de praxéologies en réponse à des questions qui se révèlent être un enjeu de l'étude pour l'élève. Cependant rares sont les occasions de percevoir ces phénomènes. Il est marquant d'observer combien les troubles de la communication de ces élèves peuvent générer des malentendus quant à leurs compétences scolaires. Sans vouloir en donner d'interprétation, il semble que ces enfants ont beaucoup de difficultés à faire état de leurs connaissances et auraient plutôt tendance à chercher à développer de nombreuses stratégies pour les rendre invisibles. À l'heure actuelle, nous ignorons la fonction de cette opacité en position d'élève, en revanche en position de professeur elle est fortement problématique en termes d'adaptation des pratiques pédagogiques et didactiques. Pour tenter de l'amoindrir il semble qu'une des possibilités réside dans l'observation non intrusive.

Avant d'entamer un travail d'ouverture des praxéologies de savoir de ses élèves, le professeur va asseoir ses praxéologies d'étude sur les « intérêts restreints » de chacun pour établir avec lui une relation, tout en étant conscient des risques d'enfermement que cette situation pourrait contenir. Pour ébaucher cette tâche si complexe, « établir une relation », le professeur juge nécessaire qu'une stabilité praxéologique soit maintenue pour l'enfant. Dans leurs domaines de connaissances, ces élèves sont bien souvent très informés, sans que l'on sache comment ils parviennent si jeunes à de tels niveaux d'expertise en dépit de leurs difficultés dans les relations sociales. En tout état de cause, ces îlots de connaissance témoignent de leur capacité cognitive. Brice a, pour sa part, une prédilection pour les nombres :

> Alors que la professeure menait une activité en bibliothèque, passant d'un élève à l'autre, Brice, 6 ans, qui regardait par la fenêtre, écrivit 242 sur la vitre à l'aide de sa salive. La maîtresse lui proposa d'écrire ce nombre à l'ordinateur et engagea un dialogue avec l'enfant, ajoutant 243 et demandant ce qui vient après. Petit à petit, elle changea les intervalles, introduisit des suites croissantes et décroissantes. Brice fut déstabilisé par cette organisation des nombres qui ne lui était pas familière mais l'intérêt était tel qu'il resta assis. Pour la première fois, il la regarda et commenta l'activité d'un « Brice est content ! ». Auparavant la professeure n'arrivait ni à l'approcher ni à s'adresser à lui sans qu'il appelle au secours. Il tournait en rond continuellement, s'arrêtant par endroits pour décoller des autocollants sur des objets (feutres, pointures sous les patins de gymnastique, etc.) pour les recoller ensuite sur des serrures ou divers interstices. Quelques temps plus tard, pour l'aider à s'asseoir et tenter un nouveau temps de communication duelle, la professeure posa sur la table de l'enfant une boîte contenant plusieurs centaines de jetons de lettres et de chiffres. Brice composa et lut des nombres allant jusqu'au million. Personne dans son entourage n'était au courant de telles compétences, toutefois les parents avaient remarqué son intérêt pour les nombres et le rapport qui le liait à un nombre particulier, 372, utilisé pour leur signifier qu'il était en colère.

Ces domaines de compétences constituent des parcelles de culture, ici des praxéologies mathématiques, terrain de prédilection sur lequel ces élèves se replient en cas de déstabilisation cognitive trop importante, chacun ayant ses propres appréciations du « supportable »[2]. Les objets de savoirs, scandés par le temps scolaire, sont marqués par une instabilité inhérente à leur appropriation que ce soit par l'introduction d'un nouveau savoir ou par son inscription dans un nouveau contexte, inscription favorisant le

2. Pour éviter ces replis problématiques dans une dynamique d'apprentissage, les élèves ont peu de temps libre, souvent propice à l'émergence des traits pathologiques. Même les temps libres sont cadrés, des propositions sont faites, l'enfant est accompagné dans son activité si nécessaire. Ce qui n'empêche pas de respecter les moments de repli sur soi, un espace dans la classe étant d'ailleurs prévu à cet effet.

travail sur les invariants spécifiques au savoir étudié (Vergnaud, 2003). Faute de percevoir cette instabilité, antinomique avec les comportements stéréotypés de certains élèves, le professeur pourrait se tromper dans l'interprétation du refus ou des difficultés rencontrés. Deux points de vue doivent pouvoir coexister : celui du professeur, à savoir enseigner de nouveaux savoirs, et celui des élèves, à savoir rester dans une stabilité cognitive. Regarder ces accros dans le processus d'étude comme des négociations chronogénétiques, et non l'enfermement dans des « intérêts restreints », favorise l'intégration de ces enfants dans un collectif, la classe.

La motivation des organisations de savoir, est, dans un premier temps, fortement liée à l'univers de l'enfant, afin de lui permettre d'évoluer vers une position élève. Autrement dit, le professeur a comme projet l'inscription de chacun de ces enfants dans un collectif : la classe. Le passage d'enfant à élève ne se réalise pas sans heurts en classe ordinaire (Amigues, 2007), et à plus forte raison en classe thérapeutique. Il demande la mise en place de coopérations dont les formes peuvent être si diverses que des illustrations s'avèrent nécessaires. Les deux premières porteront sur une coopération entre professeur et élève, d'abord en rapport aux savoirs puis à l'étude, pour finir par une coopération entre élèves.

Dans le premier exemple que nous allons présenter, l'attention du professeur porte sur des praxéologies de savoirs. Il s'agit de l'apprentissage des invariants de la suite numérique des nombres entiers. Comme la plupart des adultes entourant ces enfants, le professeur méconnaît leurs techniques d'études et observe que celles utilisées en général à l'école ne fonctionnent pas dans cette classe. Une programmation prenant appui sur la présentation du programme d'un cycle, correspondant à l'âge des élèves, conduit à une parcellisation de l'apprentissage, parcellisation laissant à la charge des élèves d'établir les liens internes à ce qui doit être appris. Le travail pédagogique et didactique actuellement en cours dans cette classe tend à montrer la nécessité de rompre avec la présentation des programmes (Artaud & Menotti, 2009). À titre d'exemple, une progression dans l'apprentissage de la numération, telle que généralement conduite dans l'enseignement ordinaire en classe de CP, laisse à la charge de la plupart des élèves la conceptualisation des notions-clés comme dizaines et unités (Menotti &

Ricco, 2007). Un tel partage des responsabilités entre le professeur et les élèves ne saurait être possible avec les élèves d'une classe thérapeutique. L'acquisition de praxéologies mathématiques s'avérant problématique, le professeur apporte en classe une table des nombres jusqu'à 100. La réaction des élèves ne s'est pas fait attendre :

> De septembre à décembre, les élèves se sont approprié, chacun à leur tour, cette table des nombres nouvellement introduite en classe. Ils ne toléraient que peu d'interventions de la professeure qui s'est alors contentée de s'installer à côté d'eux sans être trop intrusive par le regard ou la parole. Toutefois, « l'air de rien », quelques remarques sur dizaines et unités furent introduites en fonction des activités « autonomes » des élèves. Un jour de décembre, à l'ordinateur, une rencontre avec les nombres supérieurs à 100 fut organisée. Aussitôt la liste jusqu'à 399 élaborée, Maxime instaura un code couleur (une couleur par ligne, par dizaine) et ajouta des 0 ou 00 devant les unités, rendant ainsi la régularité du système de numération bien visible. Il se mit alors à pleurer très longuement, réclamant le réconfort de la maîtresse pour faire face à cette découverte fortement déstabilisante.
>
> Quelques temps plus tard, constatant que Maxime jouait avec la suite numérique jusqu'à 700, le professeur entreprit d'évaluer ses compétences dans le domaine, se demandant s'il utiliserait ses connaissances sur le passage des unités aux centaines (passage de 99 à 100) pour effectuer le passage des centaines aux milliers. La professeure écrivit donc 997-998, l'élève ajouta 999-1000-1001. Pour 1001, il se trompa à plusieurs reprises avant d'écrire le bon nombre. Il montra à cette occasion ses compétences jusqu'à 100 000, l'activité étant alors interrompue par la cloche de l'école annonçant la récréation.

En position professeur, l'observation devient première par rapport à l'intervention. Ce phénomène est loin d'être anodin : la prise en compte des compétences de chacun pilote alors l'action du professeur. Celui-ci met à disposition des savoirs à acquérir, puis, pour laisser le champ libre à ses élèves, s'efface jusqu'à devenir un observateur lointain. Pour ce faire, l'étude se mène sur un empan suffisamment grand pour permettre aux élèves de dégager les invariants de l'organisation mathématique à apprendre : ici la valeur des chiffres en fonction de leur position. Une telle technique didactique présente un double intérêt : limiter les nombreuses déstabilisations liées à la ponctualisation des objets de savoir, multiplier les spécimens disponibles pour laisser les élèves créer un rapport aux objets de savoir sans que ce rapport puisse trop rapidement se figer. Une telle démarche, qui s'apparente au paradigme du questionnement du monde, appelle une remise en cause profonde d'une des normes de la profession en cours dans les classes ordinaires : « il faut d'abord maîtriser les nombres inférieurs à 10 avant d'étendre l'étude aux nombres inférieurs à 100 » et ainsi de suite jusqu'à l'étude des grands nombres.

Dans le domaine du lire et écrire, des phénomènes du même ordre semblent être à l'œuvre comme nous le montre l'acquisition de la lecture par Alexis :

> La professeure constata très vite qu'il était difficile pour ses élèves d'accepter que plusieurs graphies puissent être associées à un même son, et chercha à lutter contre leur volonté de se cantonner à la récitation des lettres de l'alphabet. Cette récitation pourrait être regardée comme celle de la chaîne numérique détachée de toute autre activité mathématique. Plusieurs élèves maîtrisent d'ailleurs, avant leur arrivée dans la classe, un grand capital de mots mémorisés globalement. Pour aider chaque apprenti-lecteur à dissocier phonème et graphème, la professeure décida de s'appuyer sur la gestuelle Borel-Maisonny, méthode conçue à l'origine pour faciliter l'entrée dans le langage en associant un geste à chaque son. Fort étrangement, tant que les sons étaient affichés au fur et à mesure de leur rencontre, Alexis ne lisait pas la moindre syllabe. En revanche, le jour où l'enseignante fit le choix d'afficher tous les sons sans attendre leur étude, y compris les sons complexes ([oej] d'écureuil par exemple) Alexis se mit à lire. En quelques jours il fut en capacité de lire avec une certaine aisance de petites histoires, sans même buter sur les sons muets.

En position d'élève, Maxime se saisit de la construction de la suite numérique comme pour bon nombre de connaissance, sous forme d'une liste. Il énumère les nombres comme il le fait pour ses CD ou les marques commerciales, cela étant un élément constitutif de son rapport à l'étude. De ce fait il fonctionnalise le savoir (Chevallard, 2007) en relation avec des éléments technologiques personnels. Pour le professeur, de telles praxéologies pourraient être regardées comme structurelles, puisque la fonction des nombres semble absente, mais elles sont regardées comme des conditions d'apprentissage pour cet élève. Cela ne signifie pas une limitation dans les projets d'enseignement comme le montre le premier exemple se rapportant à cet élève découvrant la dimension de communication de l'écrit. Il passe de ce fait d'une fonctionnalisation personnelle, produire des listes, à une fonctionnalisation sociale, communiquer. Ce passage d'une fonctionnalisation à l'autre témoigne d'une modification des éléments technologiques des praxéologies de l'étude en position élève. Ce processus, nous semble devoir être mis en relation avec celui qui conduit d'un concept quotidien à un concept scientifique tel que théorisé par Lev Vygotski (1992).

Pour Arivumani, élève de 9 ans, cette fonctionnalisation est également une condition d'acquisition de praxéologies de savoirs. Pendant que l'enseignante mène l'étude de praxéologies en lien avec le lire et écrire, Arivumani met cet apprentissage au service d'une préoccupation personnelle : lire et écrire aussi en tamoul, sa langue maternelle.

> À son arrivée en classe thérapeutique Arivumani ne parlait pas mais chantonnait beaucoup, il n'avait pas encore appris à lire et à écrire. Il était alors passionné par les petites voitures, les fruits et les films indiens, souvent sous-titrés en tamoul. Après quelques mois, le professeur comprit que les minuscules dessins qu'Arivumani écrivait sur son corps, effaçait de sa feuille de travail dès que quelqu'un s'approchait, ou enfouissait soigneusement sous ses coloriages étaient des signes tamouls. Le tamoul écrit était connu de ses parents mais ne lui avait pas été transmis, perçu comme un obstacle à l'apprentissage du français. Une rencontre avec sa mère permit la levée de cet interdit, la professeure proposa alors à Arivumani un cahier personnel, espace d'expression libre autorisant le tamoul. Il s'agissait tout autant de l'encourager à communiquer, même si c'était dans sa langue maternelle dans un premier temps et d'accompagner les prémices d'une communication « construite » de l'enfant, que de lutter contre un détournement de plus en plus problématique de toutes les activités, comme en témoigne cet usage particulier de la pâte à modeler (figure 2) :

Figure 2. Écrit tamoul en pâte à modeler signifiant : c’est malin.

Arivumani choisit d’en faire un cahier d’expression, y écrivant chaque jour, en tamoul exclusivement. Chaque fois, il appelait du regard la maîtresse pour lui montrer ce qu’il y avait écrit, toutefois celle-ci ne pouvait ni le lire ni le comprendre. Arivumani développa alors la translittération, c’est-à-dire la traduction phonétique du tamoul vers le français, pour pouvoir être lu. Cela sous-entendait une capacité à segmenter un mot en syllabes, à isoler une syllabe dans le mot puis à l’encoder en trouvant le graphème approprié dans une autre langue.

Arivumani permit ainsi au professeur de découvrir les nombreuses compétences de lecture qu’il avait assimilées, capacités insoupçonnées tant les progrès semblaient lents ! Une lenteur de surface à relativiser une fois perçu le parcours invisible effectué par l’enfant dans le même temps. Ainsi Arivumani a semblé calquer les étapes de l’apprentissage de la lecture en français pour structurer sa connaissance d’autodidacte du tamoul. Sur la photo ci-dessous (figure 3), l’élève a traduit phonétiquement les noms de deux films très célèbres :

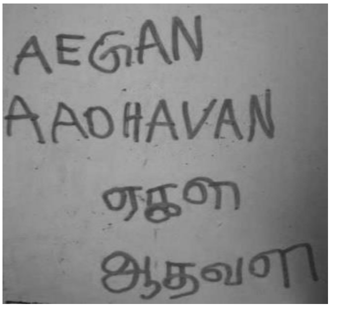


Figure 3. Translittération du tamoul en français.

Ainsi ces élèves, du fait de leurs troubles, laissent à voir un processus ordinairement invisible dans la position élève, la fonctionnalisation des savoirs.

La dernière présentation de coopération en classe relate une dimension plus inattendue avec des élèves autistes : la coopération entre élèves. Ce type de coopération demande de fortes convictions du professeur sur l'interdépendance de l'activité sociale et de l'apprentissage individuel. Loin d'être un acquis, la cohésion des élèves en groupe classe est le résultat d'un travail de fond, entre autres par le biais de rituels. Ils permettent d'instituer des comportements attendus, et leur relative stabilité favorise l'identification des spécificités de ces comportements en fonction des lieux, dans la classe et dans l'école. Incorporés tels quels dans un premier temps par ces élèves autistes, ils sont, pour partie, des alternatives à leur « comportement stéréotypé ». Du fait de leur trouble, ces enfants porteurs de TED sont très souvent regardés par le biais de leur singularité, cette intégration de règles et comportements collectifs marque une étape dans leur socialisation. Le groupe vient potentialiser les possibilités de l'élève en diluant l'exposition de chacun à l'instabilité inhérente à tout nouvel apprentissage comme dans cet épisode de classe :

> Lors d'une séance de lecture soutenue par la tablette numérique, chaque élève à son tour devait écrire le mot demandé. Pour faire face à la frustration générée par l'attente de la tablette tant convoitée, les élèves se mirent à coopérer spontanément. Le lecteur le plus expert décomposait les mots en sons, un second enfant cherchait parmi les affichages référents les graphies possibles tandis que celui à qui la tâche avait été prescrite composait le mot demandé sur la tablette. Les trois partageaient le plaisir de la validation externe donnée par la pluie d'étoiles sur l'écran.

Cette répartition des tâches entre ces trois élèves atteste bien d'une coopération. Le partage du plaisir décrit ici à la fin de la tâche témoigne, lui, de la préexistence de relations sociales non hiérarchisées entre les élèves. Être détenteur d'un savoir particulier, ici « savoir décomposer un mot en sons », ne signifie pas être l'acteur principal. De fait un tel mode de pensée conduit inévitablement à regarder ses pairs comme secondaires. Or, un groupe constitué permet d'appréhender des situations qui seraient problématiques sans cette forte dimension de solidarité.

Ces différentes formes de coopérations sont l’expression d’une mini société, la classe, ouvrant ainsi des perspectives d’ajustements sociaux et de solidarité entre les membres de ce collectif (Habermas, 2005) venant faire contrepoint aux apprentissages purement sociaux dont sont porteurs les rituels.

4. Conclusion

Malgré leur passif scolaire et leur trouble envahissant du développement, des enfants font preuve de l’évolution de leurs rapports aux praxéologies de savoir et d’étude dans un contexte scolaire adapté à leurs besoins.

Plusieurs contraintes ou conditions dans la position de professeur et dans la position d’élève ont été identifiées. Pour le professeur, nous avons développé la nécessité de regarder ces enfants autistes comme ayant des capacités cognitives et des aptitudes à l’étude, comme en attestent leurs « ‘intérêts restreints » ; de prendre en compte la spécificité de chacun tout en les inscrivant dans une certaine position dans un collectif (la position élève dans le groupe classe) ; de conduire le processus d’enseignement sur des organisations de savoir au moins au niveau du secteur dont l’empan permet à l’élève de se saisir rapidement de la variété des situations pour éviter l’apparition de comportements par trop stéréotypés. Pour les élèves, nous en retiendrons deux. La première, *a priori* assez difficilement compatible avec leurs troubles spécifiques, est la coopération avec le professeur et les autres élèves. La seconde est la fonctionnalisation des savoirs en lien avec leurs éléments technologiques personnels, au moins dans un premier temps.

La nécessité de fonctionnalisation des savoirs ne nous semble pas spécifique à ces élèves autistes, mais ce sont les conditions de classe thérapeutique qui nous donnent accès à de telles observations. Nous faisons l’hypothèse que ce travail de fonctionnalisation est laissé ordinairement à la charge de l’élève.

Références

Amigues, R. (2007). Enseigner en maternelle : un acte d’institution. Dans R. Amigues & M.-T. Zerbatou-Poudou (Éds), *Comment l’enfant devient* *élève ; les apprentissages à l'école maternelle* (pp. 93-138). Paris : Retz.

Artaud, M. & Menotti, G. (2009). Enseigner les fonctions en seconde. Fabriquer et faire vivre une organisation mathématique régionale. Dans B. Grugeon (Éd.), *Actes du XV^e colloque de la CORFEM* (pp. 147-162). Versailles : IUFM.

Basaglia, F. (1970). Les institutions de la violence. Dans Auteur (Éd.), *Institution en négation. Rapport sur l'hôpital psychiatrique de Gorizia* (pp. 103-140). Paris : Seuil.

Bourdieu, P. (1980). *Le sens pratique*. Paris : Éditions de Minuit.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques, 4*(2), 165-198.

Brousseau, G. (1996). L'enseignant dans la théorie des situations didactiques. Dans R. Noirfalise et M.-J. Perrin-Glorian (Éds), *Actes de la VIII^e école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 3-46). Clermont-Ferrand : IREM.

Bruner, J. (1983). *Le développement de l'enfant, savoir faire, savoir dire*. Paris : PUF.

Bursztejn, C. & Gerber, R. (2001). Quelle école pour les enfants autistes ? *Enfances & Psy, 16,* 60-70.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques, 12*(1), 73-112.

Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. Dans L. Ruiz-Higueras, A. Estepa & F. J. García (Éds), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD)* (pp. 705-746). Jaén, Espagne : Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Direction de l'information légale et administrative. (1975). Loi n^o 75-534 du 30 juin 1975 d'orientation en faveur des personnes handicapées. *JORF du 1 juillet 1975*.

Direction de l'information légale et administrative. (2005). Loi n^o 2005-102 du 11 février 2005 pour l'égalité des droits et des chances, la participation et la citoyenneté des personnes handicapées (1). *JORF n° 36 du 12 février 2005*.

Gilly, M. (1989). Les représentations sociales dans le champ éducatif. Dans D. Jodelet (Éd.), *Les représentations sociales* (pp. 363-385). Paris : PUF.

Goffman, E. (2010). *Stigmate, les usages sociaux des handicaps*. Paris : Éditions de minuit.

Habermas, J. (2005). Explicitations du concept d'activité communicationnelle. Dans Auteur (Éd.), *Logique des sciences sociales et autres essais* (pp. 413-446). Paris : PUF.

Haute Autorité de Santé. Agence nationale de l'évaluation et de la qualité des établissements et service sociaux et médicaux sociaux. (2012). *Recommandation de bonne pratique, Autisme et autres troubles envahissants du développement : interventions éducatives et thérapeutiques coordonnées chez l'enfant et l'adolescent, Argumentaire scientifique.*
www.has-sante.fr et www.anesm.sante.gouv.fr

Hochmann, J. (2009). *Histoire de l'autisme. De l'enfant sauvage aux troubles envahissants du développement*. Paris : Odile Jacob.

Menotti, G. & Ricco, G. (2007). Didactic practice and the construction of the personal relation of six-year-old pupils to an object of knowledge : numeration. *European Journal of Psychology of Education, XXII*(4), 477-495.

Menotti, G. (2002). Classes de niveau et praxéologies mathématiques et didactiques. Le cas du volume au collège. *Recherches en didactique des mathématiques*, *22*(3), 183-207

Organisation Mondiale de la Santé. (2000). *Classification multi-axiale des troubles psychiatriques de l'enfant : classification CIM-10 des troubles mentaux et des troubles du comportement de l'enfant et de l'adolescent.*
http://taurus.unine.ch/icd10

Rosenthal, R. & Jacobson, L. F. (1968). Teacher Expectation for the Disadvantaged. *Scientific American*, *218*(4), 19-23.

Vergnaud, G. (2003). Repères pour une théorie psychologique de la connaissance. Dans A. Mercier & C. Margolinas (Éds), *Balises pour la* *didactique des mathématiques* (pp. 123-136). Grenoble : La pensée sauvage.

Vygotski, L. S. (1992). *L'étude du développement des concepts scientifiques pendant l'enfance*. Dans Auteur (Éd.), *Pensée et langage* (pp. 207-318). Paris : Éditions sociales.

Reproducibilidad y desarrollo profesional
La TAD como parte del marco teórico

Soledad Montoya González
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile

Javier Lezama
CICATA del Instituto Politécnico Nacional, México

Abstract. This paper presents a research on teacher professional development. It focuses on the teacher's didactic knowledge, considering in-service teachers who re-update mathematical, didactic and pedagogical knowledge in a University institutional formal process. The problem approached is the reproducibility of didactic designs that teachers have produced and experienced. The ATD is part of the theoretical framework, because when the teacher applies didactic designs in different scenarios, transposition effects appear. The aim is to study these effects in order to answer the research question of reproducibility and its consequences in the education of in-service teachers.

Résumé. Cet article présente une recherche portant sur le développement professionnel des enseignants. Nous nous centrons sur les connaissances didactiques du professeur en le considérant comme mettant à jour, lors de son activité, des savoirs de caractère mathématique, didactique et pédagogique dans un processus formel de nature universitaire. Il s'agit d'étudier la reproductibilité des ingénieries didactiques qui ont été conçues et expérimentées par les enseignants. Nous nous appuyons sur la TAD pour aborder les effets transpositifs qui apparaissent lors de l'utilisation de ces ingénieries didactiques dans des scénarios différents, afin de répondre à la question de la reproductibilité et de ses implications dans la formation continue des professeurs.

Resumen. Este artículo presenta una investigación sobre el desarrollo profesional del profesor. Se centra en el conocimiento didáctico del profesor y considera al docente en servicio que reactualiza saberes de índole matemático, didáctico y pedagógico en un proceso formal institucional universitario. La problemática abordada es la reproducibilidad de los diseños didácticos que los docentes han producido y experimentado. La TAD es parte del marco teórico pues se reconoce que en la aplicación de diseños didácticos en distintos escenarios aparecen efectos de índole transpositiva. Se pretende estudiar dichos efectos para responder al problema de la reproducibilidad y sus consecuencias en la formación continua de profesores.

IV[e] congrès international sur la TAD (Toulouse, 21-26 avril 2013)
Axe 4. *Apports de la TAD à l'enseignement et à la diffusion des connaissances*

Montoya González, S. & Lezama, J. (2017). Reproducibilidad y desarrollo profesional. La TAD como parte del marco teórico. Dans G. Cirade et al. (Éds), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* (pp. 861-874). https://citad4.sciencesconf.org

1. Introducción

Esta comunicación presenta algunos avances de un estudio sobre el constructo «reproducibilidad» en la formación continua de profesores. La investigación se sitúa en el conocimiento didáctico del profesor, entendiéndose este como el relativo a la matemática y su enseñanza, en el sentido de Claire Margolinas (2005). En el escrito se exponen: algunos antecedentes que permiten comprender la problemática que se plantea; el marco teórico en el cual la TAD permite analizar organizaciones matemáticas y didácticas; la metodología y el contexto de la investigación; y algunos hallazgos en relación a la pregunta de investigación.

2. Antecedentes y problemática

Un primer estudio de reproducibilidad es el de Michèle Artigue (1986), que presenta una investigación sobre la reproducibilidad de situaciones didácticas en la que se expone el estudio de la dinámica de clase de una situación didáctica particular, con el objetivo de determinar las características que las hacen reproductibles. En un trabajo posterior, M. Artigue (1995) señala que Guy Brousseau fue el primero en enfrentarse al problema de la reproducibilidad de su ingeniería didáctica sobre la enseñanza de los decimales. A partir de esto, G. Brousseau escribe sobre los fenómenos de obsolescencia y los relaciona con el hecho de que un profesor de un año a otro reproduce condiciones para que sus alumnos tengan los mismos resultados en la comprensión de un concepto. Sin embargo, en lugar de reproducir las condiciones, deja libre las trayectorias y reproduce una «historia» similar a la de años anteriores pero que desnaturaliza las condiciones didácticas que garantizan una significación correcta de los estudiantes.

Investigaciones tales como las citadas de M. Artigue (1986, 1995) y las de Javier Lezama (2005) plantean que el profesor es protagonista en la reproducibilidad de situaciones de aprendizajes. Otros autores, citados en Lezama (2005), como Marie-Jeanne Perrin–Glorian (1993) y Gilbert Arsac et al. (1992), manifiestan la necesidad de focalizarse en el polo «profesor» del sistema didáctico en el momento de estudiar la reproducibilidad. M. Artigue (2008) hace una reflexión en torno a la ingeniería didáctica (ID), señalando su origen, desarrollo y estado actual y exponiendo las ideas fundamentales sobre el desarrollo de marcos teóricos en la didáctica francesa. Indica que las dificultades encontradas en la transmisión de las realizaciones de ID han demostrado la necesidad de considerar al profesor como un actor global de la situación didáctica, de conocer mejor su contribución a la dinámica del aula y sus efectos, así como los fundamentos de las decisiones que toma.

De este modo la problemática que se planteó tiene aristas que se relacionan con la enseñanza aprendizaje de la matemática, la cual ha sido discutida en diversos escenarios, principalmente por los resultados que arrojan algunas evaluaciones estandarizadas de nivel internacional, como la prueba PISA [1]. El programa PISA de la OCDE [2] cuestiona desde el exterior la eficiencia de los sistemas educativos y hace visibles tanto los éxitos como las limitaciones y fracasos. Además, estos programas lideran la cuestión en la investigación educativa para informar y orientar las decisiones curriculares y políticas (Artigue 2008).

Por otra parte, la enseñanza y aprendizaje de la matemática en los últimos años ha sufrido cambios que obedecen a los procesos que se han producido en la educación a nivel mundial, como es el caso de los cambios tecnológicos y sociales. Dichos cambios conducen a plantear reformas educacionales puesto que, más allá de un modelo tradicional de enseñanza, se propone un enfoque orientado al desarrollo del pensamiento matemático del estudiante y no sólo a la comunicación de información. En este proceso de adaptación y aceptación de los modelos que surgen en las reformas educacionales, se proponen diversos cursos de actualización para los profesores en servicio, cursos que consideran por igual los saberes matemáticos, didácticos y pedagógicos. Asimismo, las políticas públicas de los estados tienen institucionalizada la formación continua de docentes, a través de diversas estrategias como diplomaturas y cursos de perfeccionamiento docente, entre otros.

Es en este contexto, y ante la necesidad de trabajar con docentes que llevan 10, 15 y hasta 20 años de servicio, que se plantea un problema de investigación. L. Rossouw y E. Smith (1998) mencionan en un estudio realizado sobre el conocimiento pedagógico del contenido (CPC) de

1. PISA: Programme for International Student Assessment.
2. OCDE: *Organización* para la Cooperación y el Desarrollo Económicos.

geometría maestros de primaria, que dos años después de haber completado el curso de instrucción interno, los maestros finalmente desarrollaron su propio conocimiento pedagógico del contenido mediante su propia experiencia. Esto conduce a reconocer que cada profesor que tiene la necesidad de cambiar el enfoque en la enseñanza de la matemática tiene una historia propia constituida también por creencias que se han instalado en su quehacer profesional y que se han validado por su propia práctica. Parte de la historia del profesor de matemáticas es la experiencia formativa, situada en una época y en una tradición regional, de la enseñanza-aprendizaje. Se agregan a esta historia, los cambios sociales y tecnológicos, más lentos antiguamente si se compara con los cambios que se producen actualmente. Las observaciones empíricas en el trabajo con docentes permiten constatar que hay profesores que, en el proceso de actualización de saberes, logran con dificultad poner en acción dichos saberes al servicio de su profesión y diseñar sesiones de clases con un nuevo enfoque. En este caso se podría señalar que algunos docentes han provocado una ruptura con su quehacer pedagógico tradicional y están abiertos a cambios de enfoques. Sin embargo, no se sabe con certeza qué aprende un profesor, cómo aprende y cómo valida lo que aprende. Estos hechos conducen a reflexionar sobre la práctica en el aula de un profesor de matemáticas en servicio pues, con o sin perfeccionamiento, el profesor desea provocar aprendizajes en sus alumnos, independiente del modelo que él seleccionó o aprendió para diseñar y realizar sus clases.

A partir de las ideas plasmadas en los párrafos anteriores buscamos vincular el fenómeno de reproducibilidad con el quehacer docente de los participantes de un programa de reactualización de saberes. En esos cursos los docentes tienen la posibilidad de apropiarse de elementos de la didáctica de la matemática. Se pretende que dichos elementos se conviertan en herramientas para el diseño y ejecución de propuestas de enseñanza y aprendizaje fundamentada en una teoría como la teoría de las situaciones didácticas.

Enfocados en la idea de reproducibilidad como elemento teórico de la didáctica de las matemáticas en el marco de cursos de reactualización de saberes matemáticos, didácticos y pedagógicos para el desarrollo profesional del profesor, se formula la siguiente pregunta: La reflexión sobre reproducibilidad en el proceso de formación continua, ¿qué elementos agrega al quehacer docente para que los diseños didácticos sean aplicados en distintos escenarios?

3. La TAD como parte del marco teórico

En la estructuración del marco teórico para la realización del estudio se considera la TAD con el fin de analizar las organizaciones matemáticas y didácticas de los profesores que han diseñado situaciones de aprendizaje para el contenido matemático «teorema de Pitágoras» a estudiantes de 11 a 12 años de edad. Reconociendo que la TAD es una teoría que ha estado íntimamente ligada con la formación inicial y continua de profesores, sin duda lo más relevante para nosotros es que, a partir de la evidencia del fenómeno de la transposición didáctica, la TAD fue uno de los primeros enfoques en considerar como objeto de estudio de investigación no sólo las actividades de enseñanza y aprendizaje en el aula, sino todo el proceso que va desde la creación y utilización del saber matemático hasta su incorporación en la escuela como saber enseñado. Su objeto de estudio son todas las instituciones que participan en este proceso como señalan Marianna Bosch y Josep Gascón (2009) al exponer que hay dos pilares conceptuales principales: uno es la profesión entendiéndola como el conjunto de los actores de la enseñanza de las matemáticas y el otro es el de los problemas de la profesión que surgen en el ejercicio mismo del oficio docente.

El objetivo de nuestra investigación consiste en observar, al establecer en un grupo de trabajo de profesores el reconocimiento y reflexión del constructo teórico «reproducibilidad», qué hallazgos se pueden detectar en su quehacer a partir de repetir las mismas situaciones de aprendizajes en distintos escenarios.

Basados en el trabajo de Yves Chevallard (1999) y Marianna Bosch, Josep Gascón y Lorena Espinoza (2003), podemos distinguir algunos principios y nociones fundamentales de la TAD:

- Se concibe que el conocimiento matemático es posible modelarlo a través de una praxeología u organización matemática.
- Se establece una vinculación estrecha entre la matemática, su hábitat y las instituciones.

- Una praxeología matemática tipifica el saber matemático en dos niveles, el primero lo relaciona con la *praxis* o *saber hacer*, es decir, con la práctica y se vincula con los tipos de tareas y las técnicas que permiten hacer ese tipo de tarea. El segundo nivel tiene como centro el *saber* pues se vincula con la justificación de las técnicas que permiten hacer un tipo de tareas. Este además describe y explica la elaboración de las técnicas en lo que se designa como «discurso tecnológico» y está formado también por la «teoría» propiamente dicha, que da un fundamento a las producciones tecnológicas. De esta forma, la noción de praxeología resulta de la unión de los dos términos *praxis* y *logos*.
- En una praxeología matemática, se distinguen cuatro componentes que dan origen a las siguientes categorías: tipos de tareas, técnicas, tecnología y teoría.
- En una institución, cualquiera que sea el tipo de tarea T, la técnica τ relativa a T está siempre acompañada por un embrión de tecnología θ. Tres funciones se distinguen en la tecnología: la primera es justificar la técnica, la segunda es exponer por qué es correcta, la tercera corresponde a un empleo más actual del término tecnología llamado función de producción de técnicas.

Desde estas nociones, en el estudio que aquí presentamos se analizaron cada una de las clases de un conjunto de profesores identificando las praxeologías didácticas a través de la determinación de los momentos didácticos. Al respecto, Y. Chevallard (1999) expone que una praxeología didáctica es el conjunto de los tipos de tareas, de técnicas, de tecnologías y teorías movilizadas para dirigir el estudio de una cuestión o ámbito concreto en una institución. Una característica de las praxeologías didácticas que la distinguen de las praxeologías matemáticas es que están formadas por tareas y técnicas cooperativas, en la que distintos actores (profesores y alumnos) ocupan posiciones diferentes y explícitas. Así, la praxeología didáctica que utiliza el profesor se denomina praxeología docente y la praxeología didáctica que utiliza el alumno es la praxeología discente (Bosch et al., 2003).

Dada una praxeología didáctica producto de un proceso de estudio que se sitúa en un espacio determinado, se producen distintos tipos de situaciones, pues sus actores —profesor y alumno— ocupan roles diferentes pero que a la vez son cooperativos. A esos tipos de situaciones se les denomina *momentos didácticos*. Cabe destacar que estos momentos no se producen para obedecer a una cronología de situaciones sino que son de tipo funcional (Chevallard 1999). Seis son los momentos didácticos: el momento del primer encuentro, el momento exploratorio, el momento del trabajo de la técnica, el momento tecnológico-teórico, el momento de la institucionalización.

Luisa Ruíz-Higueras y Fco. Javier García (2011) precisan aun más la idea de praxeología matemática (OM) y praxeología didáctica (OD) en el contexto del problema de formación de profesores y realizan un estudio para establecer un modelo de análisis de praxeología didácticas. Al respecto señalan:

> Durante un proceso de estudio escolar un profesor y un conjunto de alumnos participan de forma integrada en un proceso de estudio en el que el profesor lleva a cabo "*una acción didáctica*" con el fin de que los estudiantes construyan una organización matemática. En la medida en que las características de esta OM condicionan las posibles formas de organizar su estudio (esto es, la organización didáctica OD) y, recíprocamente, las características del proceso de estudio OD condicionan la OM realmente construida, en la TAD se suele describir todo proceso de estudio como un par (OM,OD), lo que permite aprehender de manera conjunta esta dependencia mutua entre *lo matemático* y *lo didáctico.* (Ruiz-Higueras y García, 2011, pp. 334)

Así, hemos de considerar que una OD que permite hacer aprender a otros está estrechamente vinculada con una OM, en otras palabras se percibe una funcionalidad recíproca.

4. Contexto de la investigación, metodología y método

El contexto de la investigación corresponde a un grupo de tres profesores que están en servicio y que asisten a un programa de perfeccionamiento llamado «post-título de especialización en matemáticas». El objetivo del programa tiene relación con la reactualización de saberes de índole matemática, didáctica y pedagógica. Estos docentes en formación continua tienen que diseñar secuencias de aprendizaje que tienen en vista un propósito didáctico. Dichas secuencias tienen que estar fundamentadas en marcos teóricos de la didáctica de la matemática o matemática educativa, y por tanto son inducidas y posteriormente analizadas y retroalimentadas por expertos. Esta actividad provoca en particular una reflexión tanto en el diseño como en la puesta en escena. En otras palabras, en estos cursos se introducen elementos teóricos en el quehacer cotidiano y práctico del profesor.

Este perfeccionamiento docente está destinado para que profesoras y profesores de educación general básica que hacen clases de matemáticas en el segundo ciclo básico (alumnos de 11-12 años) adquieran y se apropien de saberes de la disciplina y su didáctica. El programa del post-título tiene un módulo denominado «taller de reflexión pedagógica». Este módulo se desarrolla durante toda la ejecución del programa y su objetivo esencial es que los docentes reflexionen en los procesos de aprendizaje y los lleven al aula mediante diseños didácticos articulando teoría y práctica.

La metodología empleada es de tipo cualitativa y considera dos constructos teórico-prácticos, «Ingeniería Didáctica» y «Estudio de Clases» que son parte del programa de post-título señalado. Dichos constructos se convierten en un método tanto para la realización didáctica traducida a diseños de clases como para desarrollar e instalar un método de reflexión en los docentes.

La *ingeniería didáctica* ha sido comprendida en el sentido de Régine Douady (1996) quien expone que:

> [La ingeniería didáctica] designa un conjunto de secuencias de clases concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de forma coherente por un *maestro-ingeniero* para efectuar un proyecto de aprendizaje de un contenido matemático dado para un grupo concreto de alumnos. A lo largo de los intercambios entre el profesor y los alumnos, el proyecto evoluciona bajo las reacciones de los alumnos en función de las decisiones y elecciones del profesor. Así, la ingeniería didáctica es, al mismo tiempo, *un producto*, resultado de un análisis a priori, y un *proceso*, resultado de una adaptación de la puesta a punto de un producto acorde con las condiciones dinámicas de una clase. (p. 241)

Se ha considerado sólo ciertos elementos de la ID, por ejemplo, el análisis a priori de las situaciones de aprendizaje así como el análisis a posteriori.

El *estudio de clases* proviene del dispositivo japonés conocido como *Lesson Study* y es una estrategia de formación continua que se realiza en la escuela para el desarrollo profesional de los profesores. Su fundamento es que si los profesores mejoran sus clases en pos de los logros didácticos entonces mejoran los aprendizajes de sus alumnos. Al amparo de esta idea es que el *estudio de clases* es una «investigación» de una clase y tiene una metodología específica para estudiar la clase entre grupos de trabajos. Dichos grupos lo conforman profesores en ejercicio y eventualmente académicos de universidades u otras instituciones que se relacionan con los procesos de enseñanza aprendizaje de la escuela.

El *jyugyo kenjyu* o *estudio de clases* es un proceso en el cual los profesores desean mejorar progresivamente sus métodos de enseñanza, trabajan con otros profesores para examinarse y criticarse las técnicas de enseñanza (Isoda et al., 2008). Las características esenciales son el trabajo colaborativo y la reflexión de tipo matemática, didáctica y pedagógica que realizan profesores que pertenecen a un grupo de trabajo para el estudio de una clase. Se distinguen tres etapas: preparación de la clase, aplicación y discusión de la clase, en un proceso cíclico. En la etapa de *preparación de la clase* los profesores en conjunto determinan un contenido matemático y diseñan una clase considerando: el currículo, los textos escolares, los materiales didácticos. Es un proceso que se inicia con la búsqueda y selección de recursos o medios relevantes que le permitan el propósito de la clase, se discute en el grupo de trabajo sobre dicha selección de tal modo de refinar el diseño de la clase sobre la base de las necesidades efectivas de los alumnos (contexto de la enseñanza). Dados todos estos elementos se reúnen y se redactan en un *plan de clase* el cual considera: el objetivo de la unidad de aprendizaje, la meta de aprendizaje, las actividades de aprendizaje (o el tipo de tareas que realizará el alumno), las intervenciones del docente, la distribución del tiempo. Además, en esta parte se hace una predicción de lo que pueda suceder en la clase, en relación a las posibles respuestas de los alumnos, las posibles dificultades y los posibles errores. Es decir, se realiza un análisis predictivo considerando elementos desde la didáctica de la matemática.

La *experimentación o aplicación de la clase* ocurre una vez diseñado y validado el plan de clases entre el grupo de trabajo. Un profesor realiza la clase en el nivel determinado. A esta sesión acuden los docentes que conforman el grupo de trabajo con el objetivo de observar la clase y registrar dichas anotaciones, además se graba la clase en un video. Los observadores, no intervienen en la clase, sino que pueden pasearse por la sala de clases observando lo realizado por los alumnos.

La *discusión de la clase* es una etapa de reflexión didáctica y pedagógica sobre la base del plan de clase diseñado en conjunto, se hacen observaciones sobre la puesta en práctica del diseño. Esta sesión la inicia el profesor que aplicó la clase en su escuela, enseguida los otros profesores opinan, dan ideas y cuestionan decisiones del profesor o bien sobre los recursos que se utilizaron. Es una fase de preguntas que se plantean los docentes y analizan la efectividad de dicha clase en términos precisamente de logro de aprendizaje.

Finalizada la sesión de clase, se readecua el diseño de la clase atendiendo a las discusiones planteadas en pos de mejorar la enseñanza aprendizaje del tema matemático seleccionado (ver figura 1).

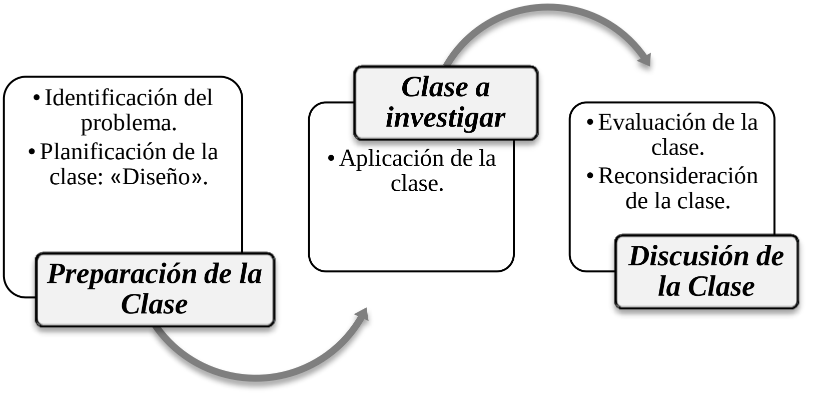


Figura 1. Proceso cíclico de *Estudio de Clases.*

Para la obtención de los datos se realizó el seguimiento a tres profesores que realizaron el diseño de una clase sobre el teorema de Pitágoras. Este grupo de trabajo es liderado por la investigadora responsable de este estudio. El diseño fue creado por etapas.

La primera etapa es el diseño de una situación de aprendizaje en el marco del diseño de una clase sobre el contenido matemático teorema de Pitágoras. La clase es basada en resolución de problemas, su característica esencial es que los alumnos de los profesores tendrán que indagar y buscar estrategias de acción para resolver la tarea que le asignaron. Este diseños están de acuerdo a la micro-ingeniería didáctica y la forma de realizarla se basa en el trabajo colaborativo de los profesores. Para ello se realizó un taller de discusión sobre el contenido matemático, enseguida los docentes realizaron un análisis descriptivo de programa de estudio del nivel (7º básico, alumnos de 11-12 años) y la revisión de dos textos escolares, se creó la situación de aprendizaje y se realizó un análisis a priori, se formuló el objetivo para la clase y se redactó en un documento llamado plan de clases. En esta etapa, se realizó un taller liderado por la investigadora en cual se pone de manifiesto a los profesores el constructo teórico de reproducibilidad.

La segunda etapa consistió en la aplicación del diseño de clase en distintos escenarios, entendiéndose por distintos escenarios los diferentes cursos del nivel 7º básico (alumnos de 11-12 años) que los profesores tenían a su cargo. En esta etapa se consideró también a una cuarta profesora que no participó en el diseño de la clase pero si en las discusiones y ella también aplicó la clase en su respectivo curso. En la figura *2*, se presenta un esquema en donde es posible percibir el proceso que se utilizó para obtener los datos en el sentido de la reproducibilidad de un diseño de clases. Los docentes aplicaron las mismas situaciones de aprendizajes en cada una de sus clases.

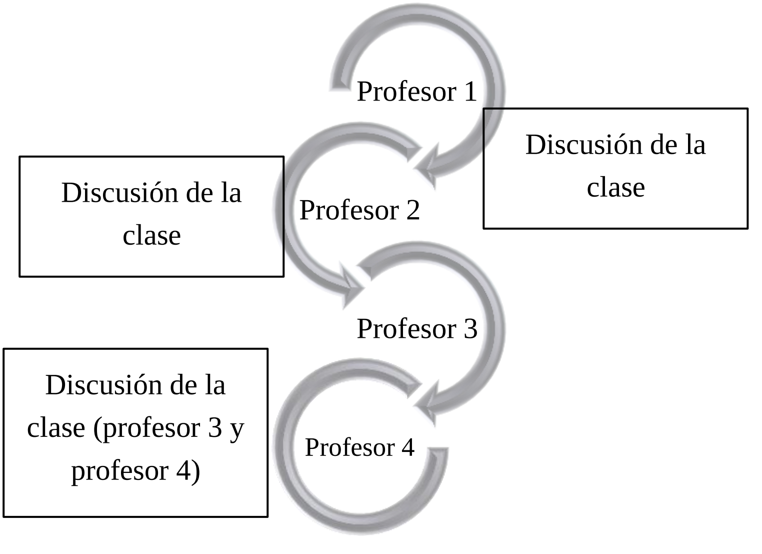


Figura 2. Esquema de aplicación de la misma clase en distintos escenarios.

La tercera etapa es la reflexión de los diseños en el marco del *estudio de clases*, en el caso del profesor 1 y la profesora 2 se discutió la clase por el grupo de trabajo al término de la aplicación de la clase. En el caso de la profesora 3 y 4 sus clases fueron discutidas a posteriori a la aplicación de las sesiones. Cada una de las sesiones de clases fueron filmadas en videos al igual que lo talleres de discusión sobre el diseño, aplicación y discusión de la clase.

5. A modo de conclusión

El estudio realizado permitió responder a la pregunta de investigación e identificar algunos elementos que se agregan al quehacer docente para aplicar situaciones de aprendizajes en distintos escenarios. Dichos elementos son:

- Focalizar la discusión de las situaciones de aprendizajes en términos de logro didáctico de tal modo que las adecuaciones o cambios que se realizaron hicieron depurar la organización matemática;
- Determinar y hacer visible el logro didáctico u objetivo de aprendizaje de la sesión de clase;
- Determinar cuáles son las situaciones claves que apuntan al logro didáctico;
- Toma de decisiones fundamentadas desde la didáctica de la matemática;
- Fortalecer la reflexión didáctica centrando las discusiones sobre las clases en aspectos propios de las tareas y técnicas didácticas.

Por otra parte las conclusiones apuntan a los diversos ámbitos que se relacionan en los elementos descritos anteriormente como: la reflexión de tipo didáctico sobre el constructo «reproducibilidad», el contenido matemático, el constructo «estudio de clases» y la formación continua de profesores.

En relación con la reflexión didáctica sobre reproducibilidad, se concluye que es posible detectar ciertos elementos que se agregan al quehacer del docente, para que los diseños didácticos puedan ser aplicados en distintos escenarios. Esto permitió que la organización matemática y la organización didáctica presentada por los profesores evolucionaran en términos del logro didáctico. Es decir, fue depurada, puesto que la profesora que aplicó las situaciones de aprendizaje por última vez exhibe una clase en donde se aprecia modificaciones sin perder la esencia de cada una de las situaciones. Además contribuyó a las discusiones de las clases y centrar la atención en el ámbito didáctico, lo que permite relacionar teoría y práctica.

El proceso que realizaron los profesores para el diseño y aplicación de las situaciones de aprendizajes y la discusión de sus clases les permitió poner atención a las organizaciones didácticas (observando mutuamente las clases que aplicaban). Esto a su vez los condujo a observar que la organización matemática fuera evolucionando en el sentido de quitar o agregar elementos que permitan el logro de aprendizaje. El tener un escenario en donde se plantea un constructo teórico desde la didáctica de la matemática permitió establecer o al menos esbozar la idea de la relación mutua entre una organización matemática y didáctica. No fue un tema fácil para los profesores. Esto se observó en la medida que las discusiones de talleres se focalizaban para reproducir las situaciones de aprendizaje.

La TAD permitió identificar la praxeología matemática que los profesores idearon para una tarea didáctica que fue ¿cómo diseñar una clase del teorema de Pitágoras para alumnos de 11 a 12 años? En seguida, mediante el análisis de los videos de clases, a través, de la identificación de la praxeología didáctica y el análisis de los talleres de discusión fue posible esbozar las conclusiones planteadas.

Referencias

Arsac, G., Balachef, N. & Mante, M. (1992). Teacher's role and reproducibility of didactical situations. *Educational Studies in Mathematics, 23*(1), 5-29.

Artigue, M. (1986). Étude de la dynamique d'une situation de classe : une approche de la reproductibilité. *Recherches en didactique des mathématiques, 7*(1), 5-62.

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 33-59). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (2008). Didactical design in mathematics education. In C. Winsløw (Ed.), *Nordic Research in Mathematics Education: Proceedings from NORMA08* (pp. 7-16). Rotterdam, Países Bajos: Sense.

Bosch, M., Espinoza, L. & Gascón, J. (2003). El profesor como director de procesos de estudio: Análisis de organizaciones didácticas espontáneas. *Recherches en didactique des mathématiques, 23*(1), 79-136.

Bosch, M. & Gascón, J. (2009). Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico a la formación el profesorado de matemáticas de secundaria. En M. J. González, M. T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 89-113). Santander, España: SEIEM.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques, 19*(2), 221-266.

Douady, R. (1996). Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir. En E. Barbin & R. Douady (Eds.), *L'enseignement des mathématiques : des repères entre savoirs, programmes & pratiques* (pp. 241-256). Metz: Topiques.

Isoda, M., Arcavi, A. & Mena, A. (2008). *El estudio de clases japonés en matemáticas*. Valparaíso, Chile: Ediciones Universitarias de Valparaíso, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Lezama, J. (2005). Una mirada socioepistemológica al fenómeno de reproducibilidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8*(3), 339-362.

Margolinas, C., Coulange, L. & Bessot, A. (2005). What can the teacher learn in the classroom? *Educational Studies in Mathematics, 59*(1), 205-234.

Perrin-Glorian, M.-J. (1993). Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans les classes « faibles ». *Recherches en didactique des mathématiques, 13*(1-2), 5-18.

Rossouw, L. & Smith E. (1998). Teacher's pedagogical content knowledge of geometry. En A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 57-63). Stellenbosch, Sudáfrica: University of Stellenbosch.

Ruiz-Higueras, L. & García, F. J. (2011). Análisis de las praxeologías didácticas: implicaciones en la formación de maestros. En M. Bosch et al. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 431-464). Barcelona, España: CRM.

Praxeologías matemáticas en torno a la geometría para la formación del profesorado

Federico Olivero
Dpto. Matemáticas FAEA, Universidad Nacional del Comahue, Argentina

Marianna Bosch
IQS School of Management, Universitat Ramon Llull, España

Josep Gascón
Dt. Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, España

Abstract. We present a project of a doctoral thesis on the professional needs of secondary school mathematics teachers related to the teaching of geometry. We propose a characterisation of the prevailing epistemological model about elementary geometry in secondary school teaching and a set of criteria to build a reference epistemological model for research. Its aim is to sustain a didactic organisation able to bring into life the dialectics between the experimental and deductive work, reinforcing at the same time the complementarity between analytic and synthetic methods.

Résumé. Nous présentons un projet de thèse doctorale autour des besoins professionnels des professeurs de mathématiques du secondaire à propos de l'enseignement de la géométrie. Après avoir caractérisé le modèle épistémologique de la géométrie élémentaire dominant dans l'enseignement secondaire, nous proposons un ensemble de critères pour construire un modèle épistémologique de référence capable de soutenir une organisation didactique pour faire vivre la dialectique entre le travail expérimental et déductif, tout en renforçant la complémentarité entre les méthodes analytiques et synthétiques.

Resumen. Presentamos un proyecto de tesis doctoral en torno a las necesidades profesionales del profesorado de matemáticas de Secundaria en relación con la enseñanza de la geometría. Después de caracterizar el modelo epistemológico de la geometría elemental dominante en la enseñanza secundaria, proponemos un conjunto de criterios para construir un modelo epistemológico de referencia capaz de sustentar una organización didáctica para hacer vivir la dialéctica entre el trabajo experimental y el deductivo en geometría, al tiempo que potencie la complementariedad entre los métodos analíticos y los sintéticos.

IV[e] congrès international sur la TAD (Toulouse, 21-26 avril 2013)
Axe 4. *Apports de la TAD à l'enseignement et à la diffusion des connaissances*

Olivero, F., Bosch, M. & Gascón, J. (2017). Praxeologías matemáticas en torno a la geometría para la formación del profesorado. Dans G. Cirade et al. (Éds), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* (pp. 875-898). https://citad4.sciencesconf.org

1. Problemática de base

Este trabajo se sitúa en el contexto de un proyecto de tesis doctoral que se está desarrollando en el ámbito de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) y cuya problemática inicial se inserta en el gran problema didáctico de la formación del profesorado de matemáticas. Nos centraremos en las necesidades matemático-didácticas del profesorado de la escuela secundaria argentina en relación con la enseñanza de la geometría, asumiendo que la noción cultural y escolar de «geometría» adolece de múltiples imprecisiones que empezaremos a clarificar en el desarrollo de este trabajo.

Siguiendo el trabajo de Gisèle Cirade (2006) podemos distinguir tres tipos de praxeologías directamente relacionadas con el ejercicio de la docencia de las matemáticas, en el bien entendido que cada uno de los tipos está contenido en el siguiente: las praxeologías *por enseñar* (que se materializan en los documentos curriculares, los libros de texto y la actividad matemática escolar); las praxeologías *para la enseñanza* (que contienen los conocimientos necesarios para delimitar las matemáticas por enseñar, interpretarlas, reorganizarlas, relacionarlas y explicitar su «razón de ser»); y las praxeologías *de la profesión docente* que se requieren para diseñar y gestionar el proceso de estudio de las matemáticas (ver figura 1).

$$\boxed{\text{Praxeologías } \textit{por enseñar}} \subset \boxed{\text{Praxeologías } \textit{para la enseñanza}} \subset \boxed{\text{Praxeologías } \textit{de la profesión docente}}$$

Figura 1. Praxeologías relacionadas con la docencia de matemáticas.

El trabajo de G. Cirade (2006) muestra la enorme problematicidad que encierran las matemáticas que se enseñan en secundaria y cómo los recursos matemáticos que permiten abordar esta problematicidad están todavía muy alejados de la cultura matemática de la comunidad docente. En muchos casos, estos requieren elaboraciones matemáticas originales que, además, deben transformarse adecuadamente para poder ser utilizadas como herramientas matemáticas de uso didáctico. En coherencia con este esquema general y siguiendo los postulados planteados por Marianna Bosch y Josep Gascón (2009), consideramos que en la formación inicial del profesorado es necesario no sólo considerar las actividades matemáticas que los futuros docentes necesitarán gestionar en el aula, las *praxeologías por enseñar*, sino que el profesor en formación debe también activar otros tipos de praxeologías *para la enseñanza* que incluyen, en particular, un cuestionamiento epistemológico y didáctico de las praxeologías por enseñar. En base a este postulado, proponemos la siguiente formulación general del gran problema didáctico citado anteriormente:

> ¿Cuál es el *equipamiento praxeológico* necesario (o por lo menos útil) para que los profesores puedan intervenir de manera efectiva y pertinente en la formación matemática de los estudiantes y qué se puede hacer para ayudar a que los profesores dispongan de él?

Nos centraremos específicamente en el análisis, diseño y experimentación de las praxeologías para la enseñanza de la geometría que contienen a las praxeologías por enseñar, sin olvidar las praxeologías de la profesión docente que se requieren.

Lo que designamos como *equipamiento praxeológico* de una persona es una amalgama de praxeologías (y de elementos praxeológicos) que la persona tiene a su disposición y que puede activar en un momento dado y bajo ciertas condiciones y restricciones dadas. Es importante resaltar que las praxeologías no son generalmente construcciones individuales, lo que se traduce en nuestro caso particular en que la construcción de las praxeologías que se requieren para cubrir las necesidades de la formación del profesorado no puede dejarse a la responsabilidad de los profesores considerados individualmente. La TAD asume el *carácter institucional o colectivo de las praxeologías*, según el cual la «vida» (en el sentido de emergencia o construcción, desarrollo, mantenimiento, difusión, evolución, etc.) de las praxeologías no depende, en primera instancia, de las personas individualmente consideradas, sino de las *instituciones* en las que actúan estas personas. Además, en el caso de las praxeologías para la formación del profesorado, dicha construcción continúa siendo en muchos casos un problema abierto de investigación didáctica. Asumimos que no se dispone de respuestas completas y definitivas en ninguno de los tres tipos de praxeologías citados. Ni siquiera las praxeologías matemáticas por enseñar se pueden considerar como ya disponibles y listas para ser utilizadas en la formación del profesorado y, mucho menos, las praxeologías para la enseñanza y las praxeologías de la profesión docente. Postulamos, además, que la elaboración y desarrollo de las praxeologías para la enseñanza suelen modificar tanto las praxeologías matemáticas por enseñar como las propias praxeologías de la profesión. De hecho, las praxeologías de la profesión docente se construyen (o reconstruyen) en gran medida como consecuencia del desarrollo de las respuestas a cuestiones que pueden surgir en el ámbito de las praxeologías para la enseñanza o, incluso, en el ámbito de las praxeologías por enseñar. Así, por ejemplo, cuestiones del tipo: ¿Cuándo diremos que dos figuras geométricas son iguales y cuándo diremos que tienen la misma forma?, que pertenecen plenamente a las matemáticas por enseñar, pueden generar la construcción de una praxeología para la enseñanza en la que se aborde la relatividad de la noción de «figura geométrica» en función del tipo de geometría que consideremos y en la que aparecerán cuestiones relativas a las nociones que tienen sentido, esto es, que son *invariantes* mediante el grupo de transformaciones que caracteriza a cada una de las geometrías. Postulamos, en definitiva, que la formación profesional específica del profesorado de matemáticas requiere de un equipamiento praxeológico del que forman parte praxeologías de los tres tipos descritos y cuya construcción y desarrollo es responsabilidad de la comunidad de investigadores en didáctica de las matemáticas en estrecha colaboración con la profesión docente (Chevallard y Cirade, 2009).

2. La geometría elemental dominante en la escuela secundaria argentina y en la institución de formación del profesorado

Dada la profunda codependencia entre las praxeologías por enseñar y las praxeologías para la enseñanza, no podemos abordar el problema de la formación del profesorado sin ampliar el ámbito institucional en el que situamos el problema. Debemos incluir en este ámbito la escuela secundaria argentina y las praxeologías en torno a la geometría que viven en ella. En particular, la indagación del estado actual de la geometría en la institución de formación del profesorado, que servirá de base para proponer cambios controlados en una dirección determinada, debe partir del análisis del modelo epistemológico de la geometría que predomina en la escuela secundaria, esto es, de la forma cómo se interpreta actualmente la geometría en dicha institución y del papel que esta juega.

2.1. La geometría en la escuela secundaria argentina

El sistema educativo argentino se encuentra actualmente en un proceso de transición entre la Ley Federal de Educación, promulgada en el año 1993, y la Ley de Educación Nacional N° 26.206 (Ministerio de Educación de la Nación Argentina 2006) que se encuentra en vías de implementación. En este contexto coexisten veinticuatro sistemas educativos, uno por cada provincia y uno para la Ciudad Autónoma de Buenos Aires. En cada uno de ellos se están adaptando, en mayor o menor medida, los diseños curriculares al nuevo marco legal vigente.

En un trabajo exploratorio sobre los diseños curriculares propuestos por los ministerios de educación de algunas de las provincias —entre ellas las de Buenos Aires, Córdoba, Salta y Tierra del Fuego, Antártida e Islas del Atlántico Sur, y el de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires— pudimos constatar una clara contradicción entre el texto del diseño curricular (las intenciones curriculares) y los contenidos geométricos efectivamente propuestos en los textos y desarrollados en el aula. Pudimos evidenciar que, en el texto curricular, es casi unánime la interpretación del trabajo matemático como *actividad* y, en gran medida, como una *actividad de modelización* y de trabajo sobre los modelos matemáticos obtenidos. Por ejemplo, el diseño curricular de la ciudad autónoma de Buenos Aires plantea:

> Una idea central, que será consolidada y enriquecida en la escuela secundaria, es que un aspecto esencial de la actividad matemática consiste en construir un modelo matemático de la realidad (matemática o extra matemática) que se quiere estudiar y trabajar con dicho modelo e interpretar los resultados obtenidos en este trabajo para contestar a las cuestiones planteadas inicialmente (Ministerio de Educación CABA 2009, p. 11).

En el caso de la geometría, los diferentes diseños curriculares entienden su enseñanza como necesaria para comprender el «espacio sensible que nos rodea»:

> Las complejas relaciones entre las figuras y los cuerpos geométricos y el espacio que nos rodea, así como las relaciones entre los dibujos y las figuras en tanto que objetos teóricos, serán estudiadas a través de las situaciones que se propongan. En el bloque de Geometría intentaremos identificar

> situaciones, de manera que den lugar a que los saberes geométricos aparezcan como instrumentos necesarios en la resolución de problemas que no puedan ser resueltos desde la percepción o la medición. (Ministerio de Educación CABA 2009, p. 12)

Por otro lado, en el momento de explicitar los objetivos prioritarios de la enseñanza de la geometría, se mencionan explícitamente las «argumentaciones deductivas»:

> El bloque *Geometría y medida* tiene como objetivo prioritario la producción, por parte de los alumnos, de argumentaciones deductivas. Es decir, se pretende que la profundización del estudio de las figuras y de los cuerpos se desarrolle a través de actividades que impliquen la puesta en funcionamiento de propiedades, ya sea como medio para anticipar y establecer la necesidad de ciertos resultados, como también para la elaboración de nuevas propiedades, relaciones y conceptos. De esta manera, los objetos con los que se trabaja han sido seleccionados en función de favorecer la entrada de los alumnos en este tipo de trabajo. (Ministerio de Educación CABA 2009, p. 15)

Pero al analizar los «contenidos» propuestos y los «alcances y comentarios» de los mismos, se puede ver una primacía de las cuestiones clásicas sobre construcciones de polígonos, y una ausencia total de procesos de modelización usando los objetos geométricos como se propugnaba en la introducción. Los diseños explorados proponen actividades netamente «escolares» y estereotipadas que tienen poca relación con el trabajo experimental. Además, en dichos diseños pudimos constatar una ausencia casi total de un trabajo sobre el espacio tridimensional, lo que es una evidencia más de la poca referencia al mundo real que tienen los objetivos de la enseñanza de la geometría planteada.

En lo que se refiere a la geometría analítica, esta se sitúa en los últimos años de escolaridad (4° y 5° año, alumnos de 16-17 años) y casi no tiene relación con las nociones matemáticas previamente desarrolladas. Si bien se habla de la importancia de la incorporación del álgebra para resolver problemas geométricos, una vez planteadas las nociones que se trabajarán de manera analítica hay un olvido total de los problemas de geometría sintética, provocando una separación entre ambos tipos de trabajo geométrico.

En cuanto a la relación entre la geometría que se propone en los diseños curriculares para ser enseñada y la geometría efectivamente enseñada en las aulas, si bien la geometría aparece con renovado vigor en los diseños curriculares de la escuela secundaria argentina, este resurgimiento no parece trasladarse con facilidad a las aulas. Podemos aducir diversos motivos hipotéticos, entre los que destaca el olvido institucional de las «razones de ser» de la geometría. Este olvido la hace aparecer con falta de sentido y la relega a una posición secundaria que la empuja hacia las últimas etapas del año escolar. Esta posición subsidiaria de la geometría se refuerza por la escasa presencia de la geometría sintética en la formación que se imparte en las carreras de profesorado y afines, fruto en gran medida de reformas de la formación docente influenciadas por el movimiento de la matemática moderna, y por la escasez de libros de texto que trabajen la modelización geométrica.

Algunos autores argentinos como María Isabel Oliver (Oliver et al., 2003) señalan que, si bien en los contenidos oficiales del currículo argentino de «Matemática del nivel medio» se enfatiza la resolución de problemas como un aspecto central en la enseñanza y el aprendizaje, en los libros de texto que utilizan los docentes se sigue observando la ausencia de estrategias propias de esta actividad. Se reproduce entonces, en el ámbito de la resolución escolar de problemas, la contradicción (ya señalada en el caso de la modelización matemática) entre las intenciones curriculares y las actividades efectivamente propuestas y desarrolladas.

Por otro lado, sabemos que hacia los últimos años de la Escuela General Básica (EGB, alumnos de 13 a 15 años) se espera que un alumno haya desarrollado un nivel de madurez geométrica importante, puesto que, según los currículos oficiales, debería ser capaz de justificar procedimientos, utilizar métodos inductivos para la obtención de propiedades y relaciones geométricas y empezar a utilizar los instrumentos del método deductivo tales como el uso de contraejemplos, argumentaciones y pruebas (Abrate et al., 2006). Pero ese tipo de tareas no abundan en los libros de texto que se proponen para la enseñanza matemática de la escuela secundaria argentina y son cada vez más los alumnos que llegan a la Universidad sin ningún conocimiento de dichos instrumentos.

Este estado de cosas ha comportado que la enseñanza de la geometría elemental se encuentre en un estado convaleciente que responde a múltiples factores de entre los que destacamos la *pérdida de su razón de ser* en las diferentes instituciones educativas, esto es, el olvido institucional de las cuestiones a las que responde.

2.2. La geometría en la formación del profesorado

En la Universidad Nacional del Comahue, y creemos que la situación se puede generalizar al sistema de enseñanza argentino, la formación en geometría que se imparte a los futuros profesores está dividida en dos grandes bloques totalmente desconectados. Por un lado se proponen cursos de *geometría euclidiana* del plano y del espacio con una fuerte impronta axiomática y exclusivamente sintética. Por otro lado, se imparten cursos de *geometría analítica* y *álgebra lineal*, donde aparece poco la problemática geométrica propiamente dicha. Ambos grupos de materias persiguen la sólida formación científico-disciplinar de los futuros profesores, pero tienen una escasa relación directa con las praxeologías matemáticas que deberán trabajar esos docentes en sus aulas durante su vida profesional. En efecto, en la geometría por enseñar en la escuela media se pone el énfasis en el trabajo sintético con las principales propiedades de los polígonos y poliedros, sin tener en cuenta el desarrollo axiomático-deductivo ni el trabajo estructural algebraico que constituyen el núcleo del trabajo durante la carrera de formación del profesorado.

La Universidad Nacional del Comahue cuenta con la carrera de *Profesor de Matemáticas* que habilita a los egresados de la misma a dar clases tanto en la escuela secundaria obligatoria (13-17 años) como en la Universidad. En este plan de formación de los futuros profesores se propone el estudio de tres materias relacionadas con la geometría: *Geometría Analítica*, *Geometría Euclidiana del Plano* y *Geometría Euclidiana del Espacio*. La primera materia con la que se encuentran los estudiantes del profesorado es la *Geometría Analítica*, correspondiente al primer cuatrimestre del segundo año de la carrera. Esta comienza con el estudio de las rectas en el plano y de las rectas y planos en el espacio, para abordar a continuación el estudio de las secciones cónicas y de las superficies cuádricas. Luego se formaliza la noción de espacio vectorial y se continúa con un estudio clásico de los temas introductorios de álgebra lineal: subespacios, dependencia lineal, transformaciones lineales, ortogonalización, etc. Es importante notar que, entre los objetivos de la materia, se pretende que los alumnos «descubran la interrelación entre el Álgebra Lineal y la Geometría Analítica y la relación de ambos con el Cálculo», pero nunca se nombra, ni se pretende siquiera, relacionar los conceptos de esta materia con la geometría sintética.

En el segundo cuatrimestre de ese mismo año de carrera se presenta la materia de *Geometría Euclidiana del Plano*, donde se abordan las nociones clásicas de la geometría sintética del plano de manera axiomática y rigurosa. Si bien en esta materia se interpreta la geometría como el estudio de las figuras y sus propiedades como abstracciones del mundo sensible, las tareas presentadas remiten únicamente al carácter formal y deductivo del trabajo axiomático y prácticamente no aparecen aplicaciones de las nociones y resultados geométricos trabajados. Se considera que el único método válido para generar conocimiento sobre los objetos geométricos es el método lógico-deductivo. Esta visión lleva a despreciar cualquier tipo de trabajo experimental que se apoye en la exploración del espacio sensible para el establecimiento de nuevos conocimientos geométricos, relegándolo al rol de constatación de los axiomas, tomados como principios indemostrables. En el quinto cuatrimestre de la carrera se aborda la materia de *Geometría Euclidiana del Espacio* en la que se estudian, con un enfoque similar al caso de la *Geometría Euclidiana del Plano*, las nociones de la geometría sintética del espacio. Es importante destacar que, a pesar que los alumnos que cursan estas dos últimas materias ya han estudiado la *Geometría Analítica*, en ningún momento se hace alusión a la relación entre los conceptos y métodos analíticos y los trabajados en la geometría sintética.

Esta forma de organizar los conocimientos geométricos pone de manifiesto lo que la Universidad, como institución formadora de los futuros profesores, considera qué es la geometría y, en particular, evidencia la diferente forma de interpretar la geometría analítica y la geometría sintética que, además, se presentan completamente desconectadas.

3. Modelo epistemológico y modelo didáctico de referencia

La formulación de un problema de investigación en didáctica de las matemáticas presupone siempre, de manera más o menos explícita, una interpretación del ámbito de la actividad matemática que está en juego. Así, cuando en el enunciado de un problema didáctico se hace referencia a la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, del cálculo infinitesimal, de la proporcionalidad o, como en nuestro caso, a la formación del profesorado necesaria para dirigir el estudio de un ámbito cualquiera de la actividad matemática (como, por ejemplo, la geometría), se está considerando inevitablemente una interpretación o un modelo, aunque sea inicialmente muy impreciso, de dicho ámbito.

Desde la TAD postulamos que la explicitación de dicho modelo, que denominamos *modelo epistemológico de referencia* (MER), es imprescindible para poder formular con precisión los problemas de investigación abordados. Pero, al mismo tiempo, constatamos que la construcción del MER demanda cierta formulación previa, aunque sea incipiente, del problema didáctico planteado, puesto que el MER puede considerarse como una conjetura o respuesta provisional a las cuestiones que forman parte de una dimensión básica o nuclear del problema didáctico en cuestión, la *dimensión epistemológica*, que condiciona toda la problemática posterior (Gascón, 2011).

Para hacer compatibles los dos principios o postulados metodológicos citados es necesario que, en la práctica efectiva de la investigación didáctica, la construcción del MER y la progresiva formulación del problema de investigación avancen en paralelo, dialécticamente. A medida que vayamos perfilando las características del MER será posible formular con más precisión algunas de las cuestiones que formarán parte del problema didáctico e incluso podrán formularse cuestiones nuevas. Recíprocamente, al ir avanzando en la formulación del problema didáctico será posible describir con más detalle los componentes de un MER asociado a dicho problema. Resulta, en definitiva, que el MER está asociado, en primera instancia, a un problema o a un tipo de problemas didácticos (en los que está involucrado el ámbito de la actividad matemática a la que el MER se refiere) y no simplemente a un cierto recorte más o menos arbitrario de la actividad matemática. Es importante subrayar que un MER debe considerarse como una *hipótesis científica*, creativa, que se debe contrastar experimentalmente y, por lo tanto, susceptible de ser modificado constantemente.

Para llevar a cabo esta contrastación empírica, el MER debe materializarse en un *proceso de estudio* que tendrá lugar en un contexto institucional concreto, con una historia y unas condiciones particulares y con la participación de sujetos que aportarán su idiosincrasia a todas las etapas de un proceso sobre el que pesarán todo tipo de restricciones. Y ese proceso de estudio debe organizarse de alguna forma concreta, esto es, mediante lo que podemos denominar un *modelo didáctico de referencia*. De hecho, para observar, analizar y evaluar los modelos didácticos actualmente (o históricamente) existentes o posibles, así como para construir modelos didácticos propios que sean potencialmente más adecuados para responder a los problemas didácticos que están en el origen de toda investigación, y al igual que sucede con los modelos epistemológicos, el investigador en didáctica debe utilizar un instrumento adecuado, un punto de vista propio, un sistema de referencia que denominamos *modelo didáctico de referencia* y que, actualmente en la TAD, se materializa en los *recorridos de estudio e investigación* (REI) cuya estructura general puede describirse mediante el *esquema herbartiano* propuesto por Yves Chevallard (2007).

En los REI, el objetivo del estudio no viene definido como un conjunto de saberes designados de antemano, sino como un conjunto de cuestiones a las que la comunidad de estudio se propone aportar una respuesta. Para ello se requiere que la comunidad de estudio movilice todos aquellos recursos (medios, saberes y respuestas disponibles) que sean necesarios para poder construir una «buena respuesta» a la pregunta inicial. Un REI puede entonces describirse en términos de la gestión y desarrollo, en una institución determinada, de una estructura arborescente de cuestiones y respuestas que constituyen el MER en el que se sustenta. Esta búsqueda de respuestas no suele ser un proceso simple y directo sino que pasa por la consideración de nuevas cuestiones derivadas y la reconstrucción de respuestas parciales y provisionales a las mismas.

En el caso de la formación del profesorado, y teniendo en cuenta las necesidades de formación detectadas en los profesores para gestionar los REI experimentados hasta la fecha, proponemos el diseño de lo que denominamos *recorridos de estudio e investigación para la formación del profesorado* (REI-FP) fuertemente articulados con los REI que sirven para organizar las praxeologías matemáticas por enseñar (Ruiz-Olarría 2015).

Una de las metodologías posibles para el diseño y experimentación de estos recorridos de formación del profesorado parte de un REI previamente diseñado para alumnos y se utiliza la vivencia del REI por parte de los profesores en formación y el análisis didáctico de dicho proceso como objetos de estudio en el REI-FP. Con ello se logra que los profesores en formación tengan una experiencia de actividad matemática funcional, aprendan a utilizar las herramientas básicas del análisis didáctico y realicen una pequeña experimentación controlada en forma de prácticas docentes. Cada uno de los REI-FP se estructura en cuatro módulos sucesivos: *vivir un REI* en posición de alumno, *analizar el REI vivido* en posición de profesor en formación, *diseñar un REI* en posición de ingeniero didáctico y *gestionar y experimentar un REI* en posición de profesor en prácticas. A estos módulos se les añade un módulo previo y transversal (llamado «módulo cero») que los motiva. Consiste en el planteamiento de una cuestión problemática para la profesión docente para la cual el REI considerado aparece como un posible elemento de respuesta.

Dado que la TAD interpreta la actividad matemática como una actividad humana institucionalizada, un REI (así como el MER en el que se sustenta) se diseña siempre en relación con una institución. Pero las instituciones no son compartimientos estancos y las cuestiones problemáticas se desarrollan a medida que se van estudiando, de manera que es posible concebir un REI que, potencialmente, pueda organizar procesos de estudio situados parcialmente en dos o más instituciones que pueden abarcar dos o más niveles educativos diferentes.

4. Criterios para construir un modelo epistemológico de la geometría elemental

Tomando como base los resultados obtenidos en algunos trabajos anteriores sobre la enseñanza de la geometría en secundaria (Chevallard y Jullien 1991; Gascón, 2002, 2003; Chevallard, 2005), hemos elaborado un conjunto de criterios para guiar la formulación de nuestro problema de investigación y, dialécticamente, la construcción del MER que proponemos para sustentar un modelo didáctico que permita responder a dicho problema. El objetivo es el de construir un modelo epistemológico-didáctico que cumpla las condiciones que se requieren para que el tipo de praxeologías geométricas que proponemos puedan vivir en la escuela secundaria y ser analizadas en la institución de formación del profesorado. Sintetizamos a continuación dichos criterios.

5. Estructura y dinámica de los modelos epistemológicos de referencia

La estructura de los MER que construye la TAD toma la forma de una red de praxeologías matemáticas cuya dinámica comporta ampliaciones y completaciones progresivas (Sierra, 2006; Barquero, 2009; Ruiz-Munzón 2010). Una manera alternativa y relativamente equivalente de describir un MER es mediante una red de cuestiones y respuestas donde las respuestas tienen una estructura praxeológica (son precisamente estas praxeologías-respuesta las que forman la red de praxeologías cada vez más amplias y completas). En el caso que nos ocupa, las cuestiones iniciales o cuestiones generatrices deberían constituir la razón de ser de la geometría elemental en la escuela secundaria.

5.1. Articular la geometría sintética y la geometría analítica

Los datos empíricos disponibles hasta la fecha muestran que, tanto en la enseñanza secundaria como en la formación del profesorado, la geometría sintética y la geometría analítica aparecen completamente separadas y no existe ninguna propuesta curricular que pretenda articularlas. Esta falta de conexión impide que la geometría analítica se introduzca como una «algebrización» de la geometría sintética. En estas circunstancias, no se trabaja en ningún momento la relación entre modelos gráficos y modelos analíticos. Dado que en la geometría analítica escolar actual se trabaja directamente con problemas formulados en términos del álgebra lineal, no es posible poner de manifiesto la potencia y utilidad de las técnicas analíticas que, superando las limitaciones de las técnicas sintéticas, permiten resolver problemas formulados previamente en el ámbito de la geometría sintética. En base a estos hechos, y a los resultados obtenidos en algunos trabajos anteriores (Gascón, 2002 y 2003), postulamos que las cuestiones problemáticas a las que responde en última instancia la geometría analítica no son precisamente las que se proponen en la escuela secundaria: intersección de dos rectas, intersección de una parábola y una recta, ángulo que forman rectas y planos, cálculo del punto medio de dos puntos dados, perpendicularidad y paralelismo de rectas, etc. Proponemos que una posible razón de ser de la geometría analítica en secundaria surge en el ámbito de la geometría sintética y en el ámbito del mundo sensible cuando se utiliza la geometría analítica como instrumento de modelización para responder a cuestiones que pueden formularse previamente en dichos ámbitos.

En consecuencia, el MER de la geometría elemental debe partir de una problemática sintética (que puede tener su origen, a su vez, en una problemática surgida en el mundo sensible) y mostrar que el desarrollo (adecuadamente dirigido) de las técnicas sintéticas motiva la emergencia de las técnicas analíticas.

5.2. El carácter experimental de la geometría elemental

La citada disociación o desconexión entre ambos tipos de geometría, observada tanto en Secundaria como en la Universidad, es poco coherente con el desarrollo histórico de la geometría. En base a múltiples trabajos históricos, epistemológicos y didácticos (Gonseth, 1945; Einstein, 1985; Chevallard y Jullien, 1991; Chevallard, 2005), postulamos que la geometría es, en primera instancia, una ciencia física cuyo objeto de estudio es el espacio sensible, y que las verdades geométricas son primariamente de orden experimental mediante el contraste empírico-deductivo de modelos. Si bien hoy tenemos plena convicción que el universo en el que vivimos está fundado sobre las bases de una geometría no euclidiana y que las geometrías no euclidianas proporcionan resultados totalmente contrarios a la intuición y a la percepción humanas, podemos decir que el conocimiento geométrico del mundo que nos rodea, a una escala accesible a los sentidos, tiene estructura euclidiana. Por lo tanto, no podemos pensar en una reconstrucción del conocimiento geométrico que «olvide» sus raíces «empiristas» y su carácter modelizador del mundo sensible. Es precisamente en este carácter potencial de instrumento de modelización del mundo sensible y también del universo matemático donde debemos buscar algunas de las primeras razones de ser de las organizaciones matemáticas de la geometría elemental.

Por todo ello, el MER de la geometría elemental debe tomar en consideración su carácter genéticamente experimental y de instrumento de modelización y contener tareas y técnicas (y discursos tecnológico-teóricos) que permitan desarrollar este tipo de prácticas que, junto a las consiguientes conjeturas y contrastaciones experimentales encaminadas a establecer un hecho geométrico, han desaparecido del aula.

5.3. El papel de la experimentación gráfica

Tradicionalmente la experimentación sobre hechos espaciales «planos» se ha llevado a cabo mediante un trabajo gráfico sobre una hoja de papel. Este laboratorio de la geometría euclidiana plana se justifica teóricamente porque en dicha geometría las propiedades de las figuras geométricas no dependen del tamaño de las mismas (ni, por supuesto, del lugar que ocupan en el plano), son invariantes por semejanzas. Esta es precisamente la caracterización de la geometría euclidiana en el Programa de Erlangen propuesto en 1872 por Félix Klein. La geometría elemental (euclidiana plana) estudiará así las propiedades de los objetos geométricos a partir de la construcción y el estudio de figuras que representarán esos objetos en una hoja de papel (o bien en otro medio). Para tomar en consideración este punto, el MER de la geometría elemental deberá contener instrumentos adecuados para llevar a cabo las experiencias gráficas de manera eficaz.

Dado que en el sistema educativo argentino se está generalizando el uso de las TIC a partir del plan «Conectar Igualdad» del Ministerio de Educación de la Nación (ver http://www.conectarigualdad.gob.ar/), podemos suponer que el uso de programas de geometría dinámica constituirá un entorno propicio para el trabajo experimental y exploratorio.

5.4. Dialéctica entre la geometría como teoría deductivo-racional y como ciencia experimental

Como ciencia deductiva, la geometría parte de un conjunto de axiomas y considera teoremas a los enunciados que son lógicamente deducibles de los axiomas y de otros teoremas. Una proposición es «verdadera» si y solo si puede deducirse en la teoría, de manera que en este ámbito la *deducción lógic*a reemplaza completamente a la *experimentación* y, por lo tanto, la geometría deductiva renuncia a modelizar el espacio físico. Como indica Yves Chevallard (2005), esta forma de considerar la geometría presenta ciertas dificultades: ¿Qué criterio se debe utilizar para elegir los axiomas? ¿Basta la no contradicción de estos? ¿Es necesario que los axiomas sean independientes? ¿Cómo comprobar si lo son? Dado que el espacio físico ha dejado de ser el sistema modelizado por la geometría, ¿qué objetos y qué relaciones entre estos se deben tomar en consideración? ¿Qué términos se pueden considerar como primitivos? ¿Por qué hay que demostrar propiedades que parecen «evidentes» desde un punto de vista experimental? ¿Por qué es tan difícil demostrar en algunos casos, y en función del conjunto de axiomas que se tomen, propiedades geométricas «evidentes» desde un punto de vista experimental? ¿Cómo superar, en definitiva, las dificultades ocasionadas por la confusión entre la *evidencia experimental* y la *evidencia deductiva*?

El MER de la geometría elemental debe tomar en consideración de manera progresiva su aspecto deductivo y racional junto a su aspecto experimental. La articulación y la necesaria relación dialéctica entre ambos aspectos es el desafío principal de la enseñanza de la geometría que debe procurar, de una manera que no parece sencilla, convertir progresivamente en racional y deductivo un trabajo que, en principio, será experimental, intuitivo y, en algunos casos, inductivo. Es precisamente en este punto donde radica la principal cuestión que persigue la enseñanza de la geometría elemental: ¿Cómo lograr que los estudiantes pasen de la aseveración ingenua basada en la experiencia sensible, apoyada sobre la intuición sobre el mundo que los rodea, a la afirmación fundamentada en los principios deductivos de la geometría matemática? ¿Cómo lograr que dicho tránsito sea asumido como una tarea genéticamente necesaria dentro del desarrollo de la actividad matemática? Dicho en otros términos, ¿cómo lograr que los estudiantes «sientan» la necesidad de apoyarse en la racionalidad del trabajo deductivo para resolver las tareas y problemas emergentes de la exploración del mundo sensible? Para René Berthelot y Marie Hélène Salin (1992) el primer obstáculo con que tropieza la enseñanza de la geometría elemental aparece cuando se pretende que los alumnos *demuestren* proposiciones a partir del trabajo con figuras trazadas sobre una hoja de papel.

5.5. Los programas de geometría dinámica y la dialéctica entre lo verdadero y lo deducible

Los programas de geometría dinámica como Geogebra o Cabri Geomètre realizan procesos basados en la geometría analítica (cálculo de coordenadas) y muestran en la pantalla la traducción gráfica de sus cálculos. Esta representación siempre puede presentar imprecisiones y sembrar dudas respecto de la propiedad que se quiere comprobar, pero estas dudas tienden a desaparecer si se pasa de un *uso estático* (para un caso particular) a un *uso dinámico* del programa. En efecto, los programas actuales de geometría dinámica combinan cálculos casi instantáneos con la posibilidad de modificar los parámetros que entran en los cálculos (y con la intermediación del «interface» gráfico). Así, los citados programas permiten verificar numéricamente lo que las sucesivas representaciones gráficas sugieren fuertemente y, aunque esta verificación numérica no sea del todo concluyente, provoca la aparición de un nuevo tipo de experiencia: la *experiencia numérico-gráfica* (Chevallard, 2005). La concepción de este tipo de experiencias constituye una aportación importante de los programas de geometría dinámica a la renovación de la dialéctica entre lo verdadero y lo deducible puesto que constituye una fuente de conjeturas obtenidas experimentalmente que, posteriormente, podrán ser contrastadas deductivamente, pero también porque los programas de geometría dinámica pueden utilizarse como un instrumento auxiliar para demostrar un teorema (cuyo enunciado es conocido de antemano como, por ejemplo, el teorema de la recta de Euler). El MER de la geometría elemental debe integrar el uso de programas de geometría dinámica para enriquecer el trabajo experimental y como auxiliar del incipiente trabajo deductivo.

5.6. Relatividad de las nociones y de las propiedades geométricas

En las praxeologías *para la enseñanza* de la geometría, más allá de las praxeologías *por enseñar* en Secundaria, deberán aparecer cuestiones que obliguen a discernir la existencia de diferentes tipos de geometrías y la relatividad de las nociones geométricas y de las propiedades y teoremas geométricos. En particular, deben clarificarse las nociones que pertenecen a la geometría *métrica euclidiana*, a la geometría *afín* y a la geometría *proyectiva* y los teoremas que son válidos en cada una de ellas. Estas cuestiones, así como las correspondientes praxeologías que respondan a las mismas, deberán formar parte del MER que sustente el REI-FP como ampliación del MER que sustente el REI para el estudio de la geometría elemental en Secundaria.

6. Formulación del problema de investigación

La problemática inicial de nuestro trabajo se sitúa en el diseño y experimentación de las praxeologías matemáticas y didácticas que se requieren para proporcionar al profesorado el equipamiento praxeológico necesario para dirigir el estudio de la geometría en Secundaria. Pero esta problemática no puede separarse del problema, didácticamente no resuelto, de la organización didáctica de la geometría elemental en la escuela secundaria. Siguiendo la metodología de la TAD, hemos cuestionado el modelo epistemológico dominante (tanto en Secundaria como en la institución de formación del profesorado) y hemos descrito algunos criterios para elaborar un modelo epistemológico-didáctico de la geometría elemental que permita hacer vivir la dialéctica entre el trabajo experimental y el trabajo deductivo, superar la desarticulación de la geometría sintético-analítica enseñada e integrar las razones de ser que proponemos para la geometría elemental en el corazón de los programas de estudio.

Mientras que en la formulación inicial del problema de investigación nos referíamos de manera muy general al «análisis, diseño y experimentación de las praxeologías matemáticas para la enseñanza de la geometría que contienen a las praxeologías matemáticas por enseñar», en este momento estamos en condiciones de avanzar en la explicitación del problema que, en realidad, hemos ido construyendo implícitamente a medida que precisábamos los criterios para construir el MER y el REI sustentado en él. Este avance se debe a que ahora podemos utilizar las nociones y los principios que hemos utilizado para construir el modelo epistemológico-didáctico de referencia como herramientas para formular las cuestiones $\boldsymbol{Q_i}$ que forman parte de nuestro problema didáctico. Avanzamos respuestas tentativas a algunas de estas cuestiones y las denominamos *conjeturas*, $\boldsymbol{C_i}$, porque deberán ser contrastadas experimentalmente.

$\boldsymbol{Q_1}$**:** *¿Qué praxeología podría tomarse como sistema inicial de tal forma que su ampliación y completación progresiva diese origen al MER de la geometría elemental?*

$\boldsymbol{C_1}$: Proponemos como sistema inicial una praxeología matemática en torno a los problemas de construcción con regla y compás (o bien con otros medios informáticos que recreen este ámbito de trabajo), tomando como técnica inicial el patrón de análisis-síntesis en la modalidad de dos lugares geométricos (Pólya, 1962-65).

Q**$_2$**: *¿Qué cuestiones, que surgen en la praxeología inicial citada, pueden hacer el papel de una posible «razón de ser» de la geometría sintética en la escuela secundaria?*

C**$_2$**: Proponemos considerar como razón de ser de la geometría (sintética) elemental, las cuestiones relativas a la determinación (sintética) de una figura geométrica y a la construcción de una figura a partir de un conjunto de elementos de la misma (o de relaciones entre dichos elementos). Dado que la indagación de los diferentes conjuntos de elementos que determinan la forma y el tamaño de una figura (o únicamente su forma) es, en primera instancia, una tarea experimental, podemos considerar que aparecen ya desde el principio tareas en las que se materializa el carácter «experimental» de la geometría elemental.

Q**$_3$**: *¿Cómo introducir en la escuela secundaria el carácter deductivo de la geometría elemental? ¿Qué tipos de cuestiones se deberían plantear para que emerja la necesidad del trabajo deductivo a partir de la exploración con los programas de geometría dinámica? ¿Qué tipos de tareas serán necesarias para que el trabajo intuitivo-experimental evolucione hacia formas más analíticas y deductivas?*

C**$_3$**: Teniendo en cuenta el currículum de la enseñanza media, proponemos incluir la *geometría analítica* (cuyos axiomas quedan implícitos y no son visibles en la práctica geométrica escolar) como un desarrollo de la teoría deductiva de la geometría elemental, a modo de proceso de algebrización de la geometría sintética.

Q**$_4$**: *¿Qué cuestiones constituyen una posible "razón de ser" de la geometría analítica en la escuela secundaria? ¿Qué relación puede establecerse entre las técnicas sintéticas y las técnicas analíticas?*

C**$_4$:** Postulamos que pueden hacer el papel de «razón de ser» de la geometría analítica en Secundaria determinadas cuestiones que se formulan en el ámbito de la geometría sintética que o bien no son resolubles con técnicas sintéticas o bien lo son, pero con técnicas poco económicas. Postulamos que, en la institución de la escuela secundaria, puede mostrarse la *complementariedad* entre ambos tipos de técnicas. Para ello deberán proponerse tareas que pongan de manifiesto las limitaciones de las técnicas sintéticas y la emergencia de las técnicas analíticas y, paralelamente, se mostrará que, en determinadas tareas, la puesta en marcha de las técnicas analíticas puede ser guiada por el uso previo de técnicas sintéticas. J. Gascón (1989) muestra la existencia de evidencia empírica de la mejora en el uso de técnicas analíticas cuando previamente se entrena en el uso de técnicas sintéticas.

***Q_5*: *¿Qué praxeologías matemáticas en torno a la geometría (tanto sintética como analítica) deberían estar presentes en la escuela media?*

***C_5*: Conjeturamos que, además de las praxeologías en torno a la determinación y construcción sintética y analítica de figuras geométricas particulares a partir de datos concretos, tienen cabida en la escuela media praxeologías que incluyen tareas de *estudio de casos* en función de las posibles relaciones entre los datos (que juegan el papel de parámetros). La comparación entre el estudio de casos con técnicas sintéticas (que requiere llevar a cabo una tarea experimental) y el correspondiente estudio de casos con técnicas analíticas (que comporta trabajar con ecuaciones paramétricas) constituye un importante aspecto de la *dialéctica experiencia-deducción*.

***Q_6*: *¿Qué praxeologías matemáticas en torno a la geometría (tanto sintética como analítica) deberían estar presentes en la formación de profesores? ¿Deberían ser las mismas praxeologías que en la escuela media? ¿En qué sentido las praxeologías matemáticas para la enseñanza de la geometría (específicas de la formación del profesorado) completan las praxeologías geométricas por enseñar en la escuela media?*

***C_6*: Las praxeologías para la enseñanza de la geometría deberán contener, más allá de las praxeologías por enseñar, los conocimientos matemático-didácticos necesarios para delimitar e interpretar estas praxeologías y para explicitar su razón de ser, sus limitaciones, posibles desarrollos y reformulaciones.

***Q_7*: *¿Qué tipo de organizaciones didácticas pueden hacer emerger las razones de ser tanto de la geometría sintética como de la geometría analítica en la formación del profesorado? ¿Cómo se materializa en el caso concreto de la geometría elemental la relatividad institucional de las razones de ser?*

C_7: Proponemos diseñar una organización didáctica generada por una praxis (tareas y técnicas didácticas) encaminadas a mostrar las limitaciones de las técnicas sintéticas y la relatividad de las nociones y propiedades geométricas en función del tipo de geometría en el que se trabaje.

> **Q_8:** *El uso de software de geometría dinámica plantea nuevas cuestiones como consecuencia, entre otras cosas, de la precisión de visualización y de la potencialidad de generar innumerables ejemplos: ¿En qué medida esta posibilidad de «recorrer» infinitos casos mediante la visualización con computadora favorece o dificulta la necesidad de justificar deductivamente los resultados sugeridos en la experimentación?*

Para seguir avanzando en nuestra investigación deberemos empezar por construir una primera versión del MER de la geometría elemental siguiendo los criterios descritos anteriormente y por diseñar y experimentar un REI sustentado en dicho MER. Obtendremos así, analizando la reacción del sistema al modelo didáctico propuesto, los primeros resultados relativos a las condiciones que se requieren y a las restricciones que dificultan que el tipo de trabajo geométrico que proponemos pueda vivir con normalidad en la enseñanza secundaria argentina. Estos resultados nos proporcionarán criterios para modificar nuestro modelo epistemológico-didáctico y para construir, en una segunda fase de la investigación, un REI-FP que amplíe el REI básico incluyendo herramientas para el análisis matemático-didáctico del mismo. Los resultados de estas experimentaciones permitirán contrastar si este REI-FP tiene cabida en la actual institución de formación del profesorado. Además, proporcionarán datos sobre cómo deberían modificarse las cosas para que este tipo de formación fuera posible y evidenciarán hasta qué punto dicha formación viene a cubrir las necesidades profesionales del profesor de matemáticas relacionadas con la dirección del estudio, en la enseñanza secundaria, de una geometría que articula las técnicas sintéticas con las analíticas y permite hacer vivir la dialéctica entre el trabajo experimental y el trabajo deductivo.

Agradecimientos

Financiado por la beca de doctorado ref: SFRH/BD/77335/2011 de la *Fundação para a Ciência e a Tecnologia* (Portugal) y por el proyecto EDU2012-39312-C03-03 *La modelización matemática para la formación del profesorado de secundaria: del algebra al cálculo diferencial*.

Referencias

Abrate, R., Delgado, G. & Pochulu, M. (2006). Caracterización de las actividades de geometría que proponen los textos de matemática. *Revista Iberoamericana de Educación*, *39*(1), 1-9.

Barquero, B. (2009). *Ecología de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las matemáticas* (Tesis doctoral). Universitat Autónoma de Barcelona, España.

Berthelot, R. & Salin, M.-H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire* (Tesis doctoral). http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00414065/fr/

Bosch, M. & Gascón, J. (2009). Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. En M. J. González, M. T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 89-113). Santander, España: SEIEM.

Cirade, G. (2006). *Devenir professeur de mathématiques : entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel* (Tesis doctoral). http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00120709/fr/

Chevallard, Y. (2005). *Étudier la géométrie avec un logiciel de géométrie.* Documento no publicado.

Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. En L. Ruiz Higueras, A. Estepa & F. J. García (Eds.), *Matemáticas, escuela y sociedad. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD)* (pp. 705-746). Jaén, España: Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Chevallard, Y. & Jullien, M. (1991). Autour de l'enseignement de la géométrie au collège. Première partie. *Petit x*, *27*, 41-76.

Chevallard, Y. & Cirade, G. (2009). Pour une formation professionnelle d'université : éléments d'une problématique de rupture. *Recherche et formation, 60,* 51-62.

Einstein, A (1985). *El significado de la relatividad*. Barcelona, España: Planeta-Agostini.

Gascón, J. (1989). *El aprendizaje de métodos de resolución de problemas de matemáticas* (Tesis Doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona, España.

Gascón, J. (2002). Geometría sintética en la E.S.O. y analítica en el Bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados? *Suma. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, *39*, 13-25.

Gascón, J. (2003). Efectos del *autismo temático* sobre el estudio de la geometría en secundaria. Parte I. Desaparición escolar de la razón de ser de la geometría. *Suma. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, *44*, 25-34.

Gascón, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *14*(2), 203-231

Gonseth, F. (1945). *La géométrie et le problème de l'espace. Volume II : Les trois aspects de la géométrie*. Lausanne, Suiza: Griffon.

Ministerio de Educación de la Nación Argentina (2006). *Ley de Educación Nacional 26.206.* Buenos Aires: Ministerio de Educación, Gobierno de la República Argentina.
http://www.me.gov.ar/doc_pdf/ley_de_educ_nac.pdf

Ministerio de Educación CABA (2009). *Matemática. Orientaciones para la planificación de la enseñanza* (1.ª ed). Buenos Aires: Ministerio de Educación, Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires.

Ministerio de Educación CBA (2011). *Diseño curricular de educación secundaria.* Córdoba, Argentina: Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba, Secretaria de Educación, Dirección General de Planeamiento e información Educativa.

Oliver, M. I., Rocerau, M. C., Valdez, G., Vilanova, S., Medina, P., Astiz, M. & Laviada M. G. (2003). Análisis del tratamiento de algunos temas de geometría en textos escolares para el tercer ciclo de la educación general básica. *Revista Iberoamericana de Educación*, 10-12-03.
http://www.rieoei.org/deloslectores/556Oliver.PDF

Pólya, G. (1962-5). *Mathematical discovery* (2 vol.). New York, NY: John Wiley and Sons.

Ruiz-Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional* (Tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona, España.

Ruiz-Olarría, A. (2015). *La formación matemático-didáctica del profesorado de Secundaria. De las matemáticas por enseñar a las* *matemáticas para la enseñanza* (Tesis doctoral). Universidad Autónoma de Madrid.

Sierra, T. A. (2006). *Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas los sistemas de numeración y la medida de magnitudes.* (Tesis Doctoral). Universidad Complutense de Madrid.

Theory and practice in mathematics teacher education

Kaj Østergaard
Roskilde University and VIA University College, Denmark

Resumen. Se examina el desafío de vincular la teoría con la práctica en la formación del profesor de matemáticas utilizando la teoría antropológica de lo didáctico (TAD). Se describe el problema de la relación teoría-práctica tanto en un contexto internacional como danés. Después de una breve introducción a la TAD, se ilustra cómo pueden ser utilizadas las nociones de transposición didáctica y de praxeología para analizar la relación teoría-práctica con un ejemplo sobre suma de fracciones. Sobre este análisis se combinan los dos modelos en un modelo más comprehensivo para describir y analizar la formación del profesor de matemáticas centrada en el problema teoría-práctica.

Résumé. Nous examinons le défi d'établir les interactions entre la théorie et la pratique dans la formation des professeurs de mathématiques en nous appuyant sur la théorie anthropologique du didactique (TAD). Le problème de l'articulation entre théorie et pratique est décrit à la fois dans un contexte international et dans le contexte danois. Après une brève introduction à la TAD, nous illustrons ce problème à l'aide d'un exemple portant sur l'addition de fractions, pour montrer comment les notions de transposition didactique et de praxéologie peuvent être utilisées pour analyser la relation entre théorie et pratique. En nous appuyant sur cette analyse, nous combinons les deux modèles pour en créer un plus complet, afin de décrire et d'analyser la formation des professeurs de mathématiques du point de vue du problème de l'articulation entre théorie et pratique.

Abstract. The challenge of establishing an interplay between theory and practice in mathematics teacher education is examined by the use of the anthropological theory of the didactic (ATD). The theory-practice problem is described both in an international and a Danish context. After a brief introduction to the ATD, it is illustrated with an example on addition of fractions how the notions of *didactic transposition* and *praxeology* can be used to analyse the theory-practice relation in this situation. Build on this analysis, the two models are combined into a more comprehensive model for describing and analysing mathematical teacher education focusing on the theory-practice problem.

IV^e congrès international sur la TAD (Toulouse, 21-26 avril 2013)
Axe 4. *Apports de la TAD à l'enseignement et à la diffusion des connaissances*

Østergaard, K. (2017). Theory and practice in mathematics teacher education. Dans G. Cirade et al. (Éds), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* (pp. 899-918). https://citad4.sciencesconf.org

1. Introduction

Establishing coherence between theory and practice is one of the main challenges in mathematics teacher education. In Denmark more than four out of ten student teachers experience a lack of coherence between the teaching of general educational science taking place at the university college and teaching practice in schools (Jensen et al., 2008). Throughout the last decades, teacher education has become increasingly academic – which can be seen as positive – but concurrently, the practice situation at diverse schools has become much more challenging, particularly because of an increasing social and ethnic segregation that affect schools in disadvantaged neighbourhoods. Therefore, many student teachers want practical teaching tools and not academic theories and this, of course, entails a risk of widening the gap.

The lack of coherence between theory and practice in teacher education is not only a problem in Denmark. It occurs in different ways but it is described and researched internationally. Bergsten and Grevholm (2005) point out two different *didactical divides.* The first divide is between the theoretical knowledge learned in the study of mathematics or pedagogics, respectively, and the practice of mathematics teachers in school. The conditions for the divide between theoretical knowledge in pedagogy and teaching practice will not be treated in this paper – the focus is on mathematics teaching. Mathematics, which is an academic subject mainly developed through research at the universities (but also in e.g. commercial and technical contexts), must be adapted to school mathematics suited for the particular educational context and aim. Student teachers will, of course, meet with both scholar and school mathematics in teacher education, but it is absolutely essential for them to learn to transform from one to the other, e.g. when they have to derive the mathematical points from teaching materials or elaborate concrete teaching from a national curriculum.

The second divide is between pedagogical and mathematical knowledge. Academic theories on pedagogy and learning are introduced in the general and common part of teacher education and in mathematics in particular, didactical theories on the teaching and learning of mathematics are introduced. Student teachers are supposed to combine their knowledge from the two diverse disciplines in common *teacher knowledge* usable for teaching practice where problems occur in varied, complex forms. Bergsten and Grevholm (2005) point out the lack of theory to unify these two kinds of knowledge in a common pedagogical content knowledge about teaching and learning mathematics in school.

2. Teacher knowledge

Teacher knowledge – and ensuing practices of mathematics teachers – is a very complex matter. According to Schulman (1987) teacher knowledge is comprised of three separate strands:

- *Subject matter knowledge* (SMK). In this case mathematical knowledge.
- Pedagogical knowledge (PK).
- Pedagogical content knowledge (PCK).

At the universities the three strands are researched and taught separately and rarely combined. One of the main problems in mathematics teacher education is to establish interplay between these three different strands and concrete experiences with teacher knowledge gained from teaching practice. Preparatory lessons at the teachers college and teaching practice are often mentioned as one of the best opportunities to build a bridge between theory and practice but research is inconclusive on this matter (Bergsten et al., 2009, p. 60). Lack of theoretical focus often implies that student teachers experience teaching practice as complex and stressful and therefore fall into short-lived performance without coherence to their learning outcome from the theoretical education. The aim of this paper is to design a theoretical model to examine and analyse what is theoretically required to link theory and practice and how the education at university college, preparatory lessons and teaching practice can be organised to establish circumstances to create this link.

In Denmark, mathematics teacher education for primary and lower secondary school is located in university colleges. University colleges are evolved from the non-academic seminar-tradition and now in many ways evolving toward more academic standards although they still are not universities.

As in most other countries, teacher education in Denmark consists essentially of three key strands; mathematics, pedagogy and teaching practice. We have a joint occurrence of the three strands – this is what Tatto et al. (2009, p. 18) call *concurrent preparation*. Although, concurrent preparation – compared to *consecutive preparation* with three independent periods (p. 18) – is supposed to better enable the students to correlate theory and practice, many student teachers in Denmark, as previously mentioned, still experience a lack of coherence between the general education located at university colleges and teaching practice.

The divide between pedagogical and mathematical knowledge is further intensified in Denmark by the fact that teacher education and the general routine at schools have developed in disparate ways on this point during the last 20 years. On the one hand, change of laws within teacher education has changed focus from educating the "*comprehensive teacher*" who teaches almost all subjects – and of whom some teach mathematics – to a more specialised teacher education where each teacher is trained to teach only two or three "main subjects". But while teacher education has emphasised to educate *mathematics teachers*, schools, on the other hand, still emphasise that pupils must be taught by the fewest possible teachers. Therefore teachers are encouraged to teach more subjects: *teacher first, then (e.g.) mathematics teacher*. The principle of the comprehensive school where teachers teach more subjects and pupils meet only a few teachers is very strong in Denmark and this, among other things, results in the fact that 37 % of all mathematics teachers are not educated with mathematics as their main subject. Student teachers therefore encounter with different views and priorities of the relation between pedagogy and mathematics in teacher education at university colleges and schools. This may complicate the divide and makes it even more difficult to combine practice at school and theory at the university college.

The theory-practice divide in teacher education can be regarded from two points of view: Firstly, one can consider the problem from theory to practise. Is it possible – and desirable – to use teaching practice to motivate or even support teacher students' acquisition of theoretical knowledge? And how do we create a shared frame of reference from teaching practice to interpret the theory? Subject matter knowledge, pedagogical knowledge and pedagogical content knowledge are taught separately at university colleges but are in reality inextricably entwined with each other. The challenge is how to create interplay between the academic theories of mathematics and pedagogy and teaching practice in teacher education. It is crucial to create this interplay e.g. to legitimize the theoretical education and to place school knowledge in a wider context. Secondly, one can consider the problem from practice to theory. In teacher education, the teaching practice must be discussed in the theoretical education to ensure that student teachers' learning *in* and *from* teaching practice is connected to the theoretical education and brings about a critical view on the theories and research from a practical point of view. This requires a common model to describe and analyse mathematical knowledge, teaching and learning at different levels and an ongoing development of teaching practice models to develop mathematical teaching. Inevitably, teachers learn through everyday teaching but their experiences are rarely shared with colleges or other professionals and the knowledge therefore remains individual (Skott, 2001). Lack of explicit knowledge about teacher practice complicates the transition from student teachers to in-service teachers (Winsløw, 2009) and makes the profession vulnerable to criticism (Stiegler & Hiebert, 2009). The problem is how to build up knowledge about how teacher knowledge and teaching practice can be developed in a Danish context. The basic idea of my project is that teacher students should acquire teacher knowledge simultaneously from teaching practice and the theoretical education at the university college. It is of crucial importance for teachers in mathematics to develop their teacher knowledge through a lifelong career and therefore teacher education must offer tools to learn in and from teaching practice.

The next step of my project is to develop institutional possibilities for co-operation between teachers, especially at particular schools, to make sure that the emerged knowledge will be shared and not remains individual. In order to reach this goal it is necessary to design and establish learning communities that enable student teachers and teachers to try out, discuss and develop theories about teaching and learning in practice. Teachers must learn to develop teaching through a lifelong career and this starts during teacher education. According to Stigler and Hiebert: "Teacher learning is the key to improve teaching. But not any kind of teacher learning will do. […] Schools must become places where teachers, not just students, learn". (Stigler & Hiebert, 2009, pp. 36-37).

One aim of my project is to create different cooperation communities (Jaworski, 2003) where student teachers, in-service teachers and, if possible, teacher education teachers build up knowledge based on mutual experiences with the same mathematical teaching situation, explicitly and systematically planned and evaluated based on a common theoretical framework.

It is a current research topic to identify learning conditions for teachers in a common practice. The aim of my project is to contribute to this topic by researching and developing tools, models and strategies to support student teachers' learning in and from practice in Danish teacher education across mathematical themes, learner age and school cultures. The purpose of this paper is to design a model to correlate theory and practice in mathematical teacher education on the basis of the anthropologic theory of the didactic (ATD). The model will be used as a theoretical tool to point out different kinds of theory-practice problems in mathematical teacher education. Firstly, the ATD will be briefly presented in the next section.

3. The anthropological theory of the didactic

The complex coherence between practical and theoretical knowledge about teaching mathematics is modelled in the *anthropological theory of the didactic* as mathematical and didactic *praxeologies* (Chevallard, 1999). The founder of the theory, Yves Chevallard, has, together with other international researchers, developed a ground-braking research program about the coherence between theory and practice in teaching and the relationship between didactical and mathematical knowledge. The theory is anthropological on a scientific theoretical base as it describes both didactical and content knowledge as founded on, and regarding, concrete human activity. It provides tools to analyse, model and design coherent "units" of human knowledge and practice on an empirical foundation. This makes the theory appropriate to consider what I have pointed out as two main problems in Danish mathematical teacher education – the lack of coherence between theory and practice and between didactical and content knowledge. Furthermore, the theory will be used to analyse and expound how teaching practice can contribute to developing teachers teaching knowledge and prepare teacher students for life-long learning in and from practice.

Chevallard names the adaptation from scholar mathematics developed mainly at universities to school mathematics as it occurs in schools *the didactic transposition* (figure 1). The didactic transposition is divided into three steps. First an *external didactic transposition* taking place outside the school, by, what Chevallard terms, the *noosphere*, from scholar mathematics to *mathematics meant to be taught* as it is described e.g. in curricula. Second an *internal didactic transposition* taking place inside the school, carried out by the teacher and very often based on a course book system, from *knowledge meant to be taught* to *knowledge actually taught.* Very few teachers are involved in the external didactic transposition but internal didactic transposition is everyday work for all teachers. The third step is about what happens in the learning situation, often in the classroom, between the teacher and the pupil – influenced by classmates and the learning environment.

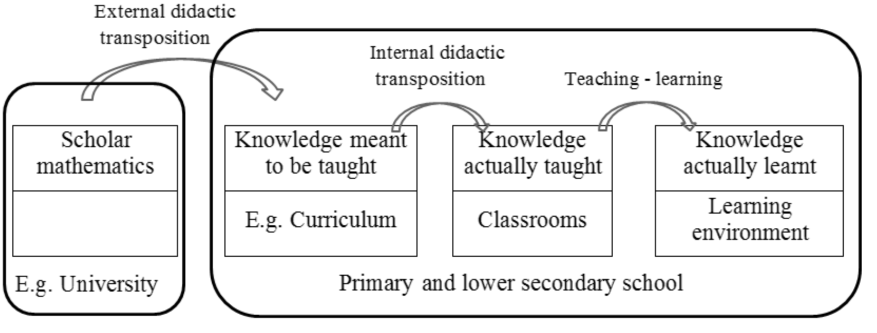


Figure 1. Didactic transposition.

Didactic transposition in mathematics teacher education can be illustrated in a model similar to figure 1 but teacher education is characterized by the fact that student teachers are supposed to learn both mathematics *and* to teach mathematics. This means that student teachers have to deal with a *meta-didactic transposition*: The didactic transposition from scholar mathematics to knowledge actually learnt in teacher education can be provided as a practical example for the teacher students of how to work on the didactic transposition from scholar mathematics to knowledge actually learnt in school. Student teachers must gain experiences and reflect on their own learning process to acquire tools to accomplish the didactic transposition in their own work as teachers in schools.

It is crucial for student teachers to gain an insight into the didactic transposition by analysing the changes of knowledge and practice in mathematical activities in different contexts. First of all, because it creates a link to bridge the didactical divide between scholar mathematics and school mathematics and secondly because it is essential for teachers to adapt different "kinds" of mathematics to other kinds in their everyday work, for instance to derive mathematical points from teaching materials and place them in a broader theoretical context or to adapt mathematical concepts from the curriculum to relevant mathematical activities for pupils at school. In addition to this, the way the mathematical knowledge is treated in school including the choice of working methods is rooted in scholar mathematics in a wide sense.

Mathematical content can be analysed by stating a *reference epistemological model* (REM) (Bosch & Gascón, 2006). A REM describes the mathematical content by posing a multitude of fundamental questions from the different perspectives in the didactic transposition. For instance, rational numbers are defined differently in scholar mathematics and school mathematics. A REM about rational numbers should encompass analysis and answers from the different perspectives to questions such as: What are rational numbers? How to describe them in terms of praxeologies (see page 9-10)? What is their connection to other praxeologies, for instance other number sets? How does one calculate with rational numbers? Etc. The aim of stating a REM is to provide a specific way of looking at the mathematical content, in this particular case rational numbers, to question how mathematics is taught and to make proposals for doing things differently. Having analysed the answers to questions like these results in a number of didactical decisions about what content to choose at a given level, why and how to teach it but also choices about what to leave out.

3.1. Scale of levels of codetermination

A fundamental issue in mathematics teacher education is the selection of mathematical contents for teaching pupils at school – "knowledge meant to be taught". The classical paradigm of "visiting monuments" of knowledge (Chevallard, 2015, p. 175) where content is "sanctified by tradition" (p. 176) is questioned by pupils, parents, society and researchers and therefore teachers have to justify their choices of content. At first, student teachers are supposed to read the curriculum but professional teacher knowledge includes a deeper understanding and a critical evaluation of *why* exact content is chosen. This choice can be analysed employing didactic transposition. At first glance it might look like a problem determined by conditions and restrictions "immediately identifiable in the classroom; teacher's and students' knowledge, didactical material available, software, temporal organisation, etc.", (Bosch & Gascón, 2006, p. 61) but one of the main points in didactical transposition theory is that selection of mathematical content is determined by institutional factors (Bosch & Gascón, 2006, p. 56; Winsløw, 2011, p. 122) which includes both conditions and restrictions inside and outside the classroom (Bosch & Gascón, 2006, p. 61). This calls for an analysis of the influence from external factors on the selection of mathematical content e.g. school traditions and societal norms. These conditions and restrictions can be analysed and researched by applying Chevallard's *scale of levels of codetermination* (Bosch & Gascón, 2006, p. 61) to analyse how a given mathematical content is selected. This part of Chevallard's theory will not be elaborated in this paper but can be further studied in (Bosch & Gascón, 2006).

3.2. Praxeologies

Chevallard introduces the concept of *praxeology* to model and analyse human activities. The notion of praxeology is a linguistic compound of *practice* and *knowledge* (from Greek *logos*). Human activity is an interrelated combination of practice and knowledge; every human activity (practice) is motivated by thinking and reasoning (knowledge) and practice then again affects knowledge.

A praxeology (see figure 2) is described by a 4T-model – a four-tuple $[T / \tau / \theta / \Theta]$ consisting of a *type of tasks* (T), a *technique* (τ), a *technology* (θ) and a *theory* (Θ). First the four elements will be described briefly and then in the next section the description will be elaborated by providing an example of how it can be used as a theoretical tool to analyse both theory and practice in teacher education.

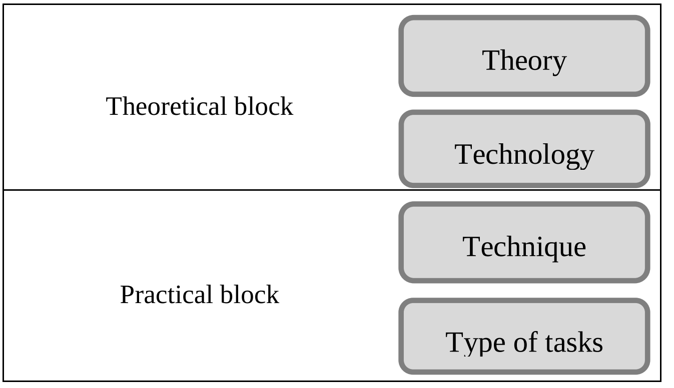


Figure 2. The praxeological structure.

The *task* is what initiates human activity – in school the task is supposed to motivate the pupils to perform actions that will give them the opportunity to learn. To solve a task one has to use a *technique* – in mathematics this could for instance be rules of arithmetic. A technique is often useable for a type of tasks. Type of tasks and technique combined is called the *practical block* – concerning the *know-how. Technology* is made of explanations and arguments to back up the technique – in mathematics it can be theorems, proofs and properties. *Theory* is made of explanations and arguments to back up technology – in mathematics it can be definitions, axioms, etc. Technology and theory constitute the *theoretical block* – concerning *know that and why*.

3.3. Mathematical and didactic organizations

Praxeologies can, as illustrated above, have references to mathematical tasks and situations – or content knowledge in Schulman's (1987) terms. These are named *mathematical organisations.* In many cases, a type of tasks can be solved by using the same technique – these are named *point organisations*. Similarly, praxeologies unified by technology are termed *local organisations* and praxeologies unified by theory are termed *regional organisations.*

Praxeologies can also have references to how to learn and teach subjects e.g. mathematics – or pedagogical knowledge in Schulman's (ibid.) terms. These are called *didactic praxeologies*. Didactic praxeologies concerning pupils or students learning are termed *pupils' or students' didactic praxeologies* and didactic praxeologies concerning teaching a mathematical praxeology are named *teacher's didactic praxeologies* (Barbé, Bosch, Espinoza & Gascón, 2005). Mathematical and didactic organisations are interdependent – didactic praxeologies are meaningless without mathematical (or other subjects) praxeologies – with Chevallard's words the two are *co-determined.*

Teacher's didactic praxeologies are utilised to describe and analyse *what* to do (type of tasks) when teaching a mathematical organisation, *how* to do it (technique) and *why* to do it this way (theory block). Explanations of the techniques (technology) are often interpreted from the context and accepted as such (Madsen & Winsløw, 2009). Consequently, technology and theory are often linked and we end up with a 3T-model: Type of tasks, Technique and Theory block.

3.4. Moment of didactic processes

Didactic and mathematical praxeologies are correlated through didactic processes concerning what Shulman (1987) terms pedagogical content knowledge. In the ATD the didactic process of students creating or re-creating a mathematical organisation $[T_i / \tau_i / \theta / \Theta]$ is described by six *didactic moments* (Barbé et al., 2005):

1. The moment of the first encounter
2. The exploratory moment
3. The technological-theoretical moment
4. The moment of the technical work
5. The institutionalisation moment
6. The evaluation moment

These six moments are crucial moments or dimensions in the learning process and are linked to the praxeological structure given to mathematical contents. The first moment is the student's first encounter with the mathematical organisation often represented by a first type of tasks T_i. After this, in the exploratory moment, the student explores similar tasks T_i to elaborate a suitable technique τ_i to solve the group of similar tasks. In the technological-theoretical moment the techniques are explained and justified and the theory block $[\theta / \Theta]$ is constituted. The moment of technical work consists in working on the technique τ_i to improve it and to develop students' skills and routines. The two last moments are closely connected. In the institutionalisation moment the mathematical organisation is related to other mathematical organisations through the theory blocks [θ / Θ]. At last, at the evaluation moment the type of tasks T_i is related to the developed mathematical organisation and the process is validated.

Each of the six moments contains didactic tasks which can be taken as the basis of didactic praxeologies. In teacher education the didactic moments can be used as a tool to combine mathematical and didactic praxeologies and show how the two are inextricably intertwined. Again, the moments can be identified and analysed in the theoretical teaching of mathematics in teacher education and applied by the students in their own teaching in school.

4. Addition of fractions - an example

In the next section *addition of fractions* will be described in terms of praxeologies to show how the 4T-model can be applied to describe and analyse this topic in mathematics teacher education, in order to show how the model can be used as a tool to create a correlation between theory and practice. After the description the example is used to identify crucial issues and connections between different parts of mathematical teacher education and, on this basis, design a model. The aim of the model is to help identify and analyse different types of theory-practice problems in mathematical teacher education and thus propose ways to overcome them.

The example is hypothetical and has not been carried out yet, but it will be at a later time. The starting point of the course plan is the question: *What is the sum of* $\frac{a}{b}$ *and* $\frac{c}{d}$ *– e.g. what is the sum of* $\frac{1}{6}$ *and* $\frac{3}{4}$*?* The usual techniques, as all the students, of course, know very well, is to find a common denominator including the lowest common multiple, to extend fractions, to add fractions with a common denominator and to reduce fractions. To add $\frac{1}{6}$ and $\frac{3}{4}$ is, of course, an easy task for student teachers whereas adding $\frac{a}{b}$ and $\frac{c}{d}$ is challenging for most student teachers even though some would say that this is knowledge they should have learned already in high school. Because the shift in level of abstraction from a concrete example to the general rule is challenging for most student teachers it is a suitable starting point for studying the technology – explanations of rules of arithmetic of rational numbers including e.g. *if* $\frac{a}{b}$ *is an arbitrary fraction and n an arbitrary integer, not 0, then* $\frac{a}{b} = \frac{n \cdot a}{n \cdot b}$. Theory is framing and justifying technology in this case for instance framing the definition of rational numbers, $\mathbb{Q} = \{p/q \mid p \in \mathbb{Z} \text{ and } q \in \mathbb{N}\}$.

The starting analysis of addition of fractions includes elements from both school and scholar mathematics. After this, the topic can be treated from different perspectives. I choose *knowledge meant to be taught* as my next point of view. The aim of teaching fractions after 9th grade is described in the Danish curriculum, termed Common Goals 2009:

> Teaching must lead to skills and knowledge that makes the pupils capable of – working with numbers and algebra – calculating with fractions e.g. in connection with solving equations and algebraic problems. (Common Goals 2009, p. 9, translation by the author)

And later in a paragraph about how to achieve the aims:

> The pupils still develop methods of calculation to increase their number comprehension. In this course plan focus is on developing methods on arithmetic with fractions, calculation of percentages and solving equations. The work includes mental arithmetic, arithmetic with written notes and use of a calculator.
>
> Fractions are applied in contexts that occur naturally. Arithmetic of fractions is adapted considering the use when solving equations and other algebraic themes. (Common Goals, p. 26, translation by the author)

It appears from the quotation from Common Goals 2009 that aims and terms about how to achieve the aims are formulated in very open phrases. Pupils must learn how to calculate with fractions but the curriculum does not frame in details to what extent. The example of a task chosen above, $\frac{1}{6} + \frac{3}{4}$, will probably be considered included in the latter quotation above (Common Goals 2009, p. 26) and similar examples can be found in every text book for lower secondary school and exam questions after 9th grade. Therefore, the task is appropriate for teaching in lower secondary school. It is evident from the quotation above that the general task, $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$, is not a part of the mathematical content in lower secondary school.

The pupils are supposed to *develop methods of calculation*, in this case addition of fractions. This means that choosing and developing methods (technique) depends on the individual pupil even though the methods of course to some extent has to be informal examples more or less similar to more formal methods. Pupils can – and this is often appropriate – choose different methods for different tasks and they do not necessarily have to combine the different methods. The choice of technique depends on the *milieu* (Winsløw, 2015) often chosen by the teacher. Common Goals 2009 demand that "*the work includes mental arithmetic, arithmetic with written notes and use of calculator"* (Common Goals 2009, p 26). It is, to some extent, up to the teacher and the individual pupil together to decide e.g. whether the pupil shall use a calculator or written notes to a given task. It is obvious that this choice determines the potential learning outcome.

Formulations on technology in the curriculum are also very open. The thought behind *pupils developing methods* is that they are supposed to justify and frame explanations to their methods, even though the degree of consistency is fluctuating. The demands for consistency and precision are, of course, not as high as in scholar mathematics but through a generalisation of the technology the pupils will optimise their techniques without necessarily ending out with formulations similar to the scholar mathematics but as precise and consistent as possible for the pupil in the given situation.

Theory is mostly described in informal terms as *reasoning* and *argumentation* in Common Goals 2009 – mathematical proofs are only mentioned in a very few cases. It is up to the teacher to decide to what extent the individual elements of the technology are linked, in order to create a common theory based on the individual pupil and the class. Mixed-ability classes can achieve different depths in their theoretical way of thinking.

Addition of fractions can also be described and analysed with the 4T-model from an academic perspective. This includes well-known questions like: W*hat is addition? What is rational numbers?* Etc. and definition of algebraic structures including groups and number fields, the compositions +

and · and proves of theorems like ($\mathbb{Q}$, +, ·) *is a number field.* This will not be elaborated further in this paper.

The two praxeologies in the right side of the model (see figure 1), *knowledge actually taught* and *knowledge actually learnt*, are concerning teaching practice and must be examined and described using the 4T-model by the student teachers in the teaching practice – the former by descriptions of observations of the teacher and the latter by interviews of e.g. pupils, description of pupils based on observations and/or assessments. These two praxeologies are very often based on descriptions from the teaching practice made by the student teachers – this will not be exemplified here.

The descriptions and analysis of the addition of rational numbers from the four perspectives (the four kinds of knowledge) in the didactical transposition, states a REM to plan, teach and evaluate lessons but also to develop and improve education in general. After describing and analysing different elements in mathematics teacher education by the 4T-model similar elements or blocks in different kinds of mathematical knowledge can be compared e.g. technology in scholar mathematics can be compared with technology in knowledge actually learnt and techniques in knowledge actually taught can be compared with techniques in knowledge meant to be taught. The comparisons do not always have to go from left to the right in the didactic transposition model (figure 1) – observations from teaching practice as e.g. the theory block in knowledge actually learnt can be used to problematize the knowledge meant to be taught in the curriculum.

5. A model of mathematical teacher education

The ATD provides a framework for analysing the theory-practice problem in mathematics teacher education. The two models of Chevallard for didactic transposition process (figure 1) and for the notion of praxeology (figure 2) is combined in this section to form a model for analysing the theory-practice problem in teacher education (figure 3). In my research (a Ph.D. project) the model is intended to be used both descriptively as an analytical tool and normatively as a basis for designing course of lessons in teacher education. At first, the model will be used to design and analyse a study based on interviews of student teachers about how they regard the coherence between theory and practice in teacher education.

Subsequently, the analysis will be followed by proposals of new ways to organise teaching practice, preparatory education and the theoretical education at the university college to improve the coherence between theory and practice in teacher education.

The model (see figure 3) is based on the didactic transposition in schools. As previously mentioned there is a didactic transposition in teacher education as well but the model is constructed to use for student teachers together with teacher educators to describe and analyse the didactic transpositions in schools as this problem area – as I see it – includes all parts of relevant mathematical teacher knowledge.

The model consists of four columns containing the four kinds of knowledge in the didactic transposition. Each kind of knowledge is described by a mathematical and a didactic praxeology. By collocating the model and teacher education practice three different, pivotal theory-practice problems can be located – occurring in different forms. In the model, the three theory-practice problems in mathematics teacher education are emphasised by red axes – two vertical and one horizontal axis.

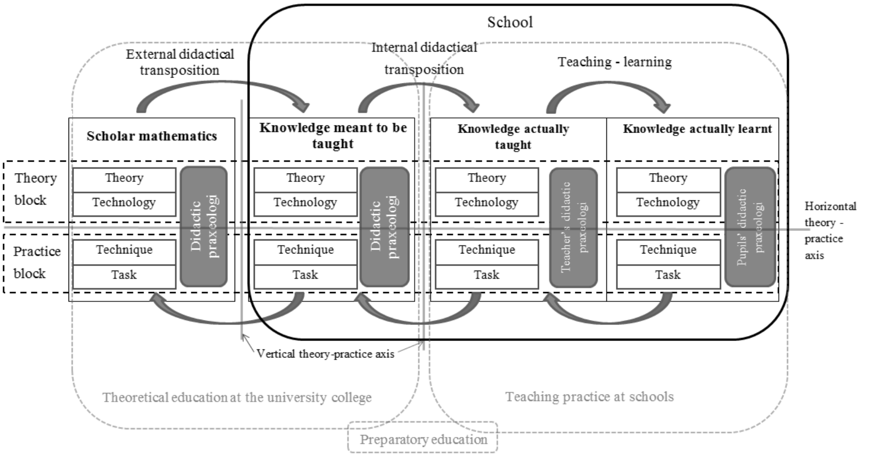


Figure 3. Teacher education model.

The horizontal axis is dividing the practice block and the theory block. This axis stresses the divide between practical, procedural mathematics with emphasis on techniques to carry out tasks and theoretically *doing mathematics* by combining techniques and concepts, arguing, proving, etc. The transcendence of this barrier is a crucial point for mathematical education – the higher level of abstraction in the theoretical block is a necessity but also a very difficult barrier to almost all pupils. Consequently, this axis is a significant problem area for teacher education both with regard to students learning scholar mathematics and pupils learning mathematics at school and the relation between practice and theory block is an appropriate model in both cases.

The two vertical theory-practice axes are dividing, respectively, the scholar mathematics and knowledge meant to be taught and knowledge meant to be taught and knowledge actually taught. The divide in the first axis is treated at the university college. Comparison of scholar mathematics and knowledge meant to be taught is again highly relevant in teacher education to analyse what and why specific content is or is not selected for the curriculum. It is pivotal for student teachers to be critical to this selection and to question the decisions in the curriculum or textbooks. The arrow at the base of the model pointing “back” from knowledge meant to be taught to scholar mathematics stresses that knowledge meant to be taught can be taken as a starting point for an analysis of a scholar mathematical topic as illustrated in the example in the previous section.

The latter of the vertical axes is dividing the theoretical education taking place at the university college and teaching practice at schools. To combine these two, university colleges often organise preparatory education as a special forum. Selecting knowledge actually taught from knowledge meant to be taught is everyday work for teachers and thus obvious content in mathematical teacher education. Again, the arrow is pointing both ways stressing that it is fruitful to move the opposite way and analyse mathematical meant to be taught on the basis of student teachers observations or descriptions of mathematical actually taught or actually learnt in teaching practice.

The two columns to the right are a little different compared to the other kind of knowledge. The relation between knowledge actually taught and knowledge actually learnt cannot offhand be described as a theory-practice problem. As the transposition takes place inside school, it is a part of the internal transposition but knowledge actually taught and knowledge actually learnt are closer connected and appears in a more direct interrelationship than the other kinds of knowledge. Student teachers are supposed to react to pupils' communication and learning e.g. during a dialogue in the classroom and adapt the teaching to the individual pupil or the specific class. Knowledge actually taught and knowledge actually learnt can be theoretically analysed separately but are in practice intertwined. In the model, the two are therefore not separated but has a common borderline.

The model describes teacher knowledge and teacher education and can be used by both teachers and researchers in teacher education. Furthermore, the model can be used both descriptively, as shown in the previous section, as a tool to describe e.g. the coherence between the scholar mathematics and the knowledge meant to be taught and normatively, for instance as a tool to relate assessment explicitly to knowledge meant to be taught or scholar mathematics to examine if the underlying reason to teach a given content knowledge can be traced in the assessment.

6. Conclusion

A model to correlate theory and practice in teacher education is built on the basis of the anthropological theory of the didactic. Each of the four kinds of mathematical knowledge: scholar mathematics, knowledge meant to be taught, knowledge actually taught and knowledge actually learnt, can be described and analysed by the notion of mathematical praxeologies and didactic praxeologies. By using the same notion in the four different cases student teachers, teachers at university colleges and researchers will be provided a tool to analyse and compare the four praxeologies and thus analyse and create links between three different theory-practice axes located in teacher education. It is a crucial point that the model has arrows in both directions. The study of practice is supposed to be on the basis of new studies in the two columns to the left at the university college for instance by questioning if the contents of knowledge actually taught and the knowledge actually learnt are appropriate in proportion to the knowledge meant to be taught and the scholar mathematics. Course plans in teacher education do not have to take scholar mathematics as starting point – all four columns can be starting points of an analysis or a course plan.

References

Barbé, J., Bosch, M., Espinoza, L. & Gascón, J. (2005). Didactic restrictions on the teacher's practice: The case of limits of functions in Spanish high schools. *Educational Studies in Mathematics, 59*(1-3), 235-268.

Bergsten, C. & Grevholm, B. (2005). *The didactic divide and educational change.* Paper presented at the 15th conference ICMI Study on the Professional Education and Development of Teachers of Machematics, Águas de Lindóia, Brazil. http://stwww.weizmann.ac.il/g-math/icmi/log_in.html.

Bergsten, C., Grevholm, B. & Favilli, F. (2009). Learning to teach mathematics: Expanding the role of practicum as an integrated part of a teacher education programme. In R. Even & D. Ball (Eds.), *The professional education and development of teachers of mathematics. The 15th ICMI Study* (pp. 57-70). New York, NY: Springer.

Bosch, M. & Gascón, J. (2006). Twenty-five years of the didactic transposition. *ICMI Bulletin, 58*, 51-65.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques, 19*(2), 221-266.

Chevallard, Y. (2015). Teaching mathematics in tomorrow's society: A case for an oncoming counter paradigm. In S. J. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 173-187). Springer.

Common Goals 2009. The author's translation from *Fælles Mål 2009.* Copenhagen: Undervisningsministeriet.

Jaworski, B. (2003). Research practice into/influencing mathematics teaching and learning development: Towards a theoretical framework based on co-learning partnerships. *Educational Studies in Mathematics, 54*(2), 249-282.

Jensen, T., Kamstrup, A. & Haselmann, S. (2008). *Professionsbacheloruddannelserne – De studerendes vurdering af studiemiljø, studieformer og motivation for at gennemføre.* Copenhagen: AKF. http://www.akf.dk/udgivelser/2008/pdf/professionsbacheloruddannelserne.pdf/

Madsen, L. M. & Winsløw, C. (2009). Relations between teaching and research in physical geography and mathematics at research-intensive universities. *International Journal of Science and Mathematics Education, 7,* 741-763.

Sculman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-23.

Skott, J. (2001). The emerging practices of a novice teacher: The roles of his school mathematical images. *Journal of Mathematics Teacher Education, 4*(1), 3-28.

Stigler, J.W. & Hiebert, J. (2009). Closing the Teaching Gap. *Phi Delta Kappan*, *91*(3), 32-37.

Tatto, M. T., Lerman, S. & Novotná, J. (2009). Overview of teacher education systems across the world. In R. Even & D. Ball (Eds.), *The professional education and development of teachers of mathematics. The 15th ICMI Study* (pp. 15-23). New York, NY: Springer.

Winsløw, C. (2009). First years of teaching. In R. Even & D. Ball (Eds.), *The professional education and development of teachers of mathematics. The 15th ICMI Study* (pp. 93-101). New York, NY: Springer.

Winsløw, C. (2011). Anthropological theory of didactic phenomena: Some examples and principles of its use in the study of mathematics education. In M. Bosch et al. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 117-138). Barcelona, Spain: CRM.

Winsløw, C. (2015). Mathematics at university: The anthropological approach. In S. J. Cho (Ed.), *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 859-875). Springer.

A layered model of didactic codetermination in science teacher education - institutional conditions and constraints when planning multidisciplinary teaching of energy topics

Klaus Rasmussen

University of Copenhagen & Metropolitan University College

Resumen. En este trabajo se investiga la interacción institucional en el desarrollo de una formación multidisciplinar de profesores de ciencias. Se ha elegido el caso de los temas sobre energía para iluminar cómo un modelo ampliado de cogestión didáctica puede ser utilizado para analizar las interacciones entre las diferentes disciplinas y entre las diferentes capas de las instituciones. Las instituciones que se consideran son los institutos de primer ciclo de secundaria, los centros de formación de profesores y las universidades, ya que todas participan en la planificación de un programa experimental de formación de profesores. Se pone el énfasis en los puntos de vista de estas instituciones y se describen las influencias entre disciplinas y las otras instituciones según un modelo de referencia propio sobre «energía».

Résumé. Cet article étudie l'interaction entre les institutions lors de l'élaboration d'une formation pluridisciplinaire d'enseignants de sciences. Nous prenons le cas de l'enseignement de thèmes sur l'énergie pour éclairer l'utilisation d'un modèle élargi de l'échelle de codétermination didactique lors de l'analyse des interactions entre les différentes disciplines et les différents niveaux institutionnels. Les institutions considérées sont les écoles secondaires, les instituts de formation des professeurs et les universités, en tant qu'elles participent à la planification d'un programme expérimental de formation des enseignants. L'attention est portée sur les points de vue de ces institutions, alors que les influences entre disciplines et les autres institutions sont décrites selon un modèle de référence élaboré au sujet de « l'énergie », également proposé dans cette étude.

Abstract. This paper investigates the institutional interplay when developing a multidisciplinary science teacher education. The teaching of energy topics is used as a case to illuminate how an expanded model of didactic codetermination can be used to analyse interactions among different disciplines and among different layers of institutions. The considered institutions are lower secondary schools, teacher colleges and universities, as they partake in the planning of an experimental teacher education programme. Special emphasis is given to views held by these institutions, and influences between disciplines and the other institutions are described according to an elaborate reference model regarding "energy".

IVe congrès international sur la TAD (Toulouse, 21-26 avril 2013)

Axe 4. *Apports de la TAD à l'enseignement et à la diffusion des connaissances*

Rasmussen, K. (2017). A layered model of didactic codetermination in science teacher education - institutional conditions and constraints when planning multidisciplinary teaching of energy topics. Dans G. Cirade et al. (Éds), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* (pp. 919-939). https://citad4.sciencesconf.org

1. Introduction

Schools across the world currently organise the "things" societies want its young members to learn into "compartments" called disciplines. This principle makes a lot of practical and historical sense, but it also creates significant challenges for education when the "things" do not fall directly within the established boundaries. This paper reports from the planning phase of an experimental teacher education, which seeks to turn these challenges into opportunities.

To appreciate the challenges one may refer to Chevallard (2015) who in his regular lecture at ICMI-12, speaks of the need to shift from a paradigm of monumentalised knowledge to a paradigm of questioning the world. In the present paradigm a teacher develops a lesson in a dialectic process between ideas, questions and desires, on the one hand, while doing a constant matching to fit a given discipline on the other. This is not bad per se, but it is somewhat artificial. There is a substantial risk that the questions become artificial. They become artificial questions that are defined and characterised by what will be suitable for the acquisition of the monumentalised knowledge of the discipline. Disciplines can thus act as a severe constraint to the true inquiry into the questions that are the *raison d'être* for wanting to become knowledgeable. In the present world of compartmentalised knowledge, it becomes novel to allow searching for answers inside more than one discipline, and so ideas named "multidisciplinary", "interdisciplinary" or "integrated" education are born. In this paper I shall mainly use the term *multidisciplinary*, but otherwise not distinguish between the different terms. I shall investigate how contributions from different disciplines interact to ameliorate or loosen the constraints that the very same disciplines impose. I will expand upon the scale of didactic codetermination and take into account the fact that same-name disciplines live in different institutions that also shape them. This gives rise to an enlarged codetermination scale that "propagates in three dimensions", as will be explained in the theory section.

The main part of this paper is an analysis of the institutional interplay as it is envisaged in the *development* of an experimental Danish teacher education program, where the curriculum has been developed jointly by actors from three different institutional layers. Essential to the program is the aim to teach disciplinary knowledge in multidisciplinary settings, thereby focusing on common issues to take advantage of each disciplinary perspective and capitalise on the synergy between them. To ground the analysis I have chosen to look specifically at one of the bi-disciplinary modules of the program: "Energy and Climate", which seeks to combine physics (and chemistry) with geography. I will use the topic "energy" as a fulcrum for investigations into the views valued at each institutional layer about the teaching related to this topic. The "energy-topic" is extensively studied in didactic literature, which enables me to build a detailed and concrete reference model of the views held by the institutional actors. The choice of "energy" is motivated by the fact that it possesses an inherent multidisciplinary character (Wijnsma, 2009) and, furthermore, it can be traced at all the layers of the Danish educational system under consideration in this investigation.

2. Theory and research question

2.1. The expanded model of codetermination

I propose to use the scale of didactic codetermination (Chevallard, 2005) as the basis for a model of the complex determinations of multidisciplinary teacher education. I will consider an education multidisciplinary when two or more disciplines are brought together to be taught as a coherent whole. How the integration takes place depends on many issues inside the respective disciplinary ecologies. These ecologies live in institutional contexts, meaning that a discipline is not the same at e.g. primary schools, as it is at research universities (to take an extreme example). Varying institutions emphasises different aspects of a discipline as important. (Bosch & Gascón, 2006) This happens to such an extent that one might regard chosen institutional preferences as being constitutive of unique disciplines in their own right. I will capture this essential feature and the integration between disciplines in an expanded version of the codetermination scale (see figure 1).

The usual levels of the scale are placed on the vertical axis of a three-dimensional coordinate system; the extra disciplines are joined in along the horizontal axis and the extra institutional layers along an axis into the depth. This model allows for description and comparison of disciplinary ecologies across institutions, as well as across multiple disciplines. One can theoretically imagine influences that, figuratively, go diagonally in this model, e.g. from the level of school in one disciplinary ecology at layer 3 to the theme level of another discipline at layer 1. In figure 1, I have taken the discipline level as the level that defines the ecologies, but, of course, any level could be used as focus to characterise the interaction one wants to emphasise.

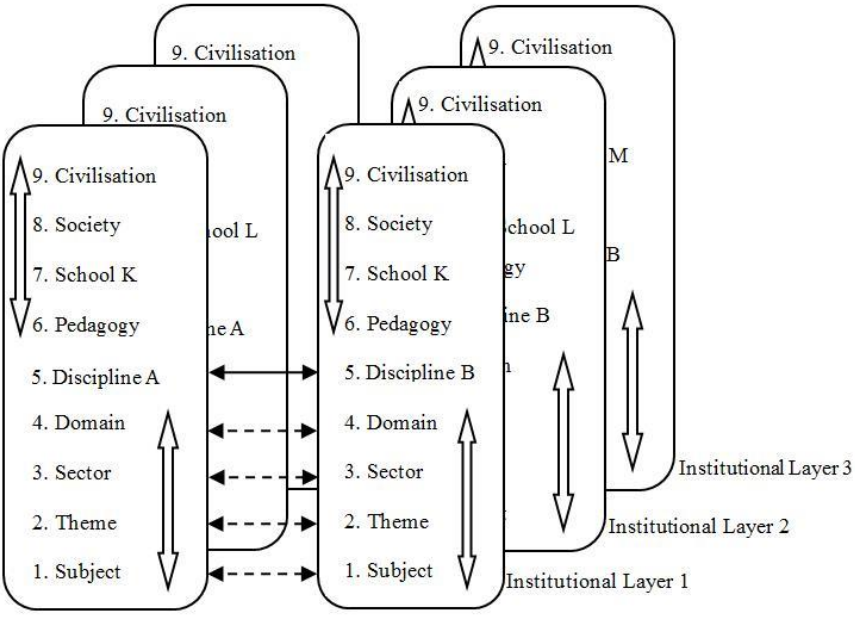


Figure 1. A layered model of co-determination for a bi-disciplinary ecology and three layers of institutional settings. (Note that while a discipline may carry the same name on each layer, the contents are not necessarily the same.)

While the above stated model can be used for any chosen number of institutions, I will only look at influences among three layers with pre-service teacher education as the central one. (See also the section on the context for this study, below.) Pre-service teacher education belongs to an institutional layer “between” the one where a discipline is taught (usually primary and secondary schools), and the one where the discipline is scientifically developed (usually universities). The disciplines may carry the *same name* on all three layers, but each layer has different priorities. This brings us to the main research question: *How to characterise the nature of integration between the disciplines in a teacher education institution, as it is* *influenced by the university layer and the lower secondary school layer*. The institutional layer of teacher education is in a field of tension (Elstad, 2010), where it is difficult to follow the paths of influences although everybody may agree that they exist. The tension is, among other things, seen in the form of continuous debate about how “academic” teacher education should be: How much of the time should teacher educators allocate to research and dissemination thereof? How much time to allocate to teach methods and practicalities of the teacher profession? There is a tendency to view theory and praxis as a dichotomy (Rodriguez, 1993), and this has been increasing over the past years, at least in the Danish context (Jensen, 2010). Therefore it is pertinent to employ the anthropological approach, which emphasises the strong connection between theory and praxis of knowledge.

2.2. A reference epistemological model regarding “energy”

The investigation into the institutional interplay revolves around the *topic* “Energy” (as mentioned in the introduction). I will situate “energy” on the sector level of the model proposed above, while recognizing that it could be placed differently with regard to each scientific discipline or domain: The topic has meanings when expressed in ordinary, everyday language (Watts, 1983) as well as more specific meaning when used in the different sciences. Its widespread use gives it meaning as a concept in itself as well as part of procedures and in judgement of value (e.g. there is a value judgement in “energy from fossil fuels are bad”). The literature is abundant with papers regarding research into the teaching of “energy” (Kurnaz & Calik, 2009 provide a review of the field). This abundance makes it possible to approach a reference model, and I will use Doménech et al. (2007) who give a detailed account of teaching issues regarding “energy” seen in its scientific, technological, societal and environmental aspects. Doménech et al. (2007) also review large parts of the pertinent educational research, and I will use that as a basis for establishing the reference model in the ATD terms (Bosch & Gascón, 2006). The reference model is needed to explicitly state the way the researcher looks at a certain didactical problem and to detach *the study* from institutional determinations. In this paper I am interested in how the didactical challenges of teaching “energy” in a bi-disciplinary context can be used to highlight the institutional conditions and constraints. I will hypothesise that "energy-teaching" can be characterised by three *grand types of tasks* and their associated praxeological organisation, but for simplicity I shall only refer to them by the central character of the task. These task types are not mutually exclusive but, as we shall see below, they cover a continuum of questions about energy from the most fundamental and basic e.g. "What is it?" to the most diverse and complex e.g. "How does the flow of energy influence the Earths ecosystem"

The first grand type of task is related to the *conceptual* and *procedural* aspects of "energy" or what could more colloquially be deemed the "pure science"-part of energy-topics. Praxeologies in this category are concerned with the nature of "energy" and its epistemological status: Is it to be seen as a substance, a fluid, or a capacity to do work? Tasks of this type often involve calculations of, and use of, different "forms" of energy: kinetic and potential energy, chemical energy, thermal energy, electromagnetic energy, nuclear energy, etc. Conservation of the quantity "energy" is central to tasks of this type:

> There is a fact, or if you wish, a law, governing all natural phenomena that are known to date. There is no known exception to this law—it is exact so far as we know. The law is called the conservation of energy. It states that there is a certain quantity, which we call energy, that does not change in the manifold changes which nature undergoes. That is a most abstract idea, because it is a mathematical principle; it says that there is a numerical quantity which does not change when something happens. It is not a description of a mechanism, or anything concrete; it is just a strange fact that we can calculate some number and when we finish watching nature go through her tricks and calculate the number again, it is the same. (Feynman, Leighton & Sands, 1963, p. 1, chapter 4)

An example praxeology connected to this first type of task can be taken from Van Huis and van den Berg (1999, pp. 147-148), where a simple electrical circuit consisting of a battery connected to a small lamp is considered. The task *T* is to identify the boundaries of the system, and give the energy-budget equation as derived from the first law of thermodynamics. The first law states that the difference between the sum of input and output energies of a system equals the change in internal energy. In the case where we take the battery and the lamp as the system, the lamp delivers heat (Q) and light

($U_{radiation}$) to its surroundings by decreasing the energy that is chemically stored in the battery. The equation becomes: $0 - (Q + U_{radiation}) = \Delta U_{chem}$. It is clear that this type of task is strongly co-defined by the technique τ: Define the system and assign suitable "forms" of energy to the right places of the equation. The technology θ involves the conservation principle and the discourse associated with energy-"forms". The overarching theory Θ is thermodynamics. (Note that the use of heat and radiation as forms of energy is strongly contested (Doménech et al., 2007, p. 54), which I will elaborate in the next section.)

The *second grand type of task* is related to the *transfer* and *harnessing* of energy. Central to these tasks is the transformation between different forms, or qualities, of energy. The exchanges use mechanisms called "work", "heat", "radiation" etc., which are not themselves considered, "forms of energy". The tasks can be considered to belong to a "technology- or engineering"-part of the energy topic, with an emphasis on the utilisation of differences in energy distribution. (Note here that the mentioned "technology" is not in the ATD sense.) Entropy becomes an important construct in the theories associated with these tasks. Examples in the category ranges from qualitative considerations of energy exchange to quantitative calculations of combustion processes at fossil fuel power plants. A task of the qualitative kind, which is also somewhat close the first grand type, can be found in Kurnaz and Arslan (2009, p. 78), figure 2.

Q4. The velocity of an object moving on a straight line under the influence of a single force, changes as in the velocity versus time graph. Tell the sign (+ or -) of the work done on the object by the force for each interval (AB, BC, CD and DE) and explain the reasons.

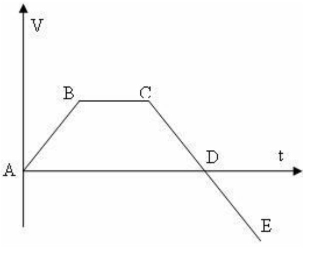


Figure 2. Example of second type task, with close relations to first type tasks.

This question can be solved using at least two different techniques: τ_1 Using the fact that the change in velocity determines the acceleration, and thereby the force and the work (Utilising Newton 2. law and the equation: $E = F \cdot \Delta s$, where F is the force and Δs is the displacement) When the work done by the force on the object is positive, it means that energy is transferred to the object, and vice versa. Another technique, τ_2, is to consider more directly the velocity as a function of the kinetic energy of the object. If the velocity increases, the kinetic energy increases (and by the work-energy theorem, the work done on the object must have been positive). The technology θ associated with the two techniques involves a discourse in which work is seen as a mode of transfer between forms of energy, and mechanics of rigid objects provides the theory Θ, otherwise there would not have been such a direct link between work and kinetic energy (Jewett Jr, 2008).

The *third grand type* is related to the *human "use"* of the harnessed energy and the *challenges* it leads to. Environmental issues are central to these tasks, and they can be understood as representing a "society-related"-part of the energy topic. The focus is removed from energy as something that is transformed. Instead energy is referred to as something produced (e.g. by wind mills), and transported (in the power grid) to where it is consumed by some artefact under human control. Energy can be in "short supply", it can be "saved" and the energy efficiency of devices can be poor. Energy can be "carried" by different substances, some of them problematic, others convenient according to the use (e.g. fuel or electricity to power cars). Tasks in this category very often include the axiological component of energy usage, and quickly take the investigation outside a single discipline, and particularly outside the disciplines of science. Questions leading to tasks of this type are usually quite broad, e.g. like in Pearce and Russill (2005) where it is asked: How to address global climate destabilisation by encouraging the use of compact fluorescent light bulbs? This quickly leads to value judgements about one kind of light bulb compared to other kinds of light sources. The invention or development of energy-efficient lighting is indeed a response to societal needs. It may help solve CO_2 emission problems, but does it just create a mercury pollution problem instead? There are also environmental issues to consider including in the teaching of the energy-topic. It is clear that different disciplines will find different aspects of such an overall question more relevant to consider in teaching than others. How do such bulbs function? What is the quality of the light they emit? Why should you buy them, when they are more expensive than ordinary bulbs? These "derived" questions co-define the disciplinary interest, and the discipline's "ability" to answer it.

3. Context for this study

In this section I describe the teacher education layer as situated between its closest related layers of institutions. With reference to figure 3, I place teacher education on layer 2, where it is “sandwiched” between lower secondary education (layer 1) and the universities in charge of tertiary education (layer 3). Danish teacher education takes place at institutions called “University Colleges” (hereafter abbreviated UC) which operate *administratively* independently of the two other layers. Each layer has its own ministerial regulations, and serves different needs of the society. To become a teacher in lower secondary schools, students usually attend 9 years in primary and secondary school, 3 years high school and 4 years at a UC.

Students at UCs usually acquire competence to teach three disciplines in lower secondary school, and in this paper only two disciplines are considered: “Physics/Chemistry” and “Geography” which carry the same name on layer 1 and 2. “Physics [slash] Chemistry” is the name for a single discipline found only in lower secondary school and the UCs, and it covers a mix of physics and chemistry topics. I will specifically investigate how these two disciplines interact in the teaching module: “Energy and Climate” which was one of six bi-disciplinary modules developed as part of the Advanced Science Teacher Education project (ASTE-project) initiated in 2012 in Copenhagen.

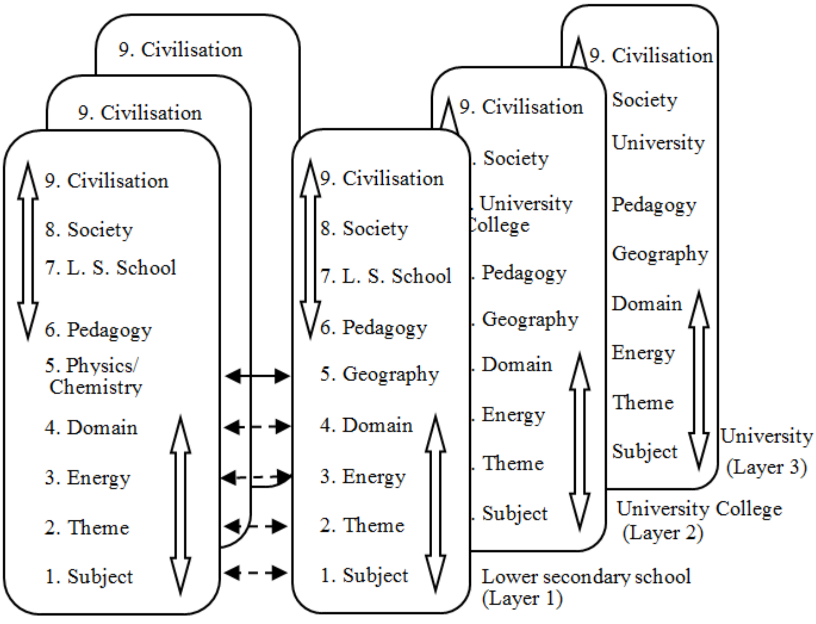


Figure 3. Model of the considered disciplinary ecologies.

The ASTE-project was set up to run an experimental teacher education program attempting to teach mayor parts of the disciplines of science and mathematics as a coherent whole [1.] The project is partially funded by the Lundbeck Foundation, a foundation that sponsors educational initiatives in the fields of the sciences. Funds from the foundation cover the development project, whereas the ordinary governmental subsidies that "follow" the students are used to run the education itself. The educational program is planned by a consortium consisting of the University of Copenhagen, University of Aarhus, University College UCC and the Metropolitan University College all represented in the "ASTE Steering Committee" which runs the daily affairs of the development project. In addition four lower secondary schools participate as practicum schools, and although they are not intimately involved in the development process, they do take part in some meetings where the experimental program is discussed. In the Danish teacher education context, the program is novel in trying to integrate disciplines in a substantial and systematic way, and in attempting to develop

1. Approximately 30% of the workload, according to the application for external funding. (Goldbech, Vestager, Aarby, Winsløw & Benjaminsen, 2011)

the program in more or less close collaboration between lower secondary schools, university colleges and universities (i.e. between the tree layers of the model). It is, furthermore, an innovation of the program to split the teaching of individual disciplines into smaller modules. It should be noted that the actual teaching in the program is to be done by educators from the university colleges, who therefore occupy a central role in the project, and as a consequence also in this study.

4. Methods

The data gathered for this study comes in the form of audio recordings of an extensive number of meetings from the planning of the ASTE-project. These recordings were inventoried and time indexed for reference. Written materials produced by working groups were collected, comprising drafts of curricula and electronic presentations, as well as selected e-mail correspondence. Written documents also include applications for funding and ministerial approval. Quotations used in this paper are translated from Danish by the author. To supplement the above primary data sources, two separate interviews were undertaken. One with a representative from the ASTE Steering Committee and one with a University College professor who were closely involved in the making of the “Energy and Climate”-module. The interviews were semi-structured and involved a direct consideration of the examples of grand task types shown in the exposition of the reference model. This was done to structure the interviews so that they would reveal the developer vision in more depth than could be expected from an overall discussion that was not grounded in concrete ideas for teaching.

5. Results and data analysis

I begin the analysis from the upper levels of codetermination, working my way down towards the more specific implications for teaching. The intended interactions between the institutional layers are evident from the onset of the ASTE-project, as can be seen explicitly in the funding application to the Lundbeck Foundation:

> The development of the teacher education programme will be done in close collaboration between the university colleges and the relevant departments of participating universities. This will involve taking advantage of the strong

> research communities and facilities available at the universities and combining them with the experience and expertise of the university colleges to create a unique teacher education.
> The university colleges provide the brunt of the teacher education and in-service training while university science and math educators offer specific courses and excursions to both in-service teachers and teacher students. (Goldbech et al., 2011, p. 8)

This is interaction codified at the school-level of the codetermination scale. It is in its nature a general, formal statement of intention to build something together “across” the layers. There is even the idea to have educators from the university offer courses directly to teacher students. This was later made impossible due to influences from the society level:

> The ministry would not give the ASTE project permission to run its educational program if it were not exclusively UC educators that conducted the actual teaching of the students (Personal communication with ASTE Steering Committee Member, December 18th 2012)

Therefore I can see a certain disparity between the two major collaborators, where those from the UCs have the primary educative role and those from the universities act more as consultants:

> It is basically a consultancy service which has to be utilised precisely and best possible (ASTE Steering Committee member, Developers Meeting, June 18th 2012, Audio time index: 6:50-6:55)

Looking again to the level above school, I note further constraints on the educational program that influenced the project directly by ministerial decree at the society level; the consortium wanted to run the experiment twice (i.e. two batches of students starting one year apart.) This was refused, as was a request to have the governmental subsidies released in small portions as each teaching module was concluded. This later fact generated rather severe constraints on the way each teaching module would be *assessed*, which meant for the “Energy and Climate” module that a written report should be handed in by the students, only to be evaluated at a much later time.

> It has most certainly had influence on the structure of the educational program, that there has been speculation in the release of subsidies (Interview

> with ASTE Steering Committee member, December 2012, Audio time index 13:49-13:55)

The structure and especially tests and examinations are known to condition even the most concrete teaching on the subject-level. (Cheng, 2000)

Given that the collaboration between the UC and university layer, as we have seen above, had to be less prominent in the actual running of the educational program, I now turn to the collaboration in the curriculum development process. In the case of the “Energy and Climate”-module, it did not always run smoothly:

> With risk of stepping on somebody’s toes, I have yet to experience in the ASTE-collaboration, that the university people have been able to contribute anything new. On the contrary we have used time to inform them of the conditions, constraints and praxis of teacher education, and the same goes for lower secondary education. This is, in my opinion, a waste of time, considering that they are not going to teach the modules of this program… therefore it is of outmost importance that it is made explicit what roles each partner has in this collaboration, and that the tasks and obligations we each get, are dependent on the unique competencies each has to offer. (UC collaborator to ASTE Steering Committee, email correspondence, June 12th)

Tension between collaborators is perhaps not surprising, but it testifies to a divide between the layers which gives credence to the underlying theoretical assumption that education is indeed strongly institutionally situated. It is also an expression of the field of tension (mentioned in the theory section above) that becomes apparent when the different layers are brought together.

Moving down the hierarchy of levels I find in the funding application more specific reference to the bi-disciplinary teaching modules, in particular one that refers to teaching of energy topics:

> For the program we intend to develop the following interdisciplinary courses:
> – Teaching energy and *energy supply* – covers main subject areas of geography, physics, chemistry and pedagogical subjects
>
> (Goldbech et al., 2011, p. 6, my italics)

In this is seen an explicit mentioning of teaching issues related to the third grand type of tasks, i.e. “energy *supply*” The headline for the module changed when the Ministry of Education was petitioned to allow the experimental program to run, there it was called: “Energy and Resources, Climate” and finally it ended up as “Energy and Climate” in the developed curriculum(ASTE-Project-Group, 2012) The change of headline were regarded to be caused by changes in the composition of people in the working groups and their emphasis on different curricular items from the ordinary (mono-disciplinary) curriculum:

> There is no doubt that the thing about the changing headlines is because different persons get them in their hands and try to assign meaning to them. (Interview with ASTE Steering Committee Member, December 18th 2012, audio time index: 26:10-26:20)

Anyway the final document is a direct enlargement of the former giving more description regarding goals, contents and working methods. It is clear from the “justification” given for the module, stated in both versions of the curriculum draft, that this new module is created by joining at the discipline level. Both original disciplines, from ordinary teacher education, are explicitly mentioned, and I note that they occupy positions on each end of the continuum presented in the reference model, which can also be corroborated from other sources:

> Physics/Chemistry supports Geography through introduction to, and understanding of an assortment of fundamental disciplinary concepts and practical methods. Geography supports Physics/Chemistry through concrete examples of the use of physics and chemistry outside the boundaries of lower secondary school, and through perspectives regarding other scientific views, specifically human-geography views.
> (Energy and Climate - introduction to the bi-disciplinarity of the module, presentation by the UC developers, June 18th 2012)

Physics/chemistry contributes focus on the first grand type of tasks, whereas geography has focus on the third grand type.

Looking below the discipline level I note the developer’s intention to foster their students’ interest in the sciences by using key questions of the type proposed by Wolfgang Klafki (i.e., “epochaltypische schlüsselprobleme”) (Klafki, 1994). This can be seen as originating on the pedagogy level, but it has direct consequences on the theme level:

> Immediately I could imagine starting by showing [the students] something, perhaps not exactly this movie, but nevertheless: Al Gore's "An Inconvenient Truth". Start with it and say: "Okay, what is this about, where does it come from" Or show them the first papers by Henrik Svendsmark about sunspot theories … something that provoked them; you could also put forward a conflict of interests. (Interview with UC developer, December 18th 2012, Time index 18:14-18:58)

While this influence from pedagogy to theme level originates inside ecologies at the same layer, there is a vision by the developers to use external "milieus" for pre-service teacher learning to a greater extent, which is directly influenced by the cooperation with the university layer (here regarded not as an educational institution, but as a research institution):

> we have written in … [Energy and Climate], that we will use external milieus for learning - and we would very much like to get out and see laboratory facilities, out hearing[sic], meeting the milieu, with the pre-service teachers. (UC collaborator, Developers Meeting, June 18th 2012, Audio time index: 19:53-20:04)

This is to be done as part of actual teaching activities (not just extra-curricular informal visits or the like of that), which places this as an influence from the school level of the university layer to the subject level of the UC layer. The pre-service teachers have to meet "ordinary" scientists, know and talk to people "doing science" in order to be able to convey the study of science as a real educational possibility to lower secondary school pupils:

> If they [pre-service teachers] also think: "that is one weird scientist", then they have a very hard time motivating the pupils. (UC collaborator, Developers Meeting, June 18th 2012, Audio time index: 20:49-20:55).

Turning the attention to perspectives on "energy"-topics as perceived by the different UC-disciplines, I can showcase the way the UC-layer perceives teaching on the two adjacent layers. The "Energy and climate"-module has three mandatory curricular items that explicitly mention energy, and they are all carried over from the official (ordinary) teacher education curriculum:

– Physical geographic knowledge, theories and problems, which means physical geographical processes and patterns of distribution as a result og matter- and energy flow in nature

– Energy, energy forms, energy conversion and energy flow

– Resources, energy supply and chemical production

(ASTE Curriculum, Final Version, June 14th 2012, p. 50)

The first is from geography, the two others from physics/chemistry, and I note that the most literally direct overlap is "energy *flow*", interesting because the flow concept has previously been identified as a bridging concept when trying to integrate several disciplines (Wake, 2011). Resources and geographic knowledge goes well together, but only for some kinds of resources, and as seen above, "resources" were at some point taken out of the headline for the module.

When we talk about resources, it can be everything, it can be cobber or water, anything really, and it doesn't necessarily have that much to do with energy … [but it has to do with] which forms of energy *supply* are most relevant, meaning hydropower is relevant in some places, i.e. the geographical placement is very important regarding which energy resources you can utilize. (Interview with UC-developer (physics/chemistry), December 2012, Time index: 1:55-2:55, my *italics*)

This shows how knowledge from the two disciplines is thought to be combined and the quote gives an idea of how that may affect the sector levels and below, to form the essence of bi-disciplinarity (see figure 4):

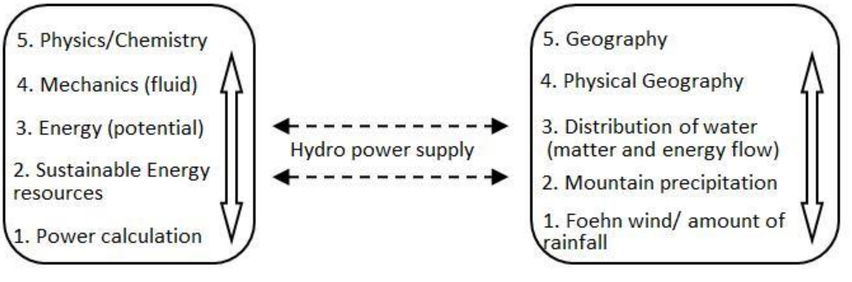


Figure 4. Example of bi-disciplinary interaction inspired by above quotation.

Energy *supply* is central in the above quote, and I note that it alludes mostly to tasks of the third grand type from the reference model. The societal and environmental considerations are at the core of the interaction between the disciplines (indicated by horizontal arrows in figure 3), something which is not readily apparent if you only look at the disciplinary ecologies separately. Furthermore I note that elements of the second grand type of tasks are likely to enter the teaching, but it does not seem that prominent, something which is also reflected in the chosen curricular items, and in the next quote below.

Energy *supply* is believed on the UC layer to be central to teachers at the lower secondary school layer:

> I do know how many of them [lower secondary school teachers] do, at least how some of them do: There is a lot [teaching], which is about how energy is distributed from a power plant, a windmill, to the consumer … Then there is a lot about saving energy, not so much why, but it is something you have to do. And then there is a lot about "playing" with energy - meaning heating something by burning something else, and that kind of thing, … there is not that much teaching of energy as a concept. (Interview with UC-developer (physics/chemistry), December 2012, Time index: 22:47-23:34)

In contrast, the first years of university teaching is regarded as opposite:

> … in teaching it is simply fundamental concepts, now we define kinetic energy, potential energy, mathematically based on the laws of gravity and so on. So there [at the university] you get those very fundamental basic concepts firmly rooted… and you look at entropy and energy of many different forms, but only in their most basic appearance. … It is only later, at rather advanced courses you start looking at it [energy] as part of other things… (Interview with UC-developer (physics/chemistry), December 2012, Time index: 24:00-24:39)

The conclusion is that education at the lower secondary layer is seen as mainly concerned with tasks related to the second and third grand type, whereas the university layer is seen as dealing mostly with the first grand type of task. Both layers are regarded as having some consideration of the second type, but the continuum quality of the reference model does not lend itself to establish a rigid demarcation, at least not from the collected data. Educators at the UC layer perceive themselves as trying to combine the differences that position the two other layers at opposite ends in the reference model.

6. Discussion

Looking closely at institutional interplay is in danger of turning a didactical study into a "history of science education". When one looks at the planning phase of an educational program, as is the case for this study, there is a natural detachment from particular and therefore more easily discernible didactical challenges. This leads the study to consider pre-didactical phenomena whose nature is less concrete than e.g. didactical acts carried out in the classroom. In this way the present study is only looking at one part of a process and it remains to be seen what will actually happen when the "Energy and Climate"-module is executed. Does the actual teaching match up with the intentions?

Furthermore it would improve this study to triangulate the findings with investigations of teaching materials from each of the layers, and expand the interviews in order not to see the interplay between layers and disciplinary ecologies exclusively from the stance of the UC layer.

One can speculate why the second grand type of task do not figure that prominently, and a hypothesis is that Danish teacher education, both regarding educators and pre-service teachers do not recruit from the more technically inclined sections of the educational system, e.g. technical universities and technical upper secondary schools.

A final challenge worth considering in this study is the known difficulty to place science disciplines clearly in the hierarchical structure of didactic codetermination. There is not the same consensus, or perhaps nature of the science disciplines as in mathematics, which introduces a degree of arbitrariness when seeking to be specific about the lower levels of determination. One example is as stated earlier, where to place energy topics at all? I judged it to be on the sector level, but one of the interviewees argued for its placement on the domain level. This is a problematic issue for the model of didactic codetermination.

7. Conclusion

The vision of multidisciplinary science education, which lies behind the planning of the showcased teacher education, can be analysed by tracing influences from one level and layer to another in the expanded model of codetermination. The influences stand out clearly when their investigation is carried out by focusing on one common topic; energy, which is central to both disciplines involved, as well as central to the three institutional layers. The state of research on energy teaching enabled me to build a reference model in the ATD terms which in turn made the focus possible.

It has been argued that the UC layer played the central role in the development of the “Energy and Climate”-module in ASTE and it was apparent that conceptions and opinions of the adjacent disciplines and institutional layers shaped the developers’ vision of envisaged curriculum. The institutional layers are perceived to prefer teaching praxeologies from different parts of a continuum characterised by the grand task types, as described in the reference model. Summarising it roughly, the university layer is seen to prefer the first grand type of tasks, whereas the third grand type is considered prevalent at the lower secondary level. The presented reference model characterises the teaching of energy topics according to conceptual, procedural and axiological aspects, as well as scientific, technological, societal and environmental concerns, where the order in which these aspects and concerns are mentioned, also signifies the continuum of task types.

The planning of the bi-disciplinary “energy and climate”-module in ASTE were primarily influenced by the university college layer. This was due to institutional constraints originating on the society level, constraints that specifically worked against a greater and more direct influence from the university layer. The ecologies of Physics/Chemistry and Geography were planned to support each other at the disciplinary level, by representing a preference of respectively the first and the third types of tasks. The layered model proposed giving tools to analyse how the disciplinary ecologies was thought to interact on the sector level and below, forming through the example of “hydro power supply”, a more concrete picture of how the multidisciplinary interaction is believed to take place due to influences from both levels and layers.

References

ASTE-Project-Group. (2012). *Curriculum of the profile teacher education. Advanced Science Teacher Education (ASTE)* [final version]. http://www.ind.ku.dk/projekter/aste/

Bosch, M. & Gascón, J. (2006). Twenty-five years of the didactic transposition. *ICMI Bulletin, 58*, 51-65.

Cheng, L. (2000). *Washback or backwash: A review of the impact of testing on teaching and learning*. http://www.eric.ed.gov/PDFS/ED442280.pdf

Chevallard, Y. (2005). La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire: transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire. In C. Ducourtioux & P.-L. Hennequin (Eds.), *La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire* (pp. 239-263). Paris: APMEP.

Chevallard, Y. (2015). Teaching mathematics in tomorrow's society: A case for an oncoming counter paradigm. In S. J. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 173-187). Springer.

Doménech, J. L., Gil-Pérez, D., Gras-Martí, A., Guisasola, J., Martínez-Torregrosa, J., Salinas, J. & Vilches, A. (2007). Teaching of energy issues: A debate proposal for a global reorientation. *Science & Education, 16*(1), 43-64.

Elstad, E. (2010). University-based teacher education in the field of tension between the academic world and practical experience in school: A Norwegian case. *European Journal of Teacher Education, 33*(4), 361-374.

Feynman, R. P., Leighton, R. B. & Sands, M. (1963). *The Feynman lectures on Physics* (Vol. I). Reading, MA: Addison-Wesley.

Goldbech, O., Vestager, K., Aarby, J., Winsløw, C. & Benjaminsen, N. (2011). *Advanced science teacher education (ASTE)*. Copenhagen: The Lundbeck Foundation.

Jensen, A. F. (2010). Kritik af den rene praksis (Critique of pure praxis). *Vera, 52*.

Jewett Jr, J. W. (2008). Energy and the confused student IV: A global approach to energy. *The Physics Teacher, 46*(4), 210-217.

Klafki, W. (1994). Schlüsselprobleme als inhaltlicher Kern Internationaler Erziehung. [Key problems as core content in international education]. In N. Seibert & H. J. Serve (Eds.), *Bildung und Erziehung an der Schwelle* *zum dritten Jahrtausend: multidisziplinäre Aspekte, Analysen, Positionen, Perspektiven* (pp. 135-161). Munich, Germany: PIMS-Verlag.

Kurnaz, M. A. & Arslan, A. S. (2009). Using the anthropological theory of didactics in physics: Characterization of the teaching conditions of energy concept and the personal relations of freshmen to this concept. *Journal of Turkish Science Education, 6*(1), 72-88.

Kurnaz, M. A. & Calik, M. (2009). A thematic review of 'energy' teaching studies: Focuses, needs, methods, general knowledge claims and implications. *Energy Education Science and Technology Part B: Social and Educational Studies, 1*(1), 1-26.

Pearce, J. M. & Russill, C. (2005). Interdisciplinary environmental education: communicating and applying energy efficiency for sustainability. *Applied Environmental Education & Communication*, *4*(1), 65-72.

Rodriguez, A. J. (1993). A dose of reality: understanding the origin of the theory/practice dichotomy in teacher education from the students' point of view. *Journal of teacher education*, *44*(3), 213-222.

Van Huis, C. & van den Berg, E. (1999). Teaching energy: a systems approach. *Physics Education*, *28*(3), 146.

Wake, G. (2011). Modelling in an integrated mathematics and science curriculum: Bridging the divide. In M. Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1000-1009). Rzeszów, Poland: University of Rzeszów.

Watts, D. M. (1983). Some alternative views of energy. *Physics Education, 18*(5), 213.

Wijnsma, A. (2009). Analysing a multidisciplinary research field. *Reserch Trends*, *14*, 6-7.

Metodología de los REI-FP en el caso de los Sistemas de Numeración para futuros maestros de primaria y profesores de secundaria

Tomás Ángel Sierra Delgado
Dpto. de Didáctica de las Matemáticas,
Universidad Complutense de Madrid, España

Pedro Nicolás Zaragoza
Dpto. de Didáctica de las Ciencias Matemáticas y Sociales,
Universidad de Murcia, España

Abstract. In this work we analyse the results of the implementation of a methodology based on research and study courses for teacher education (RSC-TE). Our study consists on two experimentations with two different RSC-TE about numeral systems: the first one in a Master degree for secondary teacher education and the second one in a Degree for primary teacher education. The comparison of the results obtained in both experiences facilitates the investigation of the restrictions which can hinder the dissemination of RSC-TE to other mathematical domains and teacher education programmes.

Résumé. Dans cet article, nous analysons la mise en œuvre d'une méthodologie des parcours d'étude et de recherche dans la formation des professeurs (PER-FP). Cette analyse est basée sur deux expérimentations de PER-FP autour des systèmes de numération, l'une dans un master de formation des professeurs du secondaire et l'autre dans une licence de formation des professeurs du primaire. La comparaison des deux expérimentations nous a permis d'étudier certaines contraintes qui peuvent présenter des difficultés pour la mise en œuvre de ces processus d'étude à propos d'autres domaines mathématiques et d'autres institutions de formation.

Resumen. En este trabajo analizamos la implementación de una metodología de los recorridos de estudio e investigación para la formación del profesorado (REI-FP). Este análisis lo basamos en la experimentación de dos REI-FP en torno a los sistemas de numeración, uno en un máster de formación del profesorado de secundaria y otro en un grado de formación del profesorado de educación primaria. La comparación de ambas experimentaciones nos ha permitido indagar algunas de las restricciones que pueden presentarse como dificultades para la puesta en funcionamiento de dichos procesos de estudio en relación con otros ámbitos matemáticos y otras instituciones de formación.

IV[e] congrès international sur la TAD (Toulouse, 21-26 avril 2013)
Axe 4. *Apports de la TAD à l'enseignement et à la diffusion des connaissances*

Sierra, T. A. & Nicolás, P. (2017). Metodología de los REI-FP en el caso de los Sistemas de Numeración para futuros maestros de primaria y profesores de secundaria. Dans G. Cirade et al. (Éds), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* (pp. 941-964). https://citad4.sciencesconf.org

1. Introducción

La teoría antropológica de lo didáctico (TAD) postula que toda actividad matemática funcional puede interpretarse y describirse en términos de modelización matemática (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997) y, en consecuencia, enfatiza la importancia de enseñar matemáticas como herramienta de modelización.

Por ello, se proponen los recorridos de estudio e investigación (REI) como dispositivos didácticos privilegiados para dotar de sentido al estudio y aprendizaje de las matemáticas como actividad de modelización en los actuales sistemas de enseñanza. Asimismo, se considera de vital importancia el diseño de *recorridos de estudio e investigación para la formación del profesorado* (REI-FP) que van a permitir, por un lado, desarrollar las competencias necesarias para gestionar los correspondientes procesos didácticos y, por otro, integrar tanto la formación matemática como la formación didáctica del profesorado.

En este trabajo hemos tomado como punto de partida dos REI ya elaborados previamente en Sierra (2006) para el desarrollo y experimentación de dos REI-FP.

Con los dos REI-FP que hemos experimentado pretendemos dar algunos elementos de respuesta a las siguientes cuestiones:

> ¿Qué tipo de praxeología didáctica (PD) debemos proponer a los futuros profesores de una determinada institución para que sean capaces de construir y poner en práctica un proceso de estudio sobre una praxeología matemática (PM) que contenga su razón de ser, es decir, las sucesivas cuestiones a las que dicha PM responde?
>
> ¿Qué condiciones se requieren y qué tipos de restricciones institucionales limitan o impiden el desarrollo normal de dicha PD en una institución docente determinada y cómo influyen en estas condiciones y restricciones los modelos epistemológico y didáctico dominantes en la institución y, en particular, la epistemología espontánea del profesorado?

La elaboración de los dos REI de los que partimos nos exigió también la construcción de un *modelo epistemológico de referencia* (MER), también llamado, *modelo praxeológico de referencia*, sobre la PM que queríamos estudiar. En nuestro caso, hemos propuesto como objeto de estudio la PM en torno a los *sistemas de numeración* (*SN*) y hemos utilizado el MER ya diseñado en Sierra (2006). Dicho MER, del que a continuación expondremos un breve resumen, surge como respuesta al estudio en *sentido fuerte* [1] de una cuestión suficientemente rica, llamada *cuestión generatriz*, y viene explicitado en términos de praxeologías y, más concretamente, como una arborescencia de praxeologías de complejidad y completitud crecientes.

2. Un modelo epistemológico de referencia de los sistemas de numeración

Cuando proponemos los sistemas de numeración (SN) como el contenido matemático que queremos sea estudiado en una institución educativa (primaria, secundaria, formación de maestros, formación de profesores de secundaria), la cuestión fundamental que conviene plantearse, y a la que es necesario aportar una respuesta, es la cuestión de sus *razones de ser*, es decir, las *cuestiones generatrices* de dicho contenido que han motivado su creación y su desarrollo.

Por tanto, previo al diseño del proceso de estudio, se considera necesario realizar una «reconstrucción racional» (Lakatos, 1970) de la evolución de los SN, que puede o no coincidir con su evolución real. Esta reconstrucción es lo que llamamos dentro de la TAD un modelo epistemológico de referencia (MER) que va a ser elaborado tomando como base praxeologías matemáticas sabias, ya construidas, que además legitimarán epistemológicamente el proceso de estudio que queremos elaborar.

El MER que hemos construido en Sierra (2006) es dinámico y está guiado por el desarrollo evolutivo de una sucesión de PM de modo que cada nueva PM *amplía y completa* relativamente los distintos componentes de la anterior hasta desembocar en la praxeología en torno al SN posicional completo en base 10 (PM_p). Así cada PM encuentra su *razón de ser* en las limitaciones de la anterior. La elección de las PM intermedias ha surgido del análisis detallado de la cuestión matemática inicial *q* siguiente:

> *q*: ¿Cómo expresar los números naturales mediante una representación escrita que sea un instrumento útil para el desarrollo de la aritmética elemental?

---

1. Una *respuesta en sentido fuerte* no puede reducirse a una simple información sino que requiere la construcción de toda una praxeología (Chevallard, 1999).

La búsqueda de una posible respuesta *en el sentido fuerte* a *q* ha dado lugar a una reconstrucción racional de los SN y ello nos ha llevado a considerar *tres grandes categorías de SN*[2]: «aditivos», «híbridos» y «de posición». Cada una de estas categorías da origen a un nuevo eslabón en la sucesión de PM que desemboca en PM_p.

Además la clarificación de *q* nos ha llevado a determinar que para que una representación escrita de los números sea eficaz no solo hay que tener en cuenta que dicha escritura sea unívoca y cómoda, sino que también es necesario que sea fácil la comparación de números a partir de sus escrituras y que la realización de cálculos sea fiable, económica y sencilla.

Así, este MER construido, que hemos tomado como referencia para el diseño del proceso de estudio, se compone de una *sucesión evolutiva de praxeologías matemáticas* que parte de una PM inicial rudimentaria (basada en la correspondencia término a término) y, mediante ampliaciones y completaciones progresivas, llega, por el momento, hasta PM_p. Dentro de cada una de las PM que componen dicha sucesión, se ha valorado el *alcance* (o dominio de validez), la *economía* y la *fiabilidad* de los distintos algoritmos asociados a cada SN, lo que ha permitido ir ampliando y optimizando los distintos ingredientes praxeológicos de cada PM.

Pero el proceso de búsqueda de la optimización, tanto en la escritura y comparación de números como en los cálculos en las distintas operaciones, nos va a llevar de nuevo a considerar que dentro de PM_p se presentan ciertas limitaciones, por ejemplo, cuando queremos realizar cálculos con *números «muy grandes»*. Por otro lado, el SN posicional completo en base 10 no solo se utiliza para la escritura, comparación y realización de cálculos dentro de los números naturales sino que también puede ampliarse al campo de los *números reales*, por lo que hay que estudiar qué modificaciones y ampliaciones es necesario realizar en PM_p que permitan un uso adecuado y pertinente con los *números reales*.

También es importante subrayar la relatividad de la base $b = 10$ que hemos utilizado por razones históricas y culturales. Por ello, creemos que es necesario plantear cuáles son las ventajas y limitaciones que puede presentar la escritura de cualquier número real en un SN de base o bases diferentes de

2. Estas categorías están basadas en la clasificación jerarquizada que propone Guitel (1975)

la base diez. Asimismo se considera que es muy importante la existencia de un símbolo para el cero para el buen funcionamiento de los SN posicionales, pero, *¿realmente es necesaria la utilización de un símbolo para el cero en dichos SN*?

Somos conscientes de que no hemos agotado las cuestiones que se pueden plantear en torno a los SN posicionales. De momento nuestro objetivo ha sido caracterizar las nuevas praxeologías que superan las limitaciones de PM_p, como posibles variaciones de PM_p, que nos van a aportar mejores elementos de respuesta a los interrogantes planteados.

A continuación, tomando como referencia, por una parte, el MER que acabamos de describir y, por otra, los dos REI ya diseñados también en Sierra (2006), uno para alumnos de la enseñanza secundaria y otro para estudiantes del grado en educación primaria, vamos a describir y analizar la experimentación realizada de dos REI-FP.

3. Los recorridos de estudio e investigación en la formación del profesorado

Uno de los REI-FP que hemos experimentado lo hemos llevado a cabo en el máster de formación del profesorado de secundaria impartido en la Universidad Complutense de Madrid, y el otro, en el grado en educación primaria de la Universidad de Murcia.

Cada uno de los recorridos de formación que hemos experimentado lo hemos estructurado en dos módulos sucesivos cuyas características principales resumimos a continuación:

- Un primer módulo que hemos llamado: *«Vivir un REI»*. En este módulo pretendemos que el estudiante-profesor viva como alumno todo el desarrollo de un REI. La primera fase del recorrido de formación partirá de una *cuestión generatriz* $\boldsymbol{Q_v}$ a la que el estudiante-profesor deberá proporcionar una respuesta. Veremos también que será necesario plantearse otras cuestiones que van a ayudar a encontrar una posible respuesta a $\boldsymbol{Q_v}$ y que llamaremos cuestiones cruciales $\boldsymbol{v_i}$. Dichas cuestiones pueden ser planteadas tanto por el profesor como por los alumnos que, en este caso, son los estudiantes-profesor.
- Un segundo módulo que llamamos: *«Analizar el REI»*. La *cuestión generatriz* $\boldsymbol{Q_a}$ que dirigirá esta segunda fase del recorrido de formación va

a girar en torno al cuestionamiento matemático-didáctico del proceso de estudio vivido anteriormente en posición de alumno. En particular, $\boldsymbol{Q_a}$ va a generar cuestiones $\boldsymbol{a_i}$ relativas a la estructura y la dinámica del REI vivido, formuladas a partir de los criterios y los objetivos con los que fue diseñado inicialmente para los alumnos del nivel educativo en cuestión. Así mismo, de forma paralela, este módulo debe proporcionar al estudiante-profesor los medios para describir, analizar y cuestionar la propia actividad de estudio que ha vivido en términos de los momentos o dimensiones del proceso de estudio, en términos de los gestos de estudio que se ha visto llevado a poner en juego y en términos de las responsabilidades que ha asumido como alumno en el REI vivido previamente. El objetivo principal de esta fase de la formación consiste en proporcionar al futuro profesor algunas herramientas necesarias para analizar y diseñar un REI, análogo al vivido en el módulo 1, dirigido a los alumnos del nivel educativo con los que tendrá que ejercer su labor docente.

La *cuestión generatriz* del REI que van a vivir los estudiantes en posición de alumnos en los dos recorridos que aquí describimos ha sido:

> Q_v: ¿Qué características matemáticas tiene nuestro sistema de numeración (posicional completo en base 10) para que se haya impuesto de manera absoluta sobre todos los que han existido a lo largo de la historia y que han coexistido durante muchos siglos? ¿Por qué la respuesta cultural es la «buena»?

Para la búsqueda de una posible respuesta a Q_v se han utilizado diferentes *cuestiones cruciales* v_i. Estas cuestiones han surgido del análisis de Q_v y serán *cruciales* para el proceso de estudio en la medida que ayuden a encontrar una buena respuesta a Q_v. A continuación exponemos las que creemos más representativas y que podrán ser utilizadas en ambos REI-FP.

> v_1: ¿Qué número natural representa cada uno de los símbolos que aparecen en el sistema? Explica su funcionamiento. ¿Cuántas veces se puede repetir un mismo símbolo? ¿Qué tipo de equivalencia existe entre los distintos símbolos? ¿Qué tipo de agrupamientos se realizan? ¿Todos los símbolos juegan el mismo papel?

v_2: ¿Existe algún símbolo en el sistema para representar al número cero? ¿Cómo se representa el número cero?

v_3: ¿Qué operaciones aritméticas se corresponden con la yuxtaposición o adjunción de los símbolos en el sistema?

v_4: ¿Qué papel desempeña la posición de los símbolos dentro del grupo de símbolos que representa a un número en el sistema?

v_5: ¿Se pueden escribir todos los números naturales en el SN considerado? ¿Mejora, en algún aspecto, el SN la eficacia de los restantes sistemas?

v_6: ¿Cómo comparar dos números a partir de sus escrituras en este SN?

v_7: ¿Se pueden realizar siempre las distintas operaciones aritméticas? ¿Con qué números el cálculo se vuelve casi impracticable? (alcance o dominio de validez)

v_8: ¿En este SN se necesitan tablas de sumar y multiplicar? ¿Por qué? ¿Cómo son estas tablas?

v_9: ¿A partir de qué magnitud de números las operaciones son muy difíciles de realizar sin acumular errores? (fiabilidad)

v_{10}: ¿A partir de qué magnitud de números las operaciones son demasiado tediosas y lentas? (economía)

v_{11}: ¿Cómo cambia la representación escrita de un número cuando éste se multiplica por una potencia de la base?

v_{12}: ¿Qué cambios habría que introducir en la técnica de representación utilizada para mejorar los algoritmos de multiplicación y división?

v_{13}: ¿Es posible que una misma escritura pueda representar dos números distintos? Si es así, pon un ejemplo e indica cómo podría evitarse dicho problema de ambigüedad.

v_{14}: ¿Qué ventajas y limitaciones puede presentar la escritura de los números en un SN de base o bases diferentes de la base diez?

v_{15}: ¿Es necesaria la utilización de un símbolo para el cero en los SN posicionales?

v_{16}: ¿Cómo podemos transformar el SN posicional para que nos permita representar y calcular con números "muy grandes" de forma económica y fiable?

v_{17}: ¿Cómo podemos ampliar el SN posicional con el fin de que nos permita representar y realizar cálculos con cualquier número real de forma económica y fiable?

Hasta aquí el conjunto de cuestiones que podremos considerar la guía del proceso de estudio del primer módulo en ambos REI-FP. Tenemos que señalar que no todas las cuestiones anteriores han sido utilizadas en ambos procesos de estudio. En los dos apartados siguientes exponemos la manera específica en que se han llevado a cabo los dos módulos en cada uno de los REI-FP.

3.1. El REI-FP vivido en el máster de formación del profesorado de secundaria

El primer REI-FP experimentado lo hemos llevado a cabo a lo largo de 12 sesiones de 90 minutos con un grupo de 23 estudiantes del máster de formación del profesorado de secundaria en matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid dentro de la asignatura «Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas» durante los meses de octubre y noviembre de 2012. Dicha asignatura consta de 10 créditos ECTS (4 sesiones semanales de 90 minutos).

En este caso, hemos tomado como punto de partida un REI diseñado y ya experimentado con alumnos de educación secundaria.

La descripción que realizaremos de todo el proceso será esquemática y se limitará a explicitar de forma breve tanto la práctica matemática como el análisis didáctico llevado a cabo en cada sesión.

En la *primera sesión* se han presentado las condiciones en que se va a desarrollar el REI-FP (trabajo en grupos, tarea para casa, forma de evaluar, etc.) viviendo un *primer encuentro* con la praxeología didáctica (en adelante PD) que lo va a estructurar. Hemos iniciado el primer módulo del proceso planteando la *cuestión generatriz* Q_v del REI que van a vivir los estudiantes en posición de alumnos.

Con el objetivo de abordar el problema general de la numeración y el de la existencia de múltiples escrituras del número, se ha propuesto un primer tipo de tareas que ha consistido en hallar diferentes representaciones escritas de una cantidad dada mediante una colección de objetos dibujados.

En la *segunda sesión*, como consecuencia de la tarea propuesta en la sesión anterior, los diferentes grupos de estudiantes han propuesto diferentes escrituras: la correspondencia término a término (palotes), aditivas, multiplicativas-aditivas, posicionales y otras que hemos llamado complejas (utilizando diferentes tipos de cálculo y propiedades de los números). Al coincidir la mayor parte de las escrituras aparecidas con los diferentes tipos de sistemas de numeración (SN), hemos aprovechado para iniciar el estudio de los diferentes SN con un *primer encuentro* con los SN aditivos mediante una tarea de análisis del SN egipcio, planteando las cuestiones v_1, v_2, v_3, v_4 y v_5. La respuesta a estas cuestiones ha permitido a los estudiantes descubrir las características de dicho SN. Como tarea para casa les hemos propuesto la realización de la comparación de números y de algunas operaciones elementales (suma, resta, multiplicación y división) para números de diferentes tamaños con el objetivo de que busquen una posible respuesta a las cuestiones v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10} v_{11} y v_{12}.

En la *tercera sesión* ha habido un debate donde cada grupo de estudiantes ha expuesto sus respuestas a las cuestiones planteadas en la sesión anterior. Los estudiantes han propuesto otras posibles técnicas[3] de cálculo multiplicativo y de división a las utilizadas históricamente por los egipcios. Ello nos ha conducido a enfrentarnos a la búsqueda de criterios que permitan evaluar la economía, fiabilidad y alcance de las técnicas que se puede llevar a cabo dentro de los SN aditivos. También, la puesta en común anterior ha conducido a encontrar las limitaciones de los SN aditivos y a buscar una manera de superarlas. Han surgido dos vías para mejorar la economía de escrituras del SN egipcio: El SN romano y sistema híbrido. Ante la cuestión: *¿Cuál es la vía que puede dar mejores resultados?* Algunos estudiantes han propuesto utilizar nuevos símbolos para los multiplicadores de las potencias de la base. Ello ha llevado a proponer como tarea el análisis de los SN híbridos, tomando como ejemplo el sistema chino-japonés.

En la *cuarta sesión* se ha llevado a cabo una discusión entre los 6 grupos sobre la respuesta a las cuestiones v_1, v_2, v_3,..... v_{11} y v_{12} en torno a los SN híbridos, primero sobre el SN chino-japonés y luego sobre el SN oral. Así

3. Como ejemplo, pondremos dos técnicas de división que han sido propuestas: Una consiste en ir haciendo todos los grupos posibles en el dividendo del tamaño del divisor. Si contamos los grupos obtenidos tenemos el *cociente* y el *resto* será lo que sobre. Otra consiste en ir multiplicando por diferentes potencias de la base al divisor y el resultado se va restando al dividendo hasta obtener como resultado de las sucesivas restas un número menor que el divisor. Dicho número será el *resto* de la división y la suma de las sucesivas potencias de la base por las que se ha multiplicado al divisor será el *cociente*.

hemos llegado a caracterizar los SN híbridos. Ante las limitaciones encontradas después de trabajar en el SN híbrido se plantea la cuestión relacionada con v_{12}: ¿*Cómo transformar el SN chino para superar dichas limitaciones*? Aquí los estudiantes proponen eliminar los símbolos de las potencias de la base e indicar dichas potencias mediante la posición. Ha surgido una discusión sobre qué se entiende por un SN posicional y hemos aprovechado para analizar del SN maya y plantear también v_{12} sobre el problema de la ambigüedad de escrituras. De la discusión en los grupos se ha decidido buscar una posible respuesta a las cuestiones v_{11} y v_{15}.

En la *quinta sesión* los estudiantes han puesto ejemplos que permiten demostrar que la regla de los ceros no funciona en el SN maya debido a su irregularidad, es decir, a que los agrupamientos realizados no son todos iguales. Como ejemplo de SN con diferentes tipos de agrupamientos se propone analizar el sistema monetario del euro y se plantea una discusión sobre cuál es la razón de ser de los distintos agrupamientos que aparecen.

En la *sexta sesión* se plantea una discusión sobre si es necesario que los alumnos de secundaria deban justificar las técnicas de cálculo utilizadas o no. Para ayudar en la discusión hemos propuesto la justificación y, posteriormente, evaluación, en cuanto a su economía, fiabilidad y dominio de validez, de un conjunto de técnicas de cálculo aditivo, sustractivo, multiplicativo y de división en el SN posicional completo. El hecho de que los estudiantes se hayan encontrado con que existen diferentes técnicas de cálculo en las distintas operaciones, desconocidas para ellos, les ha hecho caer en la cuenta de la importancia y necesidad tanto de su justificación como de la evaluación de su eficacia. En la discusión de todo el grupo de clase nos hemos preguntado cómo valorar cuándo una técnica es más eficaz, más económica y más fiable. También ha surgido la cuestión de cómo enunciar los diferentes criterios de divisibilidad, que ya conocemos en el SN posicional completo en base 10, en los diferentes SN ya analizados. Esta pregunta podría haber sido un buen motivo para iniciar un proceso de estudio en torno a la divisibilidad.

En la *séptima sesión* se ha planteado la comparación del SN posicional completo en base 10 con los diferentes SN analizados y se ha planteado la pregunta, relacionada con v_5: ¿*En cuál de los SN analizados se dispone de suficientes símbolos para representar cualquier número natural*? Aquí los estudiantes han descubierto sorprendidos que en el SN oral no se disponen de suficientes símbolos para designar cualquier número natural. También aparece la dificultad de realizar cálculos con números muy grandes en el propio SN posicional completo de base 10 y surge la necesidad de buscar una posible respuesta a v_{16}. El resto de la sesión la hemos dedicado a que los estudiantes justifiquen y evalúen la eficacia de diferentes técnicas de cálculo en el SN posicional completo de base diez.

En la *octava sesión* se ha seguido con el análisis de las diferentes técnicas de cálculo. Para la búsqueda de criterios que permitan valorar la eficacia de una técnica con respecto a otra se propone hacerlo con las técnicas «per gelosia» y «clásica» de la multiplicación (Sierra, 2006). También se ha planteado una nueva cuestión: ¿*Cuáles son aquellos problemas para los que las técnicas de cálculo que estamos justificando y evaluando son una buena herramienta para su resolución*? Para la búsqueda de los diferentes tipos de problemas que dan sentido a las diferentes operaciones se ha propuesto a los estudiantes la lectura de algunos textos como (Peltier, 2003), (Puig y Cerdán, 1995) donde pueden encontrar elementos de respuesta.

En la *novena sesión* hemos retomado la búsqueda de una repuesta a v_{16}, es decir, cómo escribir los números «muy grandes» de forma que sea más sencillo tanto la designación como la realización de cálculos con ellos. Aquí han surgido la notación científica, la escritura de los números utilizando la descomposición en potencias de la base y la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma [4] para realizar los cálculos.

En la *décima sesión* se ha planteado una discusión sobre la diferencia entre número racional y número decimal, lo que ha llevado a clarificar qué es un número decimal, qué es un número racional y qué es un número irracional. Ello ha conducido a buscar elementos de respuesta a la cuestión v_{17}. Asimismo ha surgido la cuestión de cómo sería la escritura de los números decimales en una base diferente a la base diez que hace referencia a v_{14}. Se ha propuesto la escritura y cálculo de números reales en base 6 y en base factorial y ha surgido la siguiente cuestión relacionada con v_{14}: ¿*Hay alguna razón para determinar qué base es mejor tanto para escribir como para calcular con los números reales*? Un grupo de alumnos ha descubierto

---

4. Por ejemplo, para calcular $(123456789)^2$ los estudiantes han propuesto lo siguiente:
$123456789^2 = (12345 \cdot 10^4 + 6789)^2 = 12345^2 \cdot 10^8 + 2 \cdot 12345 \cdot 6789\ 10^4 + 6789^2$.

que en el SN de base factorial la escritura de todos los números racionales siempre tiene una parte decimal con un número finito de cifras diferentes de cero.

En esta sesión hemos decidido terminar el desarrollo del primer módulo del REI-FP. Sin embargo, creemos que el proceso podría haber continuado, pues la búsqueda de respuesta a las diferentes cuestiones planteadas podría permitir abrir otros frentes de estudio y plantear nuevas cuestiones. En concreto, en este caso, se han planteado las siguientes cuestiones que pueden dar pie al estudio de nuevas PM:

¿Cuáles son los problemas que dan sentido a las distintas operaciones aritméticas?

¿Cuál es la PM en torno a la divisibilidad que es posible estudiar en la enseñanza secundaria obligatoria?

¿Cuál es la PM en torno a los números racionales que es posible estudiar en la enseñanza secundaria obligatoria?

Las dos últimas sesiones las hemos dedicado a *analizar el REI vivido* y para ello hemos planteado la siguiente *cuestión generatriz*:

$\boldsymbol{Q_a}$**:** ¿Qué características matemático-didácticas tiene la OD vivida en torno a los SN?

Para clarificar y ayudar a buscar una respuesta a $\boldsymbol{Q_a}$ hemos propuesto las siguientes cuestiones:

a_1: ¿Qué papel ha jugado la cuestión generatriz a lo largo del REI? ¿Se ha mantenido «viva»? ¿Se ha «desvanecido»? ¿Ha permanecido invariante a lo largo del proceso o ha evolucionado?

a_2: ¿Quiénes se han responsabilizado de plantear las cuestiones y las tareas iniciales? ¿Qué otras tareas podrían haber surgido de dicha cuestión generatriz? ¿Qué otra posible dirección hubiese podido tomar el proceso de estudio?

a_3: ¿Sobre quiénes ha recaído la responsabilidad de decidir en cada momento los medios, los instrumentos, las técnicas más adecuadas para proseguir el estudio?

a_4: ¿Sobre quiénes ha recaído la responsabilidad de evaluar los resultados parciales que han ido apareciendo?

a_5: ¿Cuál ha sido, en definitiva, el grado de autonomía asumido por los estudiantes?

a_6: ¿Se han analizado y comparado las ventajas e inconvenientes de utilizar unas técnicas matemáticas u otras para estudiar el sistema? ¿Qué criterios se han tomado para decidir que una técnica es más eficaz que otra?

a_7: ¿En base a qué criterios matemáticos se ha decidido pasar de un tipo de sistemas de numeración a otro tipo supuestamente más económico o más fiable? ¿Quién ha tomado estas decisiones?

a_8: ¿Consideramos, como comunidad de estudio, la necesidad de llevar a cabo una actividad sistemática y prolongada en el tiempo y, en consecuencia, pensamos que sería necesario continuar el proceso de estudio varias sesiones más? O, por el contrario, ¿tenemos la sensación de haber dedicado un tiempo suficiente al problema de la escritura de los números?

a_9: ¿Qué condiciones se han exigido a los sistemas de numeración y qué funciones se les han asignado?

a_{10}: ¿Cuáles han sido los objetivos globales del proceso de estudio que hemos vivido (aunque de manera incipiente)? Se trata tanto de los objetivos relativos a los contenidos matemáticos, como los relativos al tipo de actividad didáctica desarrollada.

Para trabajar en este módulo, se ha pedido a los estudiantes que elaboraran un informe con su respuesta global al conjunto de cuestiones planteadas y, posteriormente, se ha realizado una puesta en común donde ha habido una discusión y justificación de las diferentes respuestas elaboradas.

En resumen, las respuestas obtenidas por los diferentes grupos han sido las siguientes:

- Los estudiantes han considerado que, aunque ha sido el profesor quien se ha encargado de proponer las cuestiones y tareas iniciales, ha habido un cambio significativo en el reparto de responsabilidades a la hora de buscar posibles respuestas y evaluar los resultados obtenidos. Por tanto, el grado de autonomía ha sido alto comparado con los métodos tradicionales, ya que el profesor ha proporcionado un amplio margen de independencia al realizar las actividades propuestas de modo que los propios estudiantes han encontrado las diferentes ventajas y limitaciones de cada SN con respecto al SN posicional completo en base 10.

- Algunos grupos piensan que una de las razones por la que los estudiantes se han dejado dirigir por el profesor en el planteamiento de las cuestiones iniciales es debido al desconocimiento inicial de la cuestión tratada.
- Todos los grupos afirman que la cuestión generatriz propuesta al principio se ha mantenido viva a lo largo de todo el proceso y que la evaluación de las distintas actividades ha surgido de la reflexión y debate de todo el grupo de clase.
- Consideran que el tiempo dedicado al estudio de las cuestiones propuestas ha sido adecuado, ya que, aunque se pueden plantear nuevas cuestiones, creen que la respuesta obtenida es suficiente.
- Además, el haber vivido el REI les ha posibilitado experimentar otra forma de plantear un proceso de estudio de matemáticas.
- En cuanto a las características de los SN, concluyen que los SN no solo sirven para representar los números sino también para hacer cálculos de la forma más sencilla, económica y fiable posible. Y en lo que se refiere al SN posicional completo en base 10 consideran de gran importancia no solo que sea posible realizar cálculos de forma económica, fiable y sencilla y escribir cualquier número por muy grande que sea, sino que además permite una fácil extensión a los números decimales, y, en consecuencia, a todos los números reales.

3.2. El REI-FP vivido en el grado de maestro de educación primaria

El proceso de estudio se ha llevado a cabo con un grupo bilingüe de 29 estudiantes del grado en educación primaria de la Universidad de Murcia, en la asignatura *Mathematics and Mathematics Education I*. Es una asignatura obligatoria y anual, de 12 créditos ECTS, que se imparte en el segundo curso. El REI se llevó a cabo durante 20 sesiones, dos por semana, una de una hora y otra de tres horas.

A continuación hacemos un breve resumen del desarrollo del REI, haciendo especial hincapié en la actividad matemática llevada a cabo y en el modo en que se han vivido los diferentes momentos de estudio.

En la *sesión* 1, el profesor ha presentado la organización del curso y ha empezado REI-FP planteando a los estudiantes la tarea de escribir el número 47 de al menos tres maneras distintas. Después de un tiempo de trabajo por grupos han surgido las siguientes escrituras: la correspondencia uno a uno (palotes), aditivas, multiplicativo-aditivas y posicionales en base 10 y base 5. Como se indica en Sierra (2006), dichas escrituras pueden relacionarse fácilmente con un SN inicial o rudimentario (SNi), con un SN aditivo (SNa), con un SN multiplicativo-aditivo o híbrido (SNh) y con un SN posicional (SNp), respectivamente.

De este modo hemos conseguido que esta sesión sea un *primer encuentro* con la PM relativa a los SN.

En la *sesión* 2, se ha propuesto la cuestión generatriz Q_v. Ello nos ha llevado a decidir que necesitábamos criterios para analizar y comparar los SN. La lista de criterios que toda la clase ha decidido tener en cuenta son los siguientes:

C_1: La existencia o no de ambigüedad de escrituras y C'_1: El que la escritura más económica sea única o no. (Relacionados con v_{13}.)

C_2: El que sea necesaria o no una pequeña cantidad de símbolos diferentes (fijados de antemano) para escribir todos los números. (Relacionado con v_1, v_2, v_3, v_4 y v_5.)

C_3: El que las cadenas de símbolos necesarias para escribir cada uno de los números sean cortas o no. (Relacionado con v_1, v_2, v_3, v_4 y v_5.)

C_4: El modo en que el SN facilita la comparación de números a partir de sus escrituras. (Relacionado con v_6.)

C_5: La manera en que el SN simplifica el algoritmo de la adición. (Relacionado con v_7, v_8, v_9 y v_{10}.)

C_6: La manera en que el SN simplifica el algoritmo de la sustracción. (Relacionado con v_7, v_8, v_9 y v_{10}.)

C_7: La manera en que el SN simplifica el algoritmo de la multiplicación. (Relacionado con v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11} y v_{12}.)

C_8: La manera en que el SN simplifica el algoritmo de la división. (Relacionado con v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11} y v_{12}.)

Así en este REI hemos utilizado los criterios anteriores como las *cuestiones cruciales* que nos han de ayudar a encontrar una respuesta a Q_v. Hemos empezado a responder a dicha *cuestión generatriz* analizando un SN inicial y rudimentario (SNi) con el objetivo de intentar mejorarlo utilizando dichos criterios. La búsqueda de mejoras en SNi, tanto en la representación de los números como en el cálculo, nos ha llevado a proponer el análisis de un SNa como el egipcio. Para su evaluación el profesor ha planteado las preguntas

v_1, v_2, v_3, v_4 y v_5 y posteriormente se han utilizado los criterios C_5, C_6 y C_7. Para multiplicar en SNa, los estudiantes han empezado con una técnica inicial consistente en sumar un factor tantas veces como indica el otro. El estudio de esta técnica nos ha permitido evolucionar hacia el algoritmo de multiplicación egipcio, en el que hay que ir haciendo duplicaciones de uno de los factores (Sierra 2006). En esta sesión hemos vivido el momento del *primer encuentro* y el momento *exploratorio* de diferentes técnicas dentro de la praxeología relativa al SNa. Cuando nos hemos cuestionado el dominio de validez del algoritmo de multiplicación egipcio, ha surgido la pregunta siguiente: *¿Podemos expresar todo número como suma de potencias de* 2?

En la *sesión* 3, hemos empezado evaluando las respuestas de los alumnos a la pregunta que quedó pendiente en la sesión anterior. A raíz de las respuestas que los alumnos han dado, se ha planteado la diferencia entre comprobar con algunos ejemplos y demostrar. El profesor ha aprovechado para precisar qué queremos demostrar y ha esbozado una demostración del teorema fundamental de los SN (Sierra 2006), dejando pendiente precisarla y validarla.

En la *sesión* 4, hemos seguido con la tarea pendiente de sesión anterior, trabajando con cierto detalle la demostración del teorema fundamental de los sistemas de numeración. Hemos terminado la sesión con el estudio de la técnica de multiplicación en SNa.

En la *sesión* 5, nos hemos planteamos cómo dividir en el SNa (C_8). Los estudiantes han propuesto dos técnicas: a) Ir restando sucesivamente el divisor del dividendo hasta encontrar un número más pequeño que el divisor, b) Ir buscando múltiplos de divisor hasta llegar a un número menor y lo más cercano al dividendo.

En la *sesión* 6, seguimos con la división. La técnica que consistía en ir restando el divisor ha evolucionado hacia el algoritmo egipcio de la división (Sierra, 2006). El hecho de haber justificado y explicado el algoritmo egipcio para la multiplicación en sesiones anteriores ha favorecido que surgiera dicho algoritmo. A continuación, el profesor ha planteado la tarea de calcular los divisores comunes de dos números con el objetivo de dar sentido al cálculo del *máximo común divisor* (*mcd*) y de evidenciar la falta de justificación de una técnica estándar de su cálculo en primaria. Ante esta tarea, la mayor parte de los estudiantes han utilizado una técnica *naif*, que consiste en buscar todos los divisores de ambos números probando y de aquellos que son comunes coger el mayor. Otros han intentado proponer una técnica estándar de primaria que se basa en la descomposición de ambos números en factores primos.

En las *sesiones* 7 y 8, se ha producido de nuevo un intento por parte de los alumnos de proponer una técnica estándar de cálculo del *mcd* para primaria. Aquí los estudiantes han fracasado en su intento de querer justificarla. En la última parte de la *sesión* 8 se ha llevado a cabo una *institucionalización* y *evaluación* de la praxeología en torno al SNa. Todo el grupo ha concluido que SNa tiene una limitación importante: se necesitan cadenas de símbolos demasiado largas para escribir un número (C_3). Nos hemos propuesto la tarea de mejorar el SNa. Han surgido cuatro maneras de superar dicha limitación: el SN romano (sin utilizar el principio sustractivo), el SN sustractivo (igual que el SN romano, pero aplicando el principio sustractivo), el SNh y un SN complejo que mezcla el SN sustractivo y el SNh. Para esclarecer estas técnicas de escritura hemos utilizado los criterios C_1, C'_1 y C_2 y el grupo de clase ha desechado el SN complejo ya que no daba una buena respuesta a dichos criterios.

En la *sesión* 9, hemos dividido la clase en tres grupos para que cada grupo estudie uno de los tres SN siguientes: el SN romano, el SN sustractivo y el SNh. Con esta decisión el profesor ha pretendido: no querer privilegiar un SN frente a otro, favorecer la participación y provocar dialéctica entre distintas propuestas.

En la *sesión* 10, los distintos grupos han explicado las primeras técnicas de cálculo en los distintos SN:

- En el SN romano se opera como en el SNa.
- En el SN sustractivo no han sabido cómo sumar (C_5).
- En el SNh para sumar (C_5) se necesitan tablas de sumar. La notación que utilizan para los coeficientes es la siguiente: α = «dos veces», β = «tres veces», δ = «cuatro veces», γ = «cinco veces», ε = «seis veces», η = «siete veces», θ = «ocho veces», ξ = «nueve veces».

En la *sesión* 11, nos hemos dedicado por completo, y sin éxito, a buscar una técnica de la suma en el SN sustractivo.

En la *sesión* 12, hemos conseguido construir una técnica para la resta en el SN sustractivo gracias a una buena reflexión sobre los ostensivos (vemos que para operar es conveniente alinear los números «por columnas»). Para multiplicar usamos el algoritmo egipcio.

En la *sesión* 13, hemos continuado con la elaboración de técnicas para multiplicar en el SN sustractivo. Luego, mediante una puesta en común, hemos realizado una síntesis y evaluación de dicho sistema. Hemos terminado la sesión recordando la suma en el SNh.

En la *sesión* 14, hemos practicado un algoritmo de la suma en el SNh y hemos elaborado un algoritmo para la multiplicación en el SNh usando tablas de multiplicar.

En la *sesión* 15, hemos practicado la técnica de la multiplicación en el SNh y nos hemos planteado buscar una técnica de restar en el SNh. Ha surgido la técnica de «pedir prestado» (Sierra 2006).

En la *sesión* 16, además de practicar la técnica de la multiplicación en el SNh, los estudiantes han propuesto tres técnicas para dividir en el SNh:

- Usar la tabla de multiplicar del divisor hasta llegar al múltiplo menor y más cercano al dividendo.
- Usar la tabla de multiplicar del divisor hasta el ξ. Esta técnica tras practicarla un tiempo ha evolucionado hacia una técnica análoga a la estándar para la división en un SN posicional.
- El algoritmo egipcio. Los estudiantes han percibido que es menos económico que la técnica anterior.

En las *sesiones* 17 y 18, todo el grupo de clase ha realizado una *institucionalización* y *evaluación* del trabajo realizado, comparando las tres propuestas de mejora del SNa (SN romano, SN sustractivo y SNh). Hemos concluido señalando que el SNh es el que mejor satisface todos los criterios.

En la *sesión* 19, hemos continuado con la evaluación del SNh. El profesor ha planteado la siguiente cuestión: *¿es posible trabajar escribiendo solo los coeficientes?* Aquí los estudiantes se han dado cuenta de que, si eliminamos los símbolos de las potencias de la base, es necesario incorporar un símbolo para indicar que no hay ningún elemento de una cierta potencia de la base, y otro para indicar que solo hay un ejemplar de una cierta potencia de la base. Además, los estudiantes han vivido el *primer encuentro* con el SNp, percibiendo que la posición de los símbolos es clave en dicho SN. Ante la propuesta de aplicar los criterios C_5, C_6 y C_7 en SNp, han surgido diferentes técnicas de cálculo:

- Para la adición, una técnica parecida a la usada en el SNh utilizando las tablas de sumar.
- Para la resta, las técnicas de «pedir prestado» y de Fibonacci, y el profesor ha explicado la de compensación (Sierra 2006).
- Para la multiplicación, han intentado poner en funcionamiento la técnica estándar o clásica sin saber cómo justificarla. Más tarde han encontrado su justificación recurriendo a la técnica que habían utilizado en el SNh. Después el profesor les ha presentado la técnica per gelosia y les ha pedido que piensen en una justificación.

En la *sesión* 20, se ha propuesto buscar una técnica de división en el SNp. Enseguida ha surgido el algoritmo estándar, pero no saben cómo justificarlo. Algunos han recurrido a la técnica empleada en el SNh para encontrar la justificación.

Aunque este primer módulo «Vivir un REI» podría continuar, sin embargo hemos decidido darlo por terminado aquí.

La última parte de esta sesión de tres horas la hemos dedicado al segundo módulo «Analizar el REI vivido» y los estudiantes han tenido que buscar alguna respuesta a las preguntas siguientes:

- ¿A qué pregunta intentábamos dar respuesta a lo largo de todo el proceso?
- ¿La pregunta ha sido importante o ha sido una excusa?
- ¿Quién ha ido encontrando las respuestas a las preguntas que nos planteábamos?
- ¿Creéis que el profesor conocía todas las respuestas que iban a ser aportadas?
- ¿Qué trabajo previo creéis que ha debido realizar el profesor?
- ¿Teníamos una sola manera de calcular en cada SN?
- ¿Nos conformamos, como grupo, con dar por estudiada una técnica para la que no tenemos justificación?
- ¿Qué pautas hemos seguido para estudiar cada SN?

En resumen, las respuestas obtenidas por los diferentes grupos han sido las siguientes:

- Los estudiantes recuerdan la pregunta que dio origen al proceso de estudio realizado. Les parece que ha sido importante y reconocen que las respuestas las han ido aportando ellos.

- Piensan que en realidad el profesor ya sabía lo que iban a responder, o al menos se lo podía imaginar. No imaginan qué trabajo previo ha debido realizar el profesor, pues, en realidad, admiten que el contenido de las sesiones ha dependido fuertemente de las iniciativas que ellos han ido tomando. Todos afirman convencidos que en cada SN tenían varias maneras de hacer todas las operaciones, y que no se conformaban con técnicas no justificadas.

4. Análisis de las diferencias y semejanzas entre los dos REI-FP experimentados

Entre las diferencias que han surgido a la hora de llevar a cabo ambas experimentaciones, podemos resaltar las siguientes:

- La formación matemática que tenían los estudiantes de ambos procesos de estudio era muy diferente. Por un lado, los del máster provienen de haber realizado una licenciatura (en matemáticas, en estadística o en física) o una ingeniería y, por otro, los del grado proceden normalmente de un bachillerato de ciencias sociales o de humanidades.
- En el grado la mayor parte de las *cuestiones cruciales* han sido acordadas por toda la clase a partir del análisis de la *cuestión generatriz* planteada por el profesor. Sin embargo, en el máster la mayor parte de las *cuestiones cruciales* han sido propuestas por el profesor. Como consecuencia de ello, el proceso desarrollado en el grado ha sido más lento, pero a cambio puede haber resultado más enriquecedor, ya que son los propios estudiantes los que han decidido cuáles son las cuestiones derivadas de Q_v. Hay que añadir que dicha lentitud también ha venido provocada por la baja formación matemática de los estudiantes. En el máster, en cambio, se ha podido ampliar el estudio de los SN del campo de los números naturales al de los números decimales, pues la idea de que los SN también sirven para representar los números decimales no ha surgido en ningún momento por parte de los estudiantes. Hay que señalar que la formación matemática que ya tenían estos estudiantes también ha favorecido dicha ampliación.

Entre las semejanzas que hemos encontrado, podemos destacar las siguientes:

- En ambos procesos los estudiantes tenían un *conocimiento transparente* del SNp, es decir, no lo consideraban un contenido problemático y cuestionable. La mayor parte de los estudiantes solo conocía un algoritmo para realizar cada una de las operaciones y no se planteaba la necesidad de justificarlo.
- Durante el proceso de estudio los estudiantes siempre han esperado a que fuera el profesor quien planteara las cuestiones a estudiar. Algunos de los grupos de estudiantes del máster han indicado que la razón por la que no han planeado cuestiones ha sido el desconocimiento que tenían del tema. Aquí puede postularse también que esto es consecuencia de que en el *contrato didáctico tradicional* quien plantea las cuestiones de forma habitual es el profesor.
- En los dos REI-FP se han estudiado a la vez varios SN. Ello ha permitido analizar las ventajas y limitaciones de cada uno de ellos. Los diferentes SN se han considerado como diferentes respuestas a un mismo problema, y no como respuestas aisladas y sin relación entre ellos. Esta relación se ha podido analizar al observar que las limitaciones de un SN han resultado ser la *razón de ser* de otro SN que consigue superarlas.
- En ambos casos la gestión del *tiempo didáctico* ha resultado compleja ya que el proceso vivido resulta bastante más largo que el que se lleva a cabo en una clase tradicional. Resulta difícil decidir cuál es tiempo adecuado para estudiar una determinada cuestión, pues no todos los grupos de estudiantes trabajan al mismo ritmo. Así puede suceder que algunos estudiantes sientan que pierden el tiempo porque han terminado ya y otros que lamentan no tener más tiempo para poder terminar el estudio iniciado.

5. Restricciones, dificultades encontradas y conclusiones

Una de las dificultades que hemos encontrado a la hora de proponer el estudio de los SN en el máster ha sido que tanto el currículum como los libros de texto consideran que dicho tema no es problemático para los alumnos de la secundaria, pues ya ha sido estudiado en la primaria. Esto se debe, en gran parte, a que las instituciones de primaria y secundaria consideran que los SN solo tienen relación con la iniciación a la escritura los números naturales. Sin embargo, se deja de lado la gran importancia que tienen, no solo para el cálculo con números naturales pequeños y grandes, sino también para la escritura y para el cálculo con números decimales y, por tanto, también con números reales.

En el caso del grado, aunque no se cuestiona su estudio, la institución de formación de maestros no considera necesario realizar un estudio tan prolongado. Ello se debe a que el estudio de los SN se sitúa siempre al inicio de la construcción de las PM que tratan sobre lo numérico, pues si queremos utilizar los números necesitamos disponer de un SN. Por tanto, los temas relacionados con los SN aparecen siempre al principio de los manuales y resulta difícil vincularlos con el cálculo de las operaciones que aún no se han definido.

Estas maneras de interpretar los SN por las diferentes instituciones han influido fuertemente en los estudiantes y ha hecho más difícil que consideraran que su estudio era suficientemente problemático.

También, según dicho modelo, los SN son considerados como un contenido práctico-técnico y no se ve la necesidad de justificar las técnicas que se utilizan tanto para designar como para operar con los números. Por ello, los estudiantes no sienten necesidad de justificarlas, los del grado, porque no tienen la formación matemática suficiente para hacerlo y, los del máster, porque, aunque tienen la formación adecuada para hacerlo, creen que no es importante para el proceso de estudio.

En lo que se refiere a la *dialéctica de las preguntas y las respuestas*, hemos encontrado que es poco habitual que los estudiantes planteen cuestiones sobre el tema de estudio. Como afirma B. Barquero (2009), esto es debido que el *contrato didáctico tradicional* asigna al profesor la responsabilidad de hacer las preguntas que dirigen el estudio y deja para el estudiante que sea el que plantea las dudas que el profesor puede responder de modo inmediato.

Por otro lado, los estudiantes tienden a tener una fuerte dependencia del profesor, ya que, ante cualquier respuesta que ellos elaboran, lo primero que intentan es contrastarla con la opinión del profesor. Esto puede deberse a que el modelo de la *pedagogía dominante* recomienda una enseñanza cada vez más individualizada y personalizada (Barquero, 2009). Para hacer frente a este fenómeno, en los REI-FP hemos otorgado un papel preponderante dentro de la actividad de estudio de las matemáticas a la *comunidad de* *estudio* formada por los alumnos y el profesor. Para ello, la elaboración de la respuesta a las cuestiones planteadas se ha realizado primero mediante un informe de cada grupo y después mediante la discusión por toda la clase de dichos informes. Este estudio comunitario ha permitido que se hayan podido defender las respuestas obtenidas por la comunidad en vez de tener que admitir las respuestas oficiales y aceptadas por la institución escolar, que suele proporcionar el profesor.

Para el diseño de estos REI-FP hemos partido de un REI previamente experimentado con alumnos. Luego lo hemos implementado utilizando la vivencia de dicho REI y su análisis didáctico como objetos de estudio. Con ello queremos lograr que los profesores en formación tengan una experiencia de actividad matemática con carácter funcional y aprendan las herramientas básicas del análisis didáctico. Nuestro objetivo es, por un lado, conseguir que dichos procesos de estudio, llevados a cabo dentro de la formación de profesores, sean un buen instrumento para difundir las prácticas matemáticas con un carácter funcional entre los profesores, y, por otro, ayudar a desarrollar en ellos las competencias docentes necesarias para gestionar dichas prácticas.

Desde la TAD postulamos que la propuesta didáctica basada en los REI va a permitir provocar grandes modificaciones en el contrato didáctico tradicional. Esto va a determinar que vayan surgiendo necesidades de la profesión del docente de matemáticas, que de otra forma permanecerían ocultas. Así los estudiantes han destacado que, el haber vivido el REI les ha permitido constatar un cambio significativo en el reparto de responsabilidades y en el alto grado de autonomía del que han gozado a la hora de buscar respuestas y evaluarlas, comparado con el modelo tradicional.

Sabemos que los REI-FP implementados aún requieren ser mejorados y esperamos poder hacerlo en sucesivas experimentaciones. En definitiva, pensamos que este trabajo de búsqueda de buenas PD no debe ser una tarea de uno o dos profesores concretos sino que, al ser un problema abierto y complejo, necesita de la participación activa de toda la comunidad de profesores e investigadores en didáctica de las matemáticas.

Agradecimientos

Financiado por el proyecto EDU2012-39312-C03-02 *La modelización matemática en la formación del profesorado de Infantil y Primaria en matemáticas y en ciencias naturales*.

Referencias

Barquero, B. (2009). *Ecología de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las matemáticas* (Tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona, España.

Chevallard, Y., Bosch, M. & Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas*. *El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelona, España: ICE-Horsori.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques, 19*(2), 221-266.

Guitel, G. (1975). *Histoire comparée des numérations écrites*. Paris: Flammarion.

Lakatos, I. (1970). History of science and its rational reconstructions. *PSA: Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association*, *1970*, 91-136. [Trad. española: *Historia de la ciencia y sus reconstrucciones racionales*. Tecnos; Madrid, 1974]

Peltier, M. L. (2003). Problemas aritméticos. Articulación, significados y procedimientos de resolución. *Educación Matemática, 15*(3), 29-55.

Puig L, & Cerdán, F. (1995). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.

Sierra, T. A. (2006). *Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas. Los sistemas de numeración y la medida de magnitudes* (Tesis doctoral). Universidad Complutense de Madrid.

Formation et praxéologies des professeurs en langues vivantes étrangères à l'école

Jessyca Tretola
EA 4671 ADEF, France

Abstract. This study deals with the training of elementary school teachers, and the way their praxeologies are used during foreign language lessons, and with conditions and constraints they meet in their English classes. The analysis of these different aspects is performed by using tools provided by the anthropological theory of the didactic (ATD). Based on official resources, such as the Common European Framework of Reference for Languages, and school programs (BO n°8 of august, 30th, 2007), this research studies, in a clinical approach and through interviews and film transcriptions of English classes, two teachers teaching English. The results of this study confirm our hypothesis: teachers' training influences their praxeologies.

Resumen. Este estudio trata de la formación de los profesores de escuela elementaría y de la manera que practican sus praxeologías durante una clase de lengua extranjera, de las condiciones y restricciones que encuentran cuando enseñan el inglés. El análisis se hace utilizando la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). Basada en el estudio de recursos oficiales, tales como el Marco Común Europeo de Referencia para la Lenguas y los programas BO n° del 30 de agosto 2007, este trabajo de investigación estudia, en un método clínico y a través de conversaciones grabadas y de transcripciones de clases de inglés filmadas, las praxeologías de dos profesores que enseñan inglés. Los resultados de este estudio validan nuestra hipótesis: la formación de los profesores influye sobre sus praxeologías.

Résumé. Cette recherche s'appuie sur la théorie anthropologique du didactique (TAD) et porte sur la formation des professeurs des écoles, sur la manière dont ils mettent en œuvre leurs praxéologies en séance de langues vivantes étrangères et sur les conditions et les contraintes qu'ils rencontrent dans l'enseignement de l'anglais. À l'aide de textes officiels, comme le Cadre européen commun de référence pour les langues et les programmes de langues étrangères pour l'école primaire parus en 2007, et par le biais d'une approche clinique, nous étudions, à travers des entretiens et des transcriptions de séances d'anglais filmées, les praxéologies de deux professeurs des écoles enseignant l'anglais en cycle 3. Les résultats de cette recherche confortent notre hypothèse : la formation des enseignants influence leurs praxéologies.

IV^e congrès international sur la TAD (Toulouse, 21-26 avril 2013)
Axe 4. *Apports de la TAD à l'enseignement et à la diffusion des connaissances*

Tretola, J. (2017). Formation et praxéologies des professeurs en langues vivantes étrangères à l'école. Dans G. Cirade et al. (Éds), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* (pp. 965-978). https://citad4.sciencesconf.org

1. Introduction

Depuis 2008, la polyvalence des professeurs des écoles, toujours plus poussée, leur impose l'enseignement des langues vivantes étrangères (LVE) au sein de leur classe alors que, bien souvent, ils n'ont pas la maîtrise de la langue étrangère qu'ils doivent enseigner. Se pose alors la question de la formation des enseignants concernant l'enseignement des langues vivantes. Les professeurs déjà en poste depuis plusieurs années doivent désormais effectuer des stages de remise à niveau alors que les nouveaux arrivants doivent obtenir le niveau C1 du Cadre européen de référence et de compétences pour les langues (CECRL), en passant une nouvelle certification de « Compétences en langues de l'enseignement supérieur ».

Cette communication porte sur les praxéologies des professeurs des écoles (PE) pendant les cours de langues vivantes étrangères. Nous interrogeons à la fois la formation des PE et la manière dont ils mettent en œuvre leurs praxéologies, en classe, lors d'une séance de LVE. Notre hypothèse est que la formation des PE en LVE influence leurs praxéologies en LVE à l'école et nous pouvons formuler la question que nous nous posons de la façon suivante : les professeurs des écoles ayant un diplôme ou une formation en anglais ont-ils les mêmes praxéologies que les professeurs des écoles n'ayant aucune expérience ni aucune formation dans cette même LVE ?

Pour répondre à cette question nous analyserons les praxéologies de PE enseignant l'anglais à l'école en cycle 3 ainsi que les conditions et les contraintes sous lesquelles ils les mettent en œuvre.

2. Ancrage théorique

2.1. La théorie de la transposition didactique (TD) et la théorie anthropologique du didactique (TAD)

Nous nous appuyons sur la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999) afin d'analyser les praxéologies des professeurs des écoles pendant les séances de LVE. À l'origine de la TAD, la TD (Chevallard, 1985) est née de la volonté de trouver d'où viennent les savoirs présents dans les systèmes didactiques qui se composent de la manière suivante : une « institution enseignée », *X* ; une « institution enseignante »,

Y ; un système de connaissances, ♥. Un tel système s'écrira alors $S(X ; Y ; ♥)$, ♥ étant l'enjeu didactique.

2.2. La TD en mathématiques

La TD est développée par Yves Chevallard à partir de 1985 en didactique des mathématiques. Elle met en évidence la distinction entre le savoir savant tel qu'il émane de la recherche et le savoir enseigné qu'on observe dans les pratiques de la classe. Elle introduit au moins trois types de savoirs en mathématiques : le savoir savant, le savoir à enseigner et le savoir enseigné. La TD distingue deux transpositions, la transposition didactique *externe* et la transposition didactique *interne*, ce qui peut se résumer selon le schéma suivant :

Transposition didactique externe *Transposition didactique interne*

Savoir savant ➔ savoir à enseigner ➔ savoir enseigné

2.3. La TD en LVE

En LVE, se pose la question de ce qu'est le savoir savant. Selon Jocelyne Accardi (2000), la transposition didactique en LVE se fait à partir de savoirs savants et de « savoirs multiréférenciels » que sont « les savoirs experts » et les « pratiques sociales de références ». Le *savoir expert* (Johsua, 1996) est le savoir produit par de petits groupes d'individus qui disposent de techniques et de savoir-faire sur ces techniques. Ce savoir ne connaît pas la même légitimité que le savoir savant. Les *pratiques sociales de références* (Martinand, 1986) sont les situations sociales, vécues, connues ou imaginées pour servir de référence à l'apprenant afin de donner du sens aux apprentissages. Ces pratiques sociales de références peuvent être le point de départ de la transposition didactique en LVE. La transposition didactique ne se fait donc pas seulement à partir des savoirs savants mais aussi à partir des *savoirs experts* et des *pratiques sociales de références*.

2.4. La TAD

La poursuite des travaux d'Yves Chevallard sur la transposition didactique a donné naissance à la théorie anthropologique du didactique dans les années 90, afin de fournir un modèle pour les savoirs, les savoir-faire et les connaissances du point de vue de l'évolution des objets de savoirs dans une institution, et de décrire les rapports institutionnels et personnels à ces objets de savoir. La TAD (Chevallard, 1999) introduit la notion de praxéologie et situe l'activité d'étude dans l'ensemble des activités humaines et des institutions sociales. Dans notre recherche, nous nous appuyons sur la TAD afin de dégager les praxéologies des professeurs en fonction de leur formation mais aussi pour connaître les conditions et les contraintes sous lesquelles ils agissent lors de la mise en œuvre de leurs praxéologies.

2.5. Praxéologies

Yves Chevallard (1999) considère que, en première instance, toute activité humaine consiste à accomplir une tâche t d'un type T, au moyen d'une technique τ, justifiée par une technologie θ, elle-même justifiable par une théorie Θ.

Le bloc praxis. Il est composé du type de tâches T, point de départ de la praxéologie, souvent désigné par un verbe d'action comme faire, effectuer, rédiger… – cependant le verbe seul ne peut définir un type de tâches, il faut qu'il ait un objet précis –, associé à une technique τ qui précise une manière de faire, d'accomplir les tâches t du type T. Il s'agit du « savoir-faire ».

Le bloc logos. La technologie et la théorie sont les composantes de ce bloc. La technologie, notée θ, est le discours rationnel qui justifie la technique ; elle a pour rôle de justifier la technique – c'est-à-dire de rendre compte du fait qu'elle fait bien ce qu'elle prétend faire – mais aussi de l'expliquer, de l'éclairer, de la rendre intelligible, voire de l'engendrer. La théorie Θ intervient à son tour pour justifier la technologie. L'être humain a besoin de justifier ce qu'il fait. La théorie n'est pas seulement scientifique, il s'agit de toutes les théories que n'importe quel individu peut avoir sur n'importe quel sujet de la vie courante.

2.6. Les conditions et les contraintes du didactique

Selon Chevallard (2010), « toute science se voue à l'étude d'un certain type de conditions et de contraintes qui concourent à déterminer la vie des sociétés humaines ». La didactique est donc la science qui étudie les conditions et les contraintes (l'économie et l'écologie du didactique) de la diffusion des praxéologies dans un espace institutionnel donné. Ces conditions et ces contraintes sont repérées et explorées sur l'échelle des niveaux de codétermination didactique schématisée de la manière suivante :

Civilisation
↓↑
Société
↓↑
École
↓↑
Pédagogie
↓↑
Disciplines
↓↑
Domaines
↓↑
Secteurs
↓↑
Thèmes
↓↑
Sujets

L'économie du didactique renvoie aux conditions qui se situent à quelque *niveau que ce soit* de l'échelle de codétermination didactique, alors que l'écologie du didactique désigne le système de contraintes (Chevallard, 2012, pp. 2-3). Notre recherche s'intéresse aux *conditions* que l'enseignant entend créer pour enseigner la langue anglaise, c'est-à-dire à ce qui relève de l'économie du didactique. Cependant son enseignement peut être confronté à certaines *contraintes* auxquelles il peut être lui-même confronté. Ces contraintes relèvent de l'écologie du didactique.

3. Ancrage institutionnel

3.1. Le CECRL et les praxéologies des enseignants

Le Cadre européen commun de référence pour les langues (CECRL, ou encore CECR), né de la volonté des pays membres de donner une référence commune en ce qui concerne l'enseignement/apprentissage des langues vivantes, représente « une base commune » dans l'enseignement/apprentissage des langues vivantes étrangères (LVE) et dans l'élaboration des programmes, des référentiels et des manuels au niveau européen. Publié en 2001 par le Conseil de l'Europe – sa version française est publiée en 2005 par les Éditions Didier –, il défend un plurilinguisme et un multiculturalisme européen et définit des activités langagières et des compétences à acquérir dans la compréhension de l'oral et de l'écrit, l'expression orale en interaction et en continu et l'expression écrite – pour ce qui concerne l'école primaire. Le Cadre européen est un outil descriptif, non prescriptif, qui aide les enseignants à faire leurs propres choix, en fonction des institutions dans lesquelles ils exercent en matière d'enseignement de la LVE, en favorisant l'engagement des élèves dans leurs apprentissages mais aussi en leur permettant de se fixer des objectifs et de développer leur autonomie. Il joue un rôle important dans les praxéologies des enseignants car il leur sert de référence sans leur imposer de méthode tout en les aidant à prendre des décisions en conséquence afin de définir leur action.

3.2. L'approche actionnelle

Même s'il n'est pas prescriptif, le CECRL préconise une approche *actionnelle* où l'apprenant est un acteur social ayant à accomplir des tâches en mobilisant des compétences, aussi bien générales et individuelles (savoir, savoir-faire, savoir-être et savoir-apprendre) que communicatives (compétences linguistiques, sociolinguistiques et pragmatiques). L'apprenant doit développer des stratégies dont le but est de parvenir à l'accomplissement de tâches à effectuer. Il joue un rôle dans ses apprentissages et a des objectifs tout en développant une certaine autonomie.

3.3. Le niveau C1

Le CECRL définit plusieurs niveaux : le niveau A correspond au niveau élémentaire de compétences, B est le niveau intermédiaire et C le niveau avancé. Ces trois niveaux sont subdivisés eux-mêmes en deux niveaux, 1 et 2. Nous nous intéressons au niveau C1, correspondant au niveau de l'utilisateur expert. Ce niveau est requis pour les lauréats du concours et donc pour les néo-professeurs des écoles. Les élèves de l'école élémentaire, eux, devront acquérir le niveau A1.

3.4. Les programmes parus au BO n° 8 du 30 août 2007

D'une manière générale, et selon les instructions officielles, l'apprentissage d'une langue étrangère se fait essentiellement à l'oral, même s'il est préconisé d'introduire progressivement l'écrit à partir du cycle 3. Les programmes (Ministère de l'Éducation nationale [MEN], 2007) ont été conçus à partir du CECRL et l'apprentissage est centré sur le « développement des compétences de compréhension et d'expression » : comprendre ; réagir et parler en interaction orale ; comprendre à l'oral ; parler en continu ; lire ; écrire. Cette petite liste sert de référence quant aux compétences à acquérir à la fin de chaque cycle. En anglais, nous remarquons qu'il est préconisé aux professeurs d'opérer des choix en fonction des contenus des programmes et de son projet pédagogique. Le professeur est donc libre de mettre en place son enseignement à condition de respecter les contenus des programmes.

3.5. Le CLES

Depuis 2010, les lauréats du concours de recrutement de professeurs des écoles doivent être titulaires du certificat de compétences en langues de l'enseignement supérieur (CLES), certification qui relève du niveau C1 du cadre européen. Le CLES est un « dispositif de certification complet mettant en œuvre les cinq compétences langagières décrites dans le CECRL : compréhension de l'oral ; compréhension de l'écrit ; production écrite ; production orale ; interaction orale » (Ministère de l'Éducation nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche, 2015). Cette certification est actuellement proposée en neuf langues : anglais, allemand, espagnol, portugais, italien, arabe, polonais, grec moderne et russe. En ce qui concerne notre recherche nous nous intéressons aux professeurs qui enseignent l'anglais.

4. Méthodologie de la recherche

4.1. La méthode clinique

Le principe de base de la méthode clinique est qu'elle vise à mettre en œuvre une recherche centrée sur l'individu. Son objectif est de permettre une compréhension du sens que prennent, pour des sujets singuliers, les situations et les événements. Elle permet de produire des savoirs à partir de récits de sujets et de repérer le caractère conscient ou inconscient dans les compétences et les connaissances de ce sujet en situation à travers l'observation mais aussi à travers des entretiens. Nous avons donc opté pour la méthode clinique dans le cadre de notre recherche afin de comprendre les pratiques des enseignants en LVE à travers leurs praxéologies, leurs gestes professionnels mais aussi leur vécu et leur formation en anglais en les observant pendant leurs séances et en les écoutant lors d'entretiens.

4.2. Le terrain

Pour cette recherche, nous avons filmé deux professeurs des écoles en séance d'anglais. Le premier enseignant filmé, que nous nommerons PE_1, enseigne en zone d'éducation prioritaire dans une classe de CM1. Il n'a aucun diplôme dans la langue étrangère qu'il enseigne, mais il a cependant suivi quelques animations pédagogiques et quelques stages afin de pouvoir enseigner l'anglais au sein de sa classe ; il a aussi bénéficié de l'aide d'une assistante anglophone pendant plusieurs années. PE_2 est professeur des écoles dans une école qui accueille des élèves d'un milieu plutôt favorisé. Elle a fait des études en commerce international et a obtenu un diplôme d'études universitaire générales en anglais ainsi qu'un *Master Business and Administration* (MBA). Elle parle couramment la langue anglaise et prévoit de passer une certification en langues vivantes étrangères (anglais). Elle a en responsabilité une classe de CM2 et, dans le cadre d'un décloisonnement au sein de son école, elle enseigne également l'anglais en CE2. L'analyse des séances permettra de dégager les praxéologies mises en œuvre par chacun de ces deux enseignants afin d'analyser leurs pratiques et leurs gestes professionnels ainsi que les conditions et les contraintes qu'ils peuvent rencontrer dans l'enseignement d'une langue vivante étrangère, en se référant aux compétences du CECRL et à l'échelle de codétermination didactique.

5. Analyse et interprétation

La séance de PE_1 porte sur la situation d'un objet par rapport à un autre, la séance de PE_2 sur le vocabulaire des aliments.

5.1. Les conditions et les contraintes dans l'enseignement des langues vivantes

Les conditions pour enseigner une LVE à l'école élémentaire renvoient dans un premier temps au niveau de la société dans l'échelle des niveaux de codétermination. En effet, depuis 2008, l'enseignement d'une langue vivante étrangère est conseillé à partir du CP (élèves de 6-7 ans) et devient obligatoire à partir du CE1 (élèves de 7-8 ans). L'institution demande aux néo-enseignants d'être titulaires du CLES, mais les professeurs des écoles que nous avons observés enseignent depuis plusieurs années, ce qui fait qu'ils n'ont pas passé cette certification tout en devant néanmoins enseigner une langue vivante étrangère au sein de leur classe. PE_1 utilise les instructions officielles, qu'il nomme « référentiel » lors de l'entretien, n'ayant aucune autre référence concernant l'enseignement des langues et n'étant pas spécialiste de la langue anglaise :

> A (personne qui mène l'entretien) : Ok alors ensuite j'aimerais savoir comment vous préparez une séance ou une séquence de langues ?
>
> PE_1 : Ben après c'est par rapport au référentiel de compétences.

Il donne ensuite un peu de son *logos* pour justifier les types de tâches qu'il donne à faire à ses élèves :

> PE_1 : Voilà donc par exemple au niveau du positionnement hein que j'avais fait c'était « *where is ?* » comme phrase à faire acquérir aux enfants et faire acquérir tout le *on, behind*.
>
> A : D'accord c'était les programmes.
>
> PE_1 : Le programme c'est aussi d'utiliser d'abord c'est une phrase.
>
> A : Alors euh quels types de tâche favorisez favorisez-vous ? Donc par rapport quand vous préparez votre séance vous favorisez quels types de tâches en fait ?
>
> PE_1 : Euh la tâche où y'en a le plus possible où il y a le plus possible d'enfants qui peut qui puissent communiquer hein.
>
> A : Oui.
>
> PE_1 : Qui puissent répéter…

Le manque de connaissance de la langue de la part de PE_1 apparaît comme une contrainte dans la mise en œuvre de ses praxéologies. Pour PE_2, la connaissance de la langue anglaise, et donc de la discipline « anglais », apparaît comme une condition à l'enseignement/apprentissage de la langue comme le montre l'entretien que nous avons eu avec elle :

> PE_2 : …C'est déjà de parler anglais c'est-à-dire il vaut mieux avoir une bonne prononciation et moins bien parler anglais mais avoir une bonne prononciation avant c'est ce qu'il y a de plus difficile. Moi j'ai peut-être de la

> chance c'est la fac d'anglais qui m'a ouvert les yeux sur les accents toniques…

PE_2 a donc une réflexion métalinguistique sur la langue anglaise et la manière de l'enseigner grâce à sa connaissance de la langue étrangère.

Les enseignants rencontrent également plusieurs contraintes au niveau de la pédagogie et de la discipline, mais aussi de la société, sur l'échelle de codétermination didactique. PE_1 ne s'autorise pas l'enseignement de la grammaire car il estime que ce n'est pas possible dans la zone où il enseigne :

> PE_1 : D'accord donc hein de leur apprendre des tournures grammaticales donc mais ça de revenir à la grammaire euh j'en suis pas là dans ma classe dans la maîtrise avec le groupe que j'ai ici en ZEP hein où c'est l'observation de la langue…

Pour PE_2, la principale contrainte qu'elle rencontre est d'ordre matériel :

> PE_2 : Des contraintes matérielles avant, trouver des flashcards qui correspondent, là c'est pour le CE2…

PE_2 estime quand même que la plus grosse contrainte que peut rencontrer un professeur des écoles dans l'enseignement de l'anglais est la langue elle-même, et que la mise en œuvre de la pédagogie lorsque que l'on ne maîtrise pas la langue est des plus problématiques :

> PE_2 : La plus grosse contrainte c'est la contrainte de la langue en elle-même. Je ne suis pas trop confrontée à ça mais j'entends les autres en parler c'est comment donner les bons sons quand on ne maîtrise pas la langue soi-même...

Lors des entretiens que nous avons eus avec les professeurs, nous avons donc remarqué que les conditions et les contraintes que ceux-ci rencontraient pouvaient différer en fonction de leur formation et de leur diplôme obtenu dans la langue enseignée et donc influencer leurs praxéologies.

5.2. Le Cadre européen, les programmes et les praxéologies des enseignants

Nous constatons que les deux enseignants se basent sur le CECRL pour mettre en œuvre leur enseignement et construire leurs praxéologies. Tous deux rendent l'apprenant actif pendant la séance de LVE : PE_1 et PE_2

réalisent comme type de tâches de solliciter les élèves pour qu'ils interrogent leurs pairs avec comme technique de donner la consigne en français pour PE_1 et en anglais pour PE_2. Les élèves viennent tour à tour poser les questions au tableau et les autres doivent y répondre.

> PE_1 : Idrice vient ici come here please. Ok alors tu vas manipuler et tu vas leur demander where is the dog ? Ok attention ça tient pas trop bien. Vas-y. Allez. Hush. (Le professeur met le doigt sur sa bouche.) Where is
>
> PE_2 : So now I am going to put the picture in my back and I want someone to come here and ask the question. Who wants to come ?

Les techniques des enseignants sont différentes dans ce cas-là. Les deux enseignants tentent cependant de la même manière de faire travailler les élèves à l'oral dans un premier temps puis de les faire passer à l'écrit comme le préconisent les programmes. Pour PE_2, la trace écrite ne pourra être réalisée par les élèves à cause de l'agitation de la classe. PE_2 arrêtera la séance avant celle-ci. Les deux enseignants basent cependant leurs praxéologies en grande partie sur la compréhension de l'oral et l'expression orale des élèves. Les évaluations académiques ont des effets différents sur les praxéologies des deux professeurs :

> PE_1 : En même temps par exemple les évaluations d'anglais y'a pas mal de choses en écrit et voilà j'ai je me base aussi par rapport à ces évaluations d'anglais quoi, qu'est-ce qui est demandé c'est systématiquement depuis trois ou quatre ans euh qu'est-ce qui ressort quoi, qu'est-ce qu'on demande au niveau le vocabulaire de base quelques tournures de base de présentation ce qui est demandé à l'école primaire.
>
> PE_2 : La plus grosse contrainte en CM2 c'est l'évaluation académique, on en vient à focaliser là-dessus…

Pour PE_1, les évaluations constituent un point d'appui dans la construction de ses techniques d'enseignement. En revanche, pour PE2, elles apparaissent comme un obstacle au bon déroulement de l'enseignement de la langue vivante.

5.3. Diplômes, formation et praxéologies des enseignants

PE_2, spécialiste de la langue anglaise, insiste sur la grammaire, notamment sur la structure des phrases, et réalise comme type de tâches de reprendre systématiquement les élèves lorsqu'une erreur est commise avec pour technique d'utiliser la langue maternelle, le français, ou des gestes.

Élève 1 : It's a…

PE_2 : Question ! (PE_2 fait un geste avec ses deux mains pour indiquer l'inversion sujet/verbe)

Élève 1 : Is it a Coke ?

…

Élève 2 : It is an ice cream ?

PE_2 : On vient de la poser Loanne, tu as oublié de faire l'inversion sujet/verbe.

Elle réalise également le type de tâches de reprendre ses élèves au niveau de la prononciation avec pour technique de donner les explications en français.

Élève : Is it a co…ofee ?

PE_2 : Coffee. Il n'y a pas de diphtongue là !

PE_1, non spécialiste de la langue anglaise, réalise également le type de tâches de reprendre les élèves sur la prononciation avec comme technique de faire répéter l'élève. Cependant il ne donne aucune explication concernant la grammaire ou la phonologie.

Idrice : rare is the box ?

PE_1 : where is the dog repeat

Idrice : rare is the dog

PE_1 : *where*

Idrice : *where*

PE_1 : is the dog

Idrice : *is the dog*

Nous constatons donc que les praxéologies des deux enseignants diffèrent en fonction de leur formation. PE_2, spécialiste de langue anglaise, accorde plus d'importance à la grammaire et à la phonétique que PE_1, qui n'a aucun diplôme et a seulement suivi quelques stages dans la langue enseignée.

6. Conclusion

Il convient de préciser que cette recherche comporte des limites car elle a été effectuée seulement à partir de deux séances filmées. Les résultats ne peuvent donc pas être généralisés à tous les professeurs des écoles enseignant l'anglais en France. Les résultats de cette recherche confortent notre hypothèse selon laquelle la formation des enseignants dans la LVE enseignée influence leurs praxéologies pendant les séances de LVE. Les enseignants ne connaissent pas les mêmes conditions et les mêmes contraintes : pour PE_1, elles sont d'ordre linguistique et du niveau de la société (voir la zone dans laquelle il enseigne), alors que PE_2, qui a un DEUG d'anglais et maîtrise donc la langue (on note son insistance sur la grammaire dans ses praxéologies), rencontre surtout des contraintes matérielles. Les praxéologies concernant la compréhension de l'oral sont différentes : PE_1 donne les consignes en français alors que PE_2 les donne en anglais. On a vu que ces deux professeurs des écoles enseignent depuis des années en école primaire mais ne sont pas titulaires du CLES. Il serait intéressant, afin d'étendre cette recherche, de s'entretenir avec des enseignants débutants et de filmer des séances qu'ils animent pour savoir quelles sont leurs praxéologies, car ils sont détenteurs du CLES mais pas toujours spécialistes de la langue.

Références

Accardi, J. (2000). *La référence en didactique des langues : Le cas de l'espagnol* (Thèse de Doctorat). Université de Provence.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques, 19*(2), 221-266.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble : La pensée sauvage.

Chevallard, Y. (2010). La didactique, dites-vous ? *Éducation & didactique, 4*(1), 139-148.

Chevallard, Y. (2012). *Didactique fondamentale. Module 5 : Forum des questions.* http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/DFL_2011-2012_Module_5_FQ_.pdf

Conseil de l'Europe. (2005). *Cadre européen commun de référence pour les langues : apprendre, enseigner, évaluer.* Paris : Didier. http://www.coe.int/t/dg4/linguistic/Source/Framework_FR.pdf

Joshua, S. (1996). Le concept de transposition didactique n'est-il propre qu'aux mathématiques ? Dans C. Raisky & M. Caillot (Éds), *Au-delà des didactiques, le didactique. Débats autour de concepts fédérateurs*. Bruxelles : De Boeck.

Martinand, J.-L. (1986). *Connaître et transformer la matière*. Berne, Suisse : Peter Lang.

Ministère de l'Éducation nationale. (2007). Programmes de langues étrangères pour l'école primaire. *Bulletin officiel hors-série n° 8 du 30 août 2007*.

Ministère de l'Éducation nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche. (2015). *Le CLES en bref*. http://www.certification-cles.fr/fr/presentation/le-cles-en-bref/